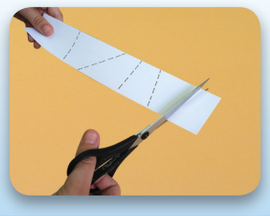
الوحدة الثامنةعشرة: شبه المنحرف

الدرس الأوّل: صفات شبه المنحرف



قصّوا بخطوط أشرطة من ورق مستطيلة الشكل.
ما الأشكال التي حصلتم عليها؟ ما المشترك لجميع الأشكال؟

نتعرّف على أنواع أشباه منحرف ونتعلّم عن صفاتها.

نتطرّق في المهمّتين 1 وَ 2 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. هل يمكن أن نقصّ شريطًا مِن ورق كما يظهر في الرسمة أعلاه والحصول على:
مستطيل؟ معيّن؟ مربّع؟ متوازي أضلاع؟ أشكال أخرى؟
ب. ما المشترك لجميع الأشكال التي حصلتم عليها؟

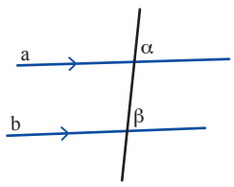
تعريف: نسمّي الشكل الرباعيّ الذي فيه زوج واحد فقط مِنَ الأضلاع المتوازية **"شبه منحرف"**.

نسمّي الأضلاع المتوازية **"قاعدتيْ شبه المنحرف"**.
نسمّي الأضلاع غير المتوازية **"ساقيْ شبه المنحرف"**.

2. أ. هل جميع الأشكال التي قمتم بقصّها هي أشباه منحرف؟ اشرحوا.
ب. هل هنالك أشباه منحرف خاصّة بين الأشباه المنحرف التي قمتم بقصّها؟

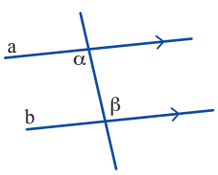
للتذكير

معطى مستقيمان ومستقيم ثالث يتقاطع معها.



- إذا كان المستقيمان **متوازيين** فإنّ الزوايا **المتناظرة** متساوية بالمقدار.

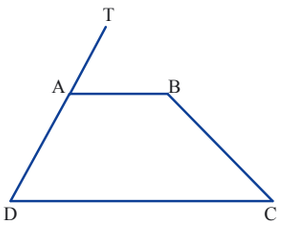
مثال: المستقيمان a وَ b، في الرسمة، متوازيان، لذا α وَ β متساويتان بالمقدار.
هذا يعني أنّه: إذا كان a || b
فإنّ α = β



- إذا كان المستقيمان **متوازيين** فإنّ الزوايا **المتبادلة** متساوية بالمقدار.

مثال: المستقيمان a وَ b، في الرسمة، متوازيان، لذا α وَ β متساويتان بالمقدار.
هذا يعني أنّه: إذا كان a || b
فإنّ α = β

3. معطى ABCD شبه منحرف (AB || DC)



المعطيات حول مقدار الزاويتين ∢B وَ ∢D، في كلّ بند، مختلفة.

أ. معطى ∢D = 80° ∢B = 115°

احسبوا مقدار الزوايا: ∢TAB, ∢DAB, ∢C

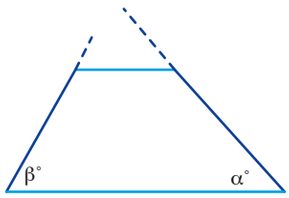
ب. معطى ∢D = 70° ∢B = 120°

احسبوا مقدار الزوايا: ∢TAB, ∢DAB, ∢C

ت. عبّروا عن مقدار الزاويتين الأُخريتين في شبه المنحرف بمساعدة α أو β.

هل مجموع مقدار كلّ زاويتين متجاورتين في شبه المنحرف 180°؟

صوغوا القاعدة التي وجدتموها.

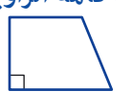


في شبه المنحرف مجموع زوج من الزوايا **إلى جانب الساق** نفسه هو 180°.

مجموع زوج من الزوايا **إلى جانب القاعدة** نفسها لا يساوي 180°.

للتذكير

- نسمّي شبه المنحرف الذي فيه زاوية قائمة **شبه منحرف قائمة الزاوية**.



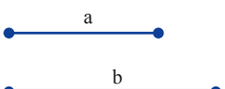
- نسمّي شبه المنحرف الذي فيه ساقان متساويان **شبه منحرف متساوي الساقين**.

4. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "بناء شبه منحرف حسب قاعدتيه " "בניית טרפז לפי בסיסיו". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

5. معطى القطعتان a وَ b.

ابنوا بمساعدة مسطرة وفرجار شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه a وطول القاعدة الأخرى كطول b.

صفوا البناء.



كم شبه منحرف كهذا وجدتم؟

هل يمكن أن يكون شبه المنحرف متساوي الساقين؟

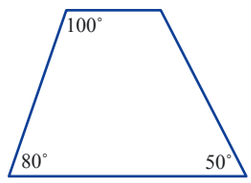
هل يمكن أن يكون شبه المنحرف قائم الزاوية؟

6. أ. هل هنالك شبه منحرف مقعّر؟ إذا كانت الإجابة نعم فارسموا. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.
ب. هل يمكن أن يكون شبه المنحرف دالتون؟ إذا كانت الإجابة نعم فارسموا. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا السبب.

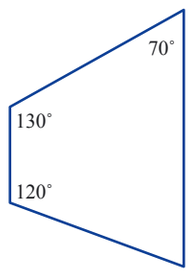
7. أ. كم زاوية °90 يوجد في شبه منحرف قائم الزاوية؟ اشرحوا.
ب. هل الشكل الذي فيه زاويتان قائمتان هو شبه منحرف قائم الزاوية بالضرورة؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

8. أمامكم أشكال رباعيّة، أي منها أشباه منحرف؟ اشرحوا.

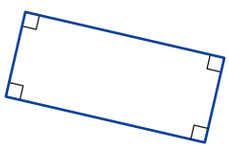
أ.



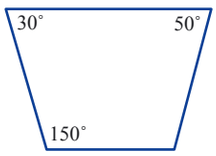
ب.



ت.



ث.



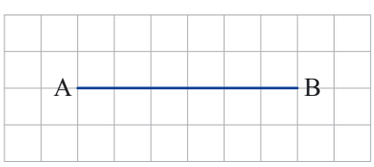
الكلمة شبه منحرف باللغة اليونانيّة "طربيز" وهي مكوّنة مِنَ الكلمتين طرَ (أربعة) بيزا (أرجل). استعمل الرياضيّ اليونانيّ أقليدس اسمَ طربيز (باليونانيّة trapézion) لكلّ شكل لوحة طاولة.

تُستعمل كلمة طربيز Trapeza في دول المنطقة كاسم لطاولة صغيرة للقهوة. مصدر هذه التسمية يونانيّة وقد وصلت المنطقة بواسطة الأتراك.

طربيز هو اسم جهاز رياضة أيضًا. الطربيز مكوّن من حبلين ينزلان مِنَ السقف ويوجد بينهما قضيب مشدود. ينفّذ البهلوان في السيرك ألعاب بهلوانيّة على الطربيز. يرمز الاسم طربيز إلى شكل رباعيّ ينتج مِن حبلين، مِن قضيب مرتبط بهما ومِن مقطع السقف الذي يثبت الجهاز.

مجموعة مهامّ

1. ارسموا على ورقة مقسّمة إلى تربيعات:
أ. شبه منحرف قائم الزاوية بحيث تكون القطعة AB قاعدته الكبرى.
ب. شبه منحرف قائم الزاوية بحيث تكون القطعة AB ساقه.
ت. شبه منحرف متساوي الساقين بحيث تكون القطعة AB قاعدته الكبرى.



2. انسخوا على ورقة مقسمة إلى تربيعات، أكملوا كلّ رسمة إلى شبه منحرف بحيث تكون القطعة المرسومة:

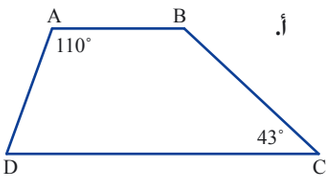
أ. قاعدة كبرى

ب. قاعدة صغرى

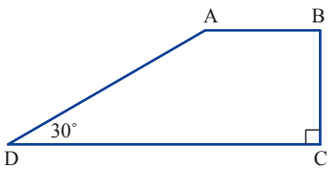
ت. ساق

3. أمامكم أشباه منحرف (AB || DC). احسبوا مقدار الزوايا الأخرى.

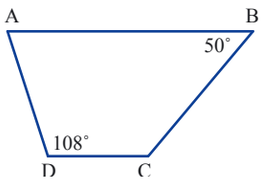
أ.



ب.

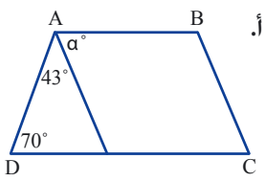


ت.

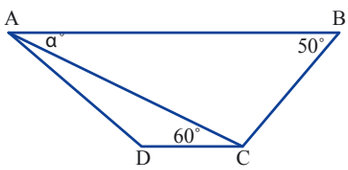


4. أمامكم أشباه منحرف (AB || DC).احسبوا مقدار الزاوية α في كلّ شبه منحرف.

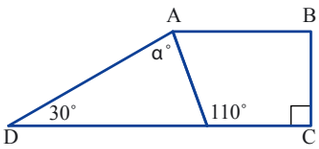
أ.



ب.

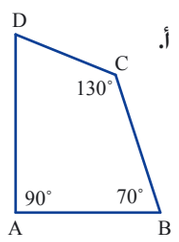


ت.

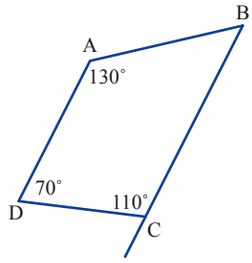


5. حدّدوا، في كلّ بند، هل الشكل الرباعيّ هو شبه منحرف؟ اشرحوا.

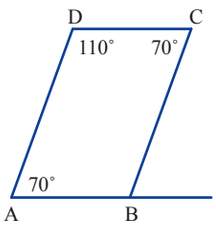
أ.



ب.

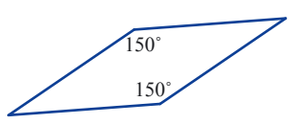


ت.

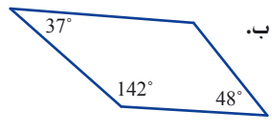


6. حدّدوا، في كلّ بند، هل الشكل الرباعيّ هو شبه منحرف؟ اشرحوا.

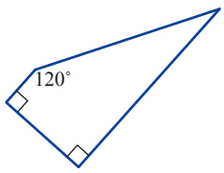
أ.



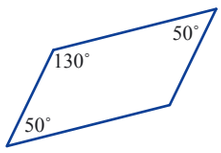
ب.



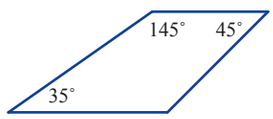
ج.



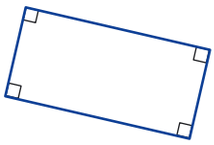
ت.



ث.

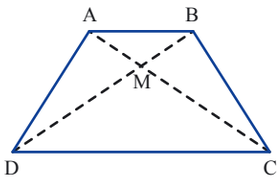


ح.



7. $\Delta ABM \sim \Delta CDM$

هل الشكل الرباعيّ ABCD هو شبه منحرف؟ اشرحوا.

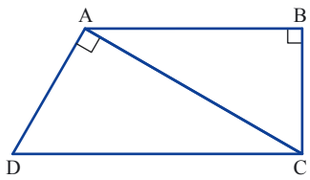


8. معطى ABCD شبه منحرف قائم الزاوية (AB || DC).

$AD \perp AC$

هل يتطابق المثلثان ΔACD وَ ΔACB ؟ اشرحوا.

سجّلوا ثلاثة مقادير متساوية في المثلثين.

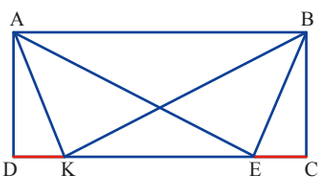


9. معطى ABCD مستطيل. $DK = CE$.

هل الشكل الرباعيّ ABEK هو شبه منحرف متساوي الساقين؟

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا.

إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا الإجابة.



10. معطى القطعة a، القطعة b والزاوية α.

ابنوا بمساعدة مسطرة وفرجار:

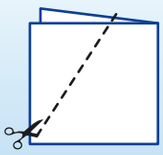
شبه منحرف إحدى قاعدتيه a ، طول الساق b والزاوية بين القاعدة a والساق b هي α.

صفوا البناء.

كم شبه منحرف كهذا يوجد؟ اشرحوا.

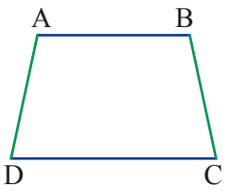
الدرس الثاني: شبه منحرف متساوي الساقين

اطووا ورقة، قصّوا من طرفها مثلّث قائم الزاوية (انظروا الرسمة).
ما الشكل الرباعيّ الذي نتج؟
اطووا الشكل الرباعيّ الذي حصلتم عليه حسب خطّ الطيّ.
ما صفات الشكل الرباعيّ الذي حصلتم عليه؟



نفحص صفات الزويا والأقطار في أشباه المنحرف المتساوية الساقين.

1. نتطرّق إلى الشكل الرباعيّ الذي وَرَدَ في مهمّة الافتتاحيّة.

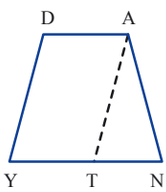


أ. اكتبوا بالكلمات صفات زوايا الشكل الرباعيّ.
ب. استعينوا بالرسمةوسجّلوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.
ت. برهنوا النظريّة.

2. أ. هل الشكل الرباعيّ الذي فيه زوج منَ الزوايا المتساوية بالمقدار هو شبه منحرف متساوي الساقين بالضرورة؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا.إذا كانَت الإجابة لا فارسموا مثالاً مضادًّا.
ب. هل الشكل الرباعيّ الذي فيه زوج من الأضلاع المتساوية بالطول هو شبه منحرف متساوي الساقين بالضرورة؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا.إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالاً مضادًّا.

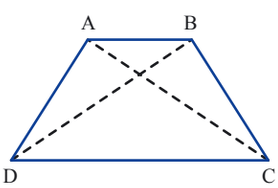
نظريّة: إذا كان شبه المنحرف متساوي الساقين فإنّ الزاويتين اللتين تقعان إلى جانب القاعدة نفسها متساويتان بالمقدار.
نظريّة عكسيّة: إذا كانت في شبه المنحرف الزاويتين إلى جانب القاعدة نفسها متساوية بالمقدار فإنّ شبه المنحرف متساوي الساقين.

3. معطى DANY شبه منحرف متساوي الساقين (DA || YN)
AT || DY
ما نوع المثلّث ΔATN؟ برهنوا.



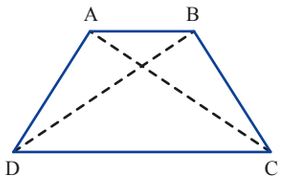
القطران في شبه المنحرف متساوي الساقين

4. أ. خمّنوا ما صفات الأقطار في شبه المنحرف المتساوي الساقين؟



ب. هل يتطابق المثلثان ΔADC وَ ΔBCD؟
إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. وإذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.
ت. ماذا يمكن الاستنتاج مِن تطابق المثلّثات؟
ث. صوغوا النظريّة التي برهنتموها.

5. **معطى** ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AB || DC)



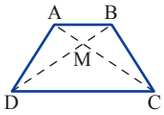
انسخوا الرسمة وارمزوا بالحرف M إلى نقطة التقاء القطرين.

أ. **برهنوا:** المثلثان ΔABM وَ ΔCDM هما مثلثان متطابقان.

ب. هل تُنتج الأقطار مثلّثات متشابهة في كلّ شبه منحرف؟ برهنوا.

نظريّة: إذا كان شبه المنحرف متساوي الساقين فإنّ القطرين متساويان بالطول.

نظريّة عكسيّة: إذا كان القطران متساويين بالطول فإنّ شبه المنحرف متساوي الساقين.



يمكن أن نبرهن النظرية بطرق مختلفة.

أمامكم برهان لقراءة ذاتية.

معطى ABCD شبه منحرف (AB || DC)

$AC = BD$

المطلوب برهانه $AD = BC$

برهان

$\Delta CDM \sim \Delta ABM$ (برهناه في مهمّة 5)

$$\Downarrow$$

$$\frac{CM}{AM} = \frac{DM}{BM}$$

$$\frac{CM}{AM} + 1 = \frac{DM}{BM} + 1$$

$$\frac{CM + AM}{AM} = \frac{DM + BM}{BM}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BD}{BM}$$

$AC = BD$ (معطى)

$$\Downarrow$$

$AM = BM$

$$\Downarrow$$

$CM = DM$ (الفرق بين قطع متساوية في الطول)

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle DMA = \sphericalangle CMB$ (الزوايا المتقابلة بالرأس متساوية)

$$\Downarrow$$

$\Delta DMA \cong \Delta CMB$ (حسب ضلع، زاوية، ضلع)

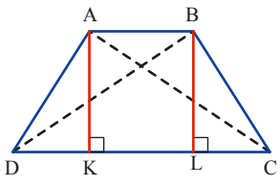
$$\Downarrow$$

$AD = BC$

6. معطى ABCD شبه منحرف (AB || DC)

AC = BD

المطلوب برهانه AD = BC



اقترحت **مريم** أن تبني **بناء مساعد** كالتالي:

نرسم ارتفاعيْ شبه المنحرف AK وَ BL (انظروا الرسمة).

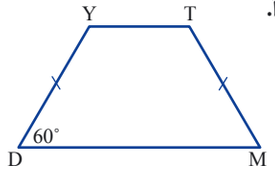
نبيّن أنّ ΔBLD ≅ ΔAKC ⇐ ∢BDL = ∢ACK

أكملوا برهان **مريم** وبيّنوا أنّ AD = BC.

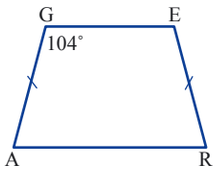
مجموعة مهامّ

1. أمامكم شبها منحرف متساويي الساقين. احسبوا مقدار زوايا شبه المنحرف.

أ.

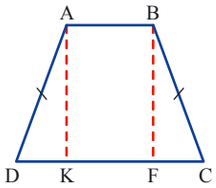


ب.



2. أ. معطى ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AD = BC, AB || DC)

AK هما BF ارتفاعان في شبه المنحرف.



إلى أي أشكال قُسّم شبه المنحرف؟ هل تتطابق المثلّثات التي تظهر في الرسمة؟

ب. معطى ABCD شبه منحرف قائم الزاوية (∢D = 90°, AB || DC)

إذا رسمنا ارتفاعًا في شبه المنحرف فإلى أيّ أشكال يُقسّم شبه المنحرف؟

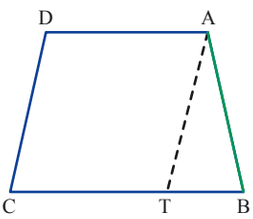
ارسموا رسمة مناسبة.

3. معطى ABCD شبه منحرف.

AT || DC

ΔATB متساوي الساقين (AT = AB)

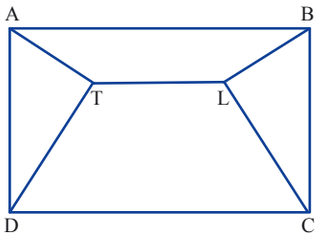
المطلوب برهانه ABCD شبه منحرف متساوي الساقين.



4. معطى ABCD مستطيل.

TLCD شبه منحرف متساوي الساقين (TL || DC)

المطلوب برهانه ABLT شبه منحرف متساوي الساقين.



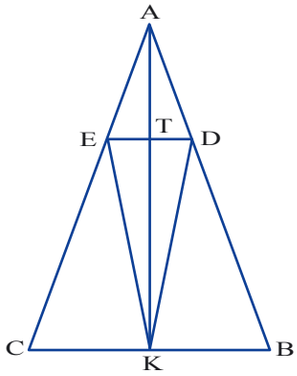
5. معطى ΔABC متساوي الساقين (AB = AC)

ΔAED متساوي الساقين (AE = AD)

AK ينصّف الزاوية ∢CAB

المطلوب برهانه أ. الشكل الرباعيّ ADKE هو دالتون.

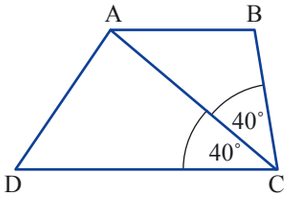
ب. الشكل الرباعيّ CBDE هو شبه منحرف متساوي الساقين.



6. أمامكم رسمة شبه منحرف فيه القطر AC ينصّف الزاوية ∢C.

أ. احسبوا مقادير زوايا المثلّث ΔACB.

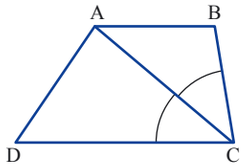
ب. ما نوع المثلّث ΔACB؟ اشرحوا.



7. **ادّعاء:** إذا كان القطر، في شبه المنحرف، منصّفًا لإحدى الزوايا فإنّه ينتج مثلّث متساوي الساقين.

أ. اكتبوا المعطيات والمطلوب برهانه.

ب. برهنوا.

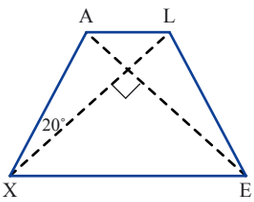


8. معطى ALEX شبه منحرف متساوي الساقين (AL || XE)

∢AXL = 20°

القطران متعامدان.

احسبوا مقدار زوايا شبه المنحرف حسب معطيات الرسمة.



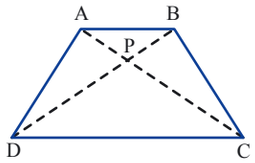
9. معطى ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AB || DC)

PD = PC

$\sphericalangle DAC = 60^\circ, \sphericalangle ADB = 20^\circ$

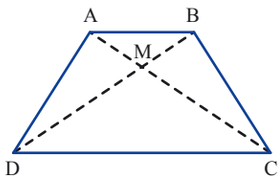
احسبوا مقدار زوايا شبه المنحرف حسب المعطيات.

اشرحوا الطريقة الحسابيّة.



10. يلتقي القطران في شبه المنحرف ABCD (AB || DC) في النقطة M وهما ينتجان مثلثات متساوية الساقين: ΔAMB, ΔCMD.

برهنوا: شبه المنحرف متساوي الساقين.



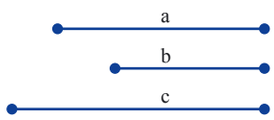
11. معطى القطعة a. a

ابنوا، بمساعدة مسطرة وفرجار، شبه منحرف متساوي الساقين طولا قُطريه a.

صفوا البناء.

كم شبه منحرف كهذا يوجد؟ اشرحوا.

12. معطى القطعة a، القطعة b والقطعة c.



ابنوا، بمساعدة مسطرة وفرجار، شبه منحرف متساوي الساقين طولا قاعدتيه a وَ b وطول قُطره c.

صفوا البناء.

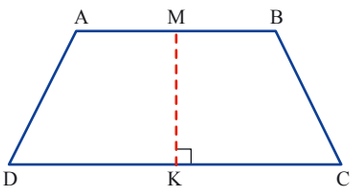
13. معطى ABCD شبه منحرف.

M منتصف الضلع AB

K منتصف الضلع DC

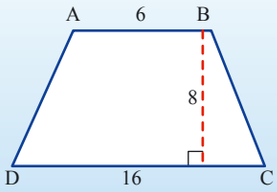
$MK \perp DC$

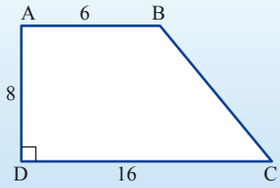
المطلوب برهانه ABCD شبه منحرف متساوي الساقين.

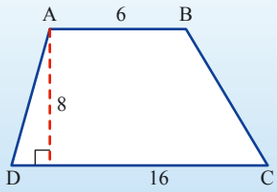


الدرس الثالث: مساحة ومحيط شبه المنحرف

أمامكم رسومات ثلاثة أشباه منحرف.







احسبوا مساحة كلّ شبه منحرف.

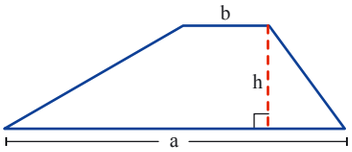
نحسب مساحة ومحيط شبه المنحرف.

أُعِدّت الرسومات في مهامّ الدرس وفي مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

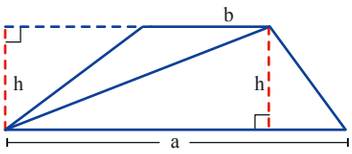
1. بيّنا في الصفّ السابع بمساعدة أمثلة أنّ مساحة شبه المنحرف تساوي نِصف حاصل ضرب مجموع القاعدتين في الارتفاع.

$$S=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$$

طول القاعدة الكبرى a، طول القاعدة الصغرى b، طول الارتفاع h.
(وحدات طول h, b, a, a > 0 , b > 0, h > 0)

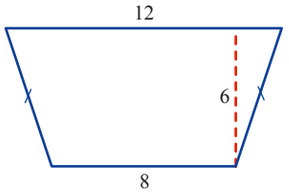


برهنوا الادّعاء، استعينوا بحساب مساحات المثلّثات في الرسمة.

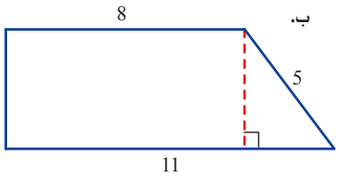


2. احسبوا، في كلّ بند، مساحة ومحيط شبه المنحرف.

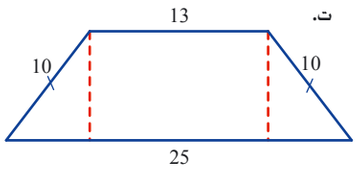
أ.



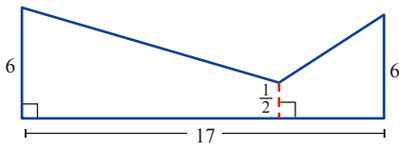
ب.



ت.



3. احسبوا مساحة الشكل التالي.



4. أمامكم رسمة طاولة شكلها شبه منحرف متساوي الساقين، وفيه طول القاعدة الصغرى يساوي طول الساق، وطول القاعدة الكبرى ضعفي طول القاعدة الصغرى.

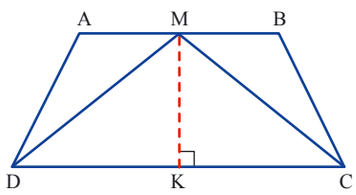
أ. ارسموا شبه المنحرف.

ب. ما مقدار زوايا شبه المنحرف؟

ت. لماذا يُنتجون، حسب رأيكم، أشكالاً بهذه الصورة؟

ث. معطى أيضًا أنّ طول الساق 80 سم.
جدوا مساحة ومحيط سطح الطاولة.

5. معطى ABCD شبه منحرف.
M منتصف القاعدة الصغرى، K منتصف القاعدة الكبرى، $MK \perp DC$



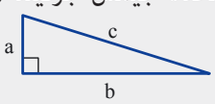
المطلوب برهانه أ. $DM = CM$

ب. معطى أيضًا أنّ مساحة ΔMKC ضعفي مساحة ΔMBC.
كم ضعفًا طول القاعدة الكبرى أكبر مِن طول القاعدة الصغرى؟
احسبوا مساحة شبه المنحرف إذا كان معلومًا أنّ مساحة ΔMBC هي 5 سنتمترات مربّعة.

نُشرت براهين كثيرة حول نظريّة فيثاغوروس. حظيت هذه النظريّة الرياضيّة بأكبر عدد مِنَ البراهين مقارنة بنظريّات رياضيّة أخرى. يمكنكم أن تجدوا في الإنترنت مئات البراهين المختلفة لنظريّة فيثاغوروس.

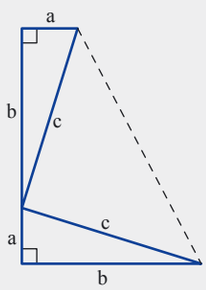
نبرهن نظريّة فيثاغوروس مِن جديد بمساعدة مساحة شبه منحرف قائم الزاوية.
سجّل هذه النظرية الرئيس الـ 20 للولايات المتّحدة جيمس جرفيلد (Garfield).

أ. معطى مثلّث قائم الزاوية.



سجّلوا المعطى والمطلوب برهانه.

ب. نضع مثلّثين قائمي الزاوية متطابقين ونربط بين رأسيهما كالتالي:



ما نوع المثلّث الناتج بين المثلّثين؟ برهنوا.
ما الشكل الرباعيّ الناتج مِنَ المثلّثات الثلاثة؟ برهنوا.

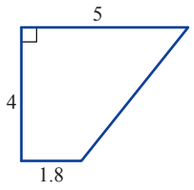
ت. احسبوا مساحة شبه المنحرف بطريقتين:
(1) حسب قاعدة مساحة شبه المنحرف.
(2) حسب مجموع مساحة المثلّثات الثلاثة التي تكوّن شبه المنحرف.

ث. قارنوا بين الطريقتين الحسابيتين اللتين سجلتموهما لحساب المساحة.
بسّطوا المعادلات التي حصلتم عليها.
هل برهنتم نظريّة فيثاغوروس؟

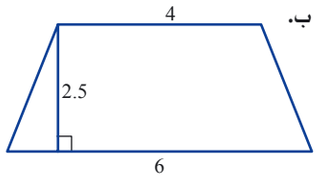
مجموعة مهامّ

1. احسبوا، في كلّ بند، مساحة شبه المنحرف.

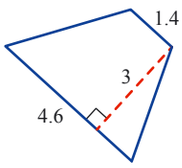
أ.



ب.

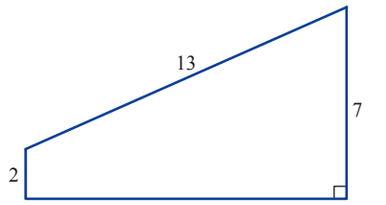


ت.

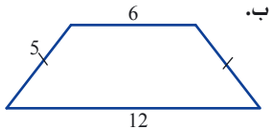


2. احسبوا، في كلّ بند، مساحة شبه المنحرف ومحيطه.

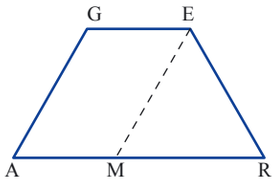
أ.



ب.



3. معطى الشكل الرباعيّ GERA هو شبه منحرف متساوي الساقين (GE || AR).
$\measuredangle A = 60^\circ$, GA || EM



أ. احسبوا مقدار زوايا شبه المنحرف ومقدار زوايا المثلّث.

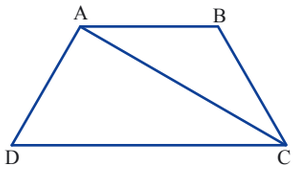
ب. معطى أيضًا: GA = 6 سم, GE = 4 سم

احسبوا محيط شبه المنحرف.

4. معطى ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AB || DC, BC = AD)

AC ينصّف الزاوية $\measuredangle C$,

DA = 10 سم, DC = 22 سم



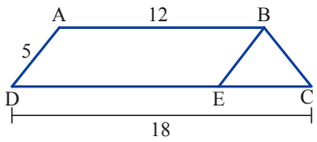
أ. احسبوا محيط شبه المنحرف.

ب. احسبوا مساحة شبه المنحرف.

5. معطى ABCD شبه منحرف متساوي الساقين (AB || DC).

مثلّث BCE متساوي الساقين فيه:

طول القاعدة 6 سم وطول كلّ ساق 5 سم.



أ. احسبوا مساحة المثلّث.

ب. احسبوا مساحة شبه المنحرف.

ت. كم ضعفًا مساحة شبه المنحرف أكبر مِن مساحة المثلّث؟

ث. هل يمكن أن نُدخل، إلى شبه المنحرف، عددًا صحيحًا مِنَ المثلّثات كالمثلّث المعطى؟ اشرحوا.