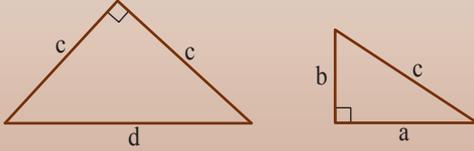


3.4 نبي ثلاثيات فيثاغورية



ابنوا شبه منحرف متساوي الساقين من ستة مثلثات حسب المعطيات في الرسمة:
أربعة مثلثات قائمة الزاوية ومختلفة الأضلاع ومثلثان قائما الزاوية ومتساويا الساقين.

انتبهوا إلى أنّ الأضلاع المشار إليها بالحرف c لها الطول نفسه.
اشرحوا لماذا نتج شبه منحرف؟



نتعرف على طرق لإيجاد ثلاثيات فيثاغورية، هذا يعني أن
نجد ثلاثيات أعداد طبيعية لأطوال أضلاع مثلثات قائمة
الزاوية.

1. برهنوا نظرية فيثاغوروس بواسطة المقارنة بين مساحة شبه المنحرف ومجموع مساحات المثلثات الستة التي تكوّنه.
هذا يعني أن نجد، مجموع مساحات المثلثات = مساحة شبه المنحرف حسب القاعدة



تعريف: نسمي ثلاثية الأعداد الطبيعية التي تحقق نظرية فيثاغوروس "ثلاثية فيثاغورية".
إذا كانت معطاة ثلاثية أعداد لا يوجد لها عامل مشترك (باستثناء العدد 1)، فإننا نسمي الثلاثية "ثلاثية فيثاغورية أساسية".

مثال: الثلاثية 3, 4, 5 هي ثلاثية فيثاغورية أساسية.
لكن الثلاثية 6, 8, 10 هي ثلاثية فيثاغورية ليست أساسية.

ثلاثيات بواسطة المضاعفات

2. أ. بينوا أنّه:
إذا كان معطى a, b, c ثلاثية فيثاغورية، فإن na, nb, nc (n عدد طبيعي) هي ثلاثية فيثاغورية أيضًا.
ب. جدوا ثلاثيات فيثاغورية مختلفة تنتمي إلى الثلاثية الأساسية نفسها.
ت. جدوا ثلاثيات فيثاغورية، بحيث يكون العدد الأكبر فيها 200.

ثلاثيات بواسطة عدد طبيعي وعدد أكبر منه بـ 2

3. أ. اختاروا عددين طبيعيين، بحيث يكون أحدهما أكبر من الآخر بـ 2.

برهنوا أن الثلاثية التي نتجت بواسطة:

- مجموع الأعداد التي اخترتموها،

- حاصل ضرب الأعداد،

- حاصل ضرب الأعداد بإضافة 2،

هي ثلاثية فيثاغورية.

ب. برهنوا أن كل ثلاثية تنتج بهذه الطريقة بواسطة عددين الفرق بينهما 2 هي ثلاثية فيثاغورية.

ت. ابنوا بهذه الطريقة عدّة ثلاثيات فيثاغورية، وجدوا الحالات التي تنتج فيها ثلاثية أساسية.

ث. ما هما العددان اللذان يُنتجان الثلاثية الفيثاغورية 20, 99, 101؟

ثلاثيات بواسطة عددين طبيعيين معينين

4. أ. اختاروا عددين طبيعيين.

بيّنوا أن الثلاثية التي نتجت بواسطة:

- حاصل ضرب الأعداد التي اخترتموها ضرب 2،

- الفرق بين مربعي العددين الكبير والصغير،

- مجموع مربعي العددين،

هي ثلاثية فيثاغورية.

ب. بيّنوا بشكل عام

أنه إذا كان x و y يمثلان عددين طبيعيين ($x > y$)

فإن الثلاثية

$$2xy$$

$$x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2$$

هي ثلاثية فيثاغورية.

ت. ابنوا بهذه الطريقة عدّة ثلاثيات فيثاغورية، وجدوا في أيّ ثلاثيات من بين الثلاثيات التي وجدتموها نتجت ثلاثية أساسية.

ث. ما هي الأعداد التي تُنتج الثلاثية 20, 21, 29؟

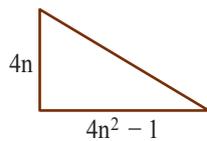
ثلاثيات فيها مضاعفات العدد 4

5. في الثلاثية الأساسية 20, 21, 29 أحد الأعداد من مضاعفات العدد 4.

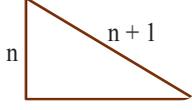
أ. $4n$ يمثل طول أحد القوائم في المثلث القائم الزاوية، و $4n^2 - 1$ يمثل طول القائم الثاني.

سجّلوا تعبيراً جبرياً لطول الوتر.

ب. جدوا ثلاثية فيثاغورية لقيم n مختلفة.



ثلاثيات فيها عدنان متتاليان



6. يوجد في ثلاثية الأعداد الأساسية 5, 12, 13 عدنان متتاليان.
 أ. n يمثل طول أحد القائمين في مثلث قائم الزاوية، و $n+1$ يمثل طول الوتر.
 سجّلوا تعبيراً جبرياً للقائم الثاني.
 ب. جدوا بهذه الطريقة ثلاثيات فيثاغورية لقيم n مختلفة.



زاوية الحاسوب

7. اختاروا طريقتين بنيتن فيهما ثلاثيات فيثاغورية.
 أ. استعملوا برمجية إلكترونية (مثلاً: Excel) كي تبنا حوالي 20 ثلاثية فيثاغورية في كل طريقة من الطرق.
 ب. بينوا بواسطة إكسل أن الثلاثيات التي بنيتموها هي ثلاثيات فيثاغورية.
 ت. جدوا مميزات الثلاثيات الفيثاغورية التي حصلت عليها في كل طريقة اخترتموها.



هل تعلمون؟



الثلاثيات الفيثاغورية هي ثلاثيات أعداد تحقق المساواة $a^2 + b^2 = c^2$.
 هل هنالك ثلاثيات تحقق مساواة شبيهة فيها أس أكبر من ذلك
 (مثلاً: $a^5 + b^5 = c^5$)؟

صاغ الرياضي بيير دي فيرما هذا السؤال (Pierre de Fermat, 1601-1665)،
 وقد سمي هذا السؤال نظرية فيرما الأخيرة. ادعى أن المعادلة
 $a^n + b^n = c^n$ ($n > 2$) لا يوجد لها حل واحد في الأعداد الطبيعية.
 سجّل فيرما الجملة في هامش الكتاب، وذكر: اكتشفت برهاناً رائعاً لهذه

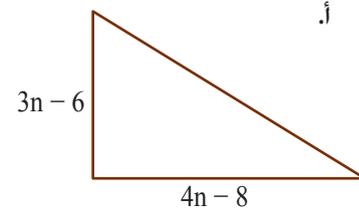
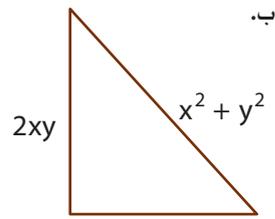
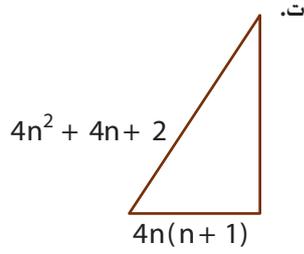
النظرية، لكن هذا الهامش ضيق ولا يستطيع أن يحويها".

حثت هذه الملاحظة رياضيين ومحبي الرياضيات أن يبحثوا، خلال حوالي 350 سنة، عن برهان لادعاء فيرما. برهن هذه النظرية، في نهاية الأمر، الرياضي أندرو ووليس (Andrew Wiles) سنة 1995.



نحافظ على لياقة رياضية

1. يمثل التعبيران المسجلان على ضلعيّ كلّ مثلثٍ طولي هذين الضلعين. جدوا التعبير الذي يمثل طول الضلع الثالث.



2. جدوا لكلّ مثلث، في المهمة 1، أية قيم ل n أو ل (x, y) تُنتج الثلاثية الفيثاغورية 6, 8, 10.



أجبية

قرّروا دون استعمال الآلة الحاسبة هل 3333 , 4444 , 5555 هي ثلاثية فيثاغورية؟