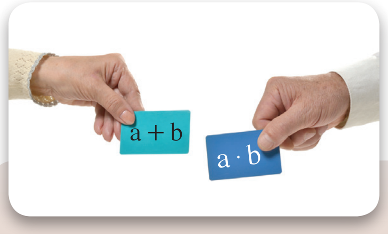
الوحدة الخامسة: استعمالات في الجبر



5.1 حاصل الضرب يساوي الجمع

أشيروا إلى كلّ تساوي صحيح.

$3+1\frac{1}{2}=3\cdot1\frac{1}{2}$ $\quad$ $9+1\frac{1}{8}=9\cdot1\frac{1}{8}$

$5+1\frac{1}{6}=5\cdot1\frac{1}{6}$ $\quad$ $10+1\frac{1}{11}=10\cdot1\frac{1}{11}$

$4+1\frac{1}{3}=4\cdot1\frac{1}{3}$ $\quad$ $7+1\frac{1}{7}=7\cdot1\frac{1}{7}$

ما الصفة المشتركة لكل أزواج الأعداد في التعابير التي فيها تساوي صحيح؟

سجّلوا ثلاثة أزواج عدديّة إضافيّة لها الصفة نفسها، هذا يعني أن يكون حاصل ضربها يساوي مجموعها.

نبحث أزواج عدديّة x وَ y حاصل ضربها يساوي مجموعها.

.1 a هو عدد صحيح.

أ. أكملوا حسب التساوي الصحيح في مهمّة الافتتاحيّة: $a + \_\_\_\_\_ = a \cdot \_\_\_\_\_$

ب. برهنوا أنّ التساوي يتحقّق.

ت. هنالك عدد لا يتحقّق فيه التساوي. ما هو؟

.2 x وَ y هما عددان حاصل ضربهما يساوي مجموعهما.

أ. ترجموا الجملة من العربيّة إلى كتابة رياضيّة.

ب. عبّروا عن y بمساعدة x.

ت. ما الفرق بين أزواج الأعداد الّتي تحقّق التساوي في مهمّة 1 مقارنة بأزواج الأعداد الّتي تحقّق التساوي في هذه المهمّة؟

.3 x وَ y هما عددان حاصل ضربهما يساوي مجموعهما.

أجيبوا عن الأسئلة التالية بمساعدة أحد التمثيلات من المهمّة 2. فكّروا، في كلّ مرّة، ما هو التمثيل المناسب؟

أ. أحد الأعداد هو $5\frac{1}{2}$. ما هو العدد الثاني؟

ب. هل يجب أن يكون العددان موجبين؟ إذا كانت الإجابة نعم، لماذا؟ إذا كانت الإجابة لا، فما هو الشرط المطلوب كي يكون العددان موجبين؟

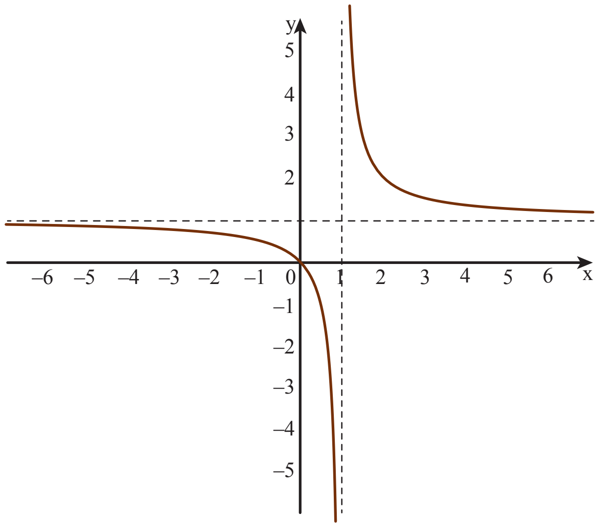
ت. هل يمكن أن يكون العددان سالبين؟ إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا لماذا؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأعطوا مثالًا لزوج كهذا من الأعداد.

ث. هل يمكن أن يكون العددان بين -1 إلى 1؟

إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا لماذا؟ إذا كانت الإجابة نعم، فأعطوا مثالًا لزوج كهذا من الأعداد.

ج. هل يمكن أن يكون x كلّ عدد؟

4. x وَ y هما عددان حاصل ضربهما يساوي مجموعهما.
أمامكم الخطّ البيانيّ للدالّة الّتي تناظر بين العدد الأوّل والعدد الثاني.
أ. اكتبوا الدالّة بكتابة جبريّة.
ب. افحصوا هل يمكن الإجابة بمساعدة الخطّ البيانيّ على البنود في المهمّة 3؟



5. اكتبوا ادّعاءات إضافيّة يمكن أن نتعلّمها من الخطّ البيانيّ. استعملوا الكلمات الّتي تظهر في السلّة.

6. اكتبوا تعبيرًا جبريًّا لحاصل ضرب الأعداد وتعبيرًا جبريًّا لمجموع الأعداد بواسطة x فقط.
هل حصلتم على تعابير متساوية؟

7. بيّنوا أنّ المعادلة $x + y = x \cdot y$ مكافئة للمعادلة $(x - 1)(y - 1) = 1$.
أيّ صفات من بين الصفات السابقة يمكن استنتاجها بسهولة من هذا التمثيل الجبريّ؟

هل تعلمون؟

المعادلة $x + y = x \cdot y$ هي مثل المعادلة $(x-1)(y-1) = 1$ ، وهما من نوع المعادلات المتماثلة. إذا بدلنا مكان المتغيّر، فإنّ المعادلة لا تتغيّر. وإذا عبّرنا عن y كدالة للمتغيّر x ، وعبّرنا عن x كدالّة للمتغير y ، فإنّنا نحصل على التعبير نفسه. يُتيح وجود التماثل في المسائل الجبريّة أو الهندسيّة الوصول إلى فرضيّات من الصعب الوصول إليها في حالة غياب التماثل. في الواقع، يعمل هنا مبدأ مهم جدًّا، صياغته: "إذا لم يتوفر سبب كافٍ للتميّز، فلا يكون تمييز".
هذا المبدأ قديم جدًّا، وقد تمّت صياغته كمثل بواسطة جان بوريدن (Jean Buridan 1300-1358)، وهو بروفسور في موضوع الفلسفة في جامعة باريس. المبدأ معروف باسم "حمار بوريدن".
كانت كومتان من القش أمام الحمار. الكومتان متماثلتان بشكل مطلق، لذا لم يكن للحمار سبب معقول في التوجه لإحدى الكومتين.
كانت المأساة في النهاية أنّ الحمار مات من الجوع.

كاريكتر أميركي من سنة 1900 ينتقد الكونجرس الذي يتخبط كحمار بوردين بين بناء قناة بناما وبناء قناة نيكاراغوا.

نحافظ على لياقة رياضيّة

1. اكتبوا حواصل الجمع التالية كحواصل ضرب بطرق مختلفة.

أ. $a^4 - 16$ ب. $a^2 - 1 + (a-1)^2$ ت. $18a^2 + 12a^3$

2. اكتبوا حواصل الضرب التالية كحواصل جمع.

أ. $x^2(x^2 - \frac{16}{x^2})$ ، $x \neq 0$ ب. $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ ت. $(x-3)^2(x+3)^2$

أحجية

- هل هنالك ثلاثة أعداد طبيعيّة تحقّق التساوي: $a + b + c = a \cdot b \cdot c$؟
إذا كانت الإجابة نعم، جدوا ثلاثة أعداد أو ثلاثيّات أعداد كهذه. انتبهوا يمكن أن يكون قسم من الأعداد متساوٍ في كل تساوي كهذا.
- هل هنالك أربعة أعداد طبيعيّة تُحقّق تساوي شبيه (هذا يعني أنّ مجموعها يساوي حاصل ضربها)؟
إذا كانت الإجابة نعم، جدوا أربعة أعداد أو رباعيّات أعداد كهذه.
- هل هنالك خمسة أعداد طبيعيّة تحقّق تساوي شبيه؟
إذا كانت الإجابة نعم، جدوا خمسة أعداد أو خماسيّات أعداد كهذه.