3.2 معادلات تربيعيّة

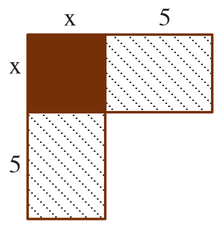
كان الخوارزميُّ عالمًا رياضيًّا عربيًّا، وقد عاش في القرن التاسع عشر ميلاديّ.
وهو معروف كأحد المساهمين في بناء أسس الجبر.
يصف الخوارزمي في كتابه طريقة مثيرة الاهتمام حول كيفيّة حلّ المعادلة التربيعيّة.
مثال على ذلك، حلّ الخوارزمي المعادلة $x^2 + 10x = 39$.

نتابع طريقة حلّ الخوارزمي، ونحلّ معادلات بطرق مختلفة.

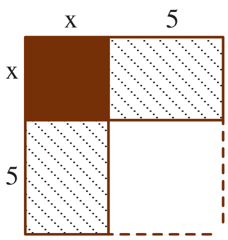
حلّ معادلة في أعقاب الخوارزمي

1. حلّوا المعادلة $x^2 + 10x = 39$ بجميع الطرق الّتي تعرفونها.

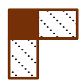
2. الطريقة الهندسيّة التالية لحلّ المعادلة $x^2 + 10x = 39$ مكافئة لإحدى طرق حلّ الخوارزمي. تابعوها وحاولوا فهمها.



- ارسموا مربّعًا طول ضلعه x (المربّع الكامل).
- أضيفوا مستطيلين، في كِلا طرفي المربّع (المستطيلان المتقطعان)، طول أحد أضلاع كلّ واحد منهما 5 وحدات.



- أكملوا الرسمة إلى مربّع بمساعدة إضافة مربّع (المربّع الفارغ).

أ. مساحة الشكل  تساوي 39. اشرحوا.

ب. عبّروا عن مساحة المربّع الكامل  بطريقتين، وسجّلوا معادلة مناسبة.

ت. هل حلّ المعادلة حسب الطريقة الهندسيّة للخوارزمي يساوي حلّ المعادلة الّذي وجدتموه في المهمّة 1؟

3. جدوا بطريقة الخوارزمي الحلّ الموجب للمعادلة $x^2 + 12x = 160$.

هل تعلمون؟

اسم الكتاب الّذي يصف فيه الخوارزمي طرق حلّ المعادلة هو **"الجبر والمقابلة"**. استعمل الخوارزمي كلمة "الجبر" كي يصف عمليّة نقل الحدود من طرف إلى آخر، واستعمل كلمة المقابلة لوصف عمليّة تجميع الحدود.

تمّ اشتقاق اسم مجال الجبر، في الرياضيات، الذي نعرفه اليوم ويتناول حل المعادلات أيضًا من كلمة "الجبر".

لم يستعمل الخوارزمي الأعداد السالبة؛ لذا كانت طريقة الحلّ الموصوفة أعلاه مناسبة.

حلّ معادلات بواسطة الاعتبارات

4. حلّوا المعادلة الأولى، في كلّ رباعيّة، بواسطة الإكمال إلى مربّع.
حلّوا سائر المعادلات.

أ. $x^2 - 2x = 8$

$(4x)^2 - 2(4x) = 8$

$(\frac{1}{2}x)^2 - x = 8$

$(x-1)^2 - 2(x-1) = 8$

ب. $x^2 - x = 12$

$(4x)^2 - 4x = 12$

$(\frac{1}{x})^2 - \frac{1}{x} = 12$

$(2x-1)^2 - 2x + 1 = 12$

ت. $x^2 - 8x = -16$

$(4x)^2 - 8(4x) = -16$

$(x^2)^2 - 8x^2 = -16$

$(x-3)^2 - 8(x-3) = -16$

ث. $x^2 - 10x = -9$

$(4x)^2 - 10(4x) = -9$

$(9x^2)^2 - 90x^2 = -9$

$(\frac{x}{x-1})^2 - 10(\frac{x}{x-1}) = -9$

5. حلّوا المعادلة الأولى، في كلّ رباعيّة، بواسطة التحليل إلى عوامل.
حلّوا سائر المعادلات.

أ. $x^2 - 5x + 6 = 0$

$(\frac{x}{2})^2 - 5(\frac{x}{2}) + 6 = 0$

$(x^2+2)^2 - 5(x^2+2) + 6 = 0$

$(\frac{1}{x-1})^2 - \frac{5}{x-1} + 6 = 0$

ت. $x^2 - 10x + 9 = 0$

$(9x)^2 - 10(9x) + 9 = 0$

$(-x^2+1)^2 - 10(-x^2+1) + 9 = 0$

$(\frac{1}{x^2})^2 - \frac{10}{x^2} + 9 = 0$

ب. $x^2 - 23x - 50 = 0$

$(x^2)^2 - 23x^2 - 50 = 0$

$\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - 23\left(\frac{1}{x^2}\right) - 50 = 0$

$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 23\left(\frac{1}{x}\right) - 50 = 0$

ث. $x^2 - 5x = 14$

$(7x)^2 - 5(7x) = 14$

$(x^2 - 3)^2 - 5(x^2 - 3) = 14$

$\left(\frac{x}{x-6}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x-6}\right) = 14$

حلّ معادلات بواسطة تعويض متغيّر جديد

6. أ. حاولوا أن تحلّوا المعادلة التالية كمعادلة تربيعيّة.

$$(x^2 + 1)^2 - 36(x^2 + 1) + 260 = 0$$

إرشاد: عوّضوا z بدلًا من $x^2 + 1$.

ب. حاولوا أن تحلّوا المعادلة التالية كمعادلة تربيعيّة.

$$\frac{3}{x^2 - 1} + 2 = x^2 - 1$$

إرشاد: عوّضوا z بدلًا من $x^2 - 1$.

7. أ. اكتبوا معادلة تربيعيّة لا يوجد لها حلّ.

ب. اكتبوا معادلة تربيعيّة يوجد لها حلّ واحد.

ت. اكتبوا معادلة تربيعيّة يوجد لها حلّان.

ث. اكتبوا معادلة تربيعيّة حلها هما عددان سالبان.

ج. اكتبوا معادلة تربيعية أحد حلولها موجب والحلّ الآخر سالب.

ح. اكتبوا معادلة لها أربعة حلول.

زاوية الحاسوب

8. معطاة الدوال.

$f(x) = (x+1)^2 + 2$ $\qquad$ $h(x) = -(x-4)^2 + 3$

$g(x) = (x-1)(x-3)$ $\qquad$ $p(x) = -0.5(x+1)^2 + 8$

I. ارسموا الخطوط البيانيّة للدوال بواسطة الحاسوب.

II. حلّوا بطريقة بيانيّة المعادلات التالية:

أ. $(x+1)^2 + 2 = (x-1)(x-3)$

ب. $-0.5(x+1)^2 + 8 = (x-1)(x-3)$

ت. $-(x-4)^2 + 3 = (x-1)(x-3)$

III. كم حلًّا يوجد للمعادلة $-(x-4)^2 + 3 = -0.5(x+1)^2 + 8$؟ ما هي؟

IV. اكتبوا معادلة إضافية بواسطة الدوال المعطاة، بحيث تكون حلولها أعدادًا صحيحة، وحلّوها.

V. اكتبوا معادلة لا يوجد لها حلّ بواسطة الدوال المعطاة.

أحجية

عُمري ضعفيْ حاصل ضرب الرقمين اللّذين يكوّنانه.

كم هو عمري؟