

3.3 نفكر قبل أن نحلّ



حلّ ضياء المعادلة التالية $2 = \frac{x^2 - 25}{25 - x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 25}{25 - x^2} &= 2 / \cdot (25 - x^2) \\ x^2 - 25 &= 50 - 2x^2 \\ 3x^2 &= 75 \\ x^2 &= 25 \\ x &= 5 , -5 \end{aligned}$$

قال ضياء: يوجد حلان للمعادلة.

حلّ ضياء غير صحيح. اشرحوا لماذا؟ ما هو الحلّ الصحيح للمعادلة؟ هل استطعتم أن تجدوا الحلّ دون أن تحلّوا المعادلة؟ اشرحوا.

نفكر قبل أن نلمس القلم، ونجد الحلّ بطريقة ناجعة.

الحلّ دون استعمال القلم

1. حلّوا المعادلات التالية شفويًا.

أ. $\frac{x^2 - 4}{4 - x^2} = 4$	ب. $\frac{x^2 - 4}{4 - x^2} = -1$	ج. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1$	د. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 0$
ت. $\frac{x^2 - 4}{4 - x^2} = 0$	ح. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 2$	خ. $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 0$	د. $\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 0$

2. سجّلوا، إذا كان الأمر ممكنًا، عددًا في المكان الفارغ في المعادلة $\frac{1 - x^2}{x^2 - 1} = \text{_____}$ بحيث:

أ. يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول.

ب. يكون للمعادلة حلان.

ت. يكون للمعادلة حل واحد.

ث. لا يكون حل للمعادلة.

3. سجّلوا، إذا كان الأمر ممكنًا، عددًا في المكان الفارغ في المعادلة $\frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \text{_____}$ بحيث:

أ. يكون للمعادلة عدد لا نهائي من الحلول.

ب. يكون للمعادلة حلان.

ت. يكون للمعادلة حل واحد.

ث. لا يكون حل للمعادلة.



زاوية الحاسوب

4. أ. ارسموا الخطّين البيانيّين للدالتين $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-1}$ و $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
ب. جدوا علاقة بين الخطّين البيانيّين وإجاباتكم للمهمّتين 2 و 3.

5. حلّت حراء المعادلات الخمس المسجّلة أدناه.
افحصوا حلّها وحدّدوا: صحيح أو غير صحيح.

معادلة	حلّ حراء
$\frac{a^2-9}{a^2+9} = 3$	أ. لا يوجد حلّ للمعادلة. الشرح: البسط أصغر من المقام دائماً؛ لذا يجب أن يكون الكسر أصغر من 1.
$\frac{a^2-9}{a^2+9} = 0$	ب. الحلّ هو $a = 3$ أو $a = -3$ الشرح: الكسر يساوي صفراً إذا كان البسط يساوي صفراً فقط.
$\frac{a^2-9}{a^2+9} = -1$	ت. لا يوجد حلّ للمعادلة. الشرح: الكسر يساوي -1 إذا كان البسط والمقام متضادّين، والتعابير المعطاة ليست كذلك.
$\frac{a^2-9}{a^2+9} = -3$	ث. لا يوجد حلّ للمعادلة. الشرح: المقام أكبر من 9 أو يساويه. القيمة الصغرى للبسط هي -9؛ لذا لا يمكن أن تكون قيمة الكسر -3.
$\frac{a^2-9}{a^2+9} = a^2-9$	ج. لا يوجد حلّ للمعادلة. الشرح: يمكن أن نسجّل معادلة كالتالي: $\frac{a^2-9}{a^2+9} = \frac{a^2-9}{1}$ الكسران المتساويان اللذان يوجد لهما البسط نفسه، يجب أن يكون لهما المقام نفسه، لكن $a^2+9 \neq 1$ لكل عدد a .

خطوط بيانيّة "مثقوبة"

6. معطاة دالة $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-3}$.

أ. أكملوا الجدول التالي في دفاتركم.

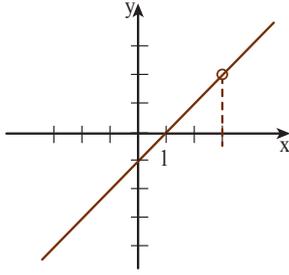
x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

ب. خَمّنوا كيف يبدو الخطّ البيانيّ للدالة؟

ت. ارسموا كي تفحصوا.

ث. ماذا يحدث، حسب رأيكم، للخطّ البيانيّ في النقطة التي فيها $x = 3$ ؟

ج. هل كان بالإمكان أن نخمّن كيف يبدو الخطّ البيانيّ دون إكمال الجدول؟ اشرحوا.



هنالك دوال مجال تعريفها لا يشمل جميع الأعداد. مثلاً: الدالة

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$$

غير معرفة لـ $x = 3$.

تقع جميع النقاط الأخرى للدالة على المستقيم $y = x - 1$ ؛

لذا الخطّ البيانيّ للدالة مماثل للخطّ البيانيّ للمستقيم $y = x - 1$ ، باستثناء النقطة التي فيها $x = 3$ ، لأنّ الدالة غير معرفة فيها، وينتج "ثُقب" في الخطّ البيانيّ.

7. تمعّنوا في الدوال التالية، وقرّروا هل خطّها البيانيّ هو مستقيم أم قطع مكافئ (باستثناء النقاط المنفردة).

أ. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$

ت. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$

ب. $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

ث. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x + 1}$

ج. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$



د. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$

هـ. $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$



نحافظ على لياقة رياضية

1. سجّلوا التعابير الجبرية للدوال في المهمة 7 كتعابير تساوي 0 ، وحلّوا المعادلات الناتجة. افحصوا حلولكم بواسطة التعويض.
2. أ. ارسموا رسمة تقريبية للخط البياني لكل دالة في المهمة 7.
ب. افحصوا إجاباتكم بواسطة رسم خطوط بيانية بواسطة الحاسوب.
ت. هل يتطرق الحاسوب إلى "الثقوب" (هذا يعني أنه يتطرق إلى النقاط المنفردة التي تكون فيها الدالة غير معرفة)؟



هل تعلمون؟



كان جيرولمو كاردانو (في اللغة الإيطالية: Girolamo Cardano; 1501-1576) فيلسوفًا، طبيبًا، عالم فلك ومخترع إيطالي، لكنه اشتهر في موضوع الرياضيات. استعملت أعماله في الجبر كقاعدة لهذا المجال. وجد كاردانو طريقة لحل معادلات من الدرجة الثالثة، ومعادلات من الدرجة الرابعة. معرفته للأعداد السالبة (التي لم تكن شائعة في أوروبا في تلك الفترة) ساعدته بذلك كثيرًا. نشر كاردانو أكثر من 100 كتاب في المجالات المختلفة.

كانت حياته الشخصية تعيسة، وعلى الرغم من الاحترام المهني الكبير الذي ناله، إلا أنه واجهته خيبات أمل في زواجه ومع أولاده. ترك عمله العلمي مدة زمنية طويلة بسبب إدمانه للمراهنة، لكنّه طوّر خلال ذلك أسس نظرية الاحتمال التي نشرها في كتابه "كتاب الحظ والألعاب".



أجبية

يوجد معي ورقة قياساتها 10 سم × 10 سم.
هل أستطيع، حسب رأيكم، أن أصنع "ثقب" في الورقة، بحيث أستطيع أن أدخل رأسي عبر الورقة؟