



الوحدة الثالثة: عمليات جبرية

3.1 فرق المربعات

أمامكم أربعة أمثلة لفرق مربعات لأعداد متتالية:

$$3^2 - 2^2 = 5$$

$$6^2 - 5^2 = 11$$

$$11^2 - 10^2 = 21$$

$$14^2 - 13^2 = 27$$

- جدوا مثالين إضافيين لفرق مربعات بين أعداد متتالية.
- استنتجوا استنتاجاً بالنسبة لفرق مربعات أعداد متتالية. انتبهوا للعلاقة بين الأعداد والنتيجة.

نبحث الفرق بين مربعات مختلفة.

فرق مربعات أعداد متتالية

- أ. برهنوا الاستنتاج الذي استنتجتموه في بداية الفعالية.
ب. معطاة قائمة أعداد: 7 8 24 27 126 327 323 1124
افحصوا، في كل حالة، هل يمكن كتابة العدد كفرق مربع بين عددين متتالين؟
إذا كانت الإجابة نعم، فسجلوها بهذا الشكل.
إذا كانت الإجابة لا، فاشرحوا.

فرق مربعات أعداد الفرق بينها 2 أو أكثر

2. أمامكم أمثلة لفرق مربعات أعداد

فرق مربعات أعداد الفرق بينها 2

$$6^2 - 4^2 = 20$$

أ. سجلوا، في دفاتركم، أربعة أمثلة إضافية لكل عمود.

ب. استنتجوا استنتاجاً بالنسبة لفرق مربعات أعداد الفرق بينها 2 وبالنسبة لفرق مربعات أعداد الفرق بينها 3. انتبهوا للعلاقة بين الأعداد والنتيجة.

ت. برهنوا استنتاجاتكم.

ث. خمنوا دون حسابات ماذا يمكن أن يكون الفرق بين مربعات أعداد الفرق بينها 6، مثلاً: $18^2 - 12^2$.
اشرحوا على ماذا يعتمد تخمينكم؟

ج. احسبوا شفوياً: $23^2 - 22^2$, $23^2 - 21^2$, $23^2 - 20^2$, $23^2 - 19^2$

استنتاجات إضافية حول فرق مربعات أعداد متتالية

3. برهنوا بخمس طرق مختلفة أن فرق مربعات الأعداد المتتالية هو زوجي دائماً.
أ. بمساعدة اعتبارات زوجية وفردية.

ب. بمساعدة القانون $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ وباعتبارات زوجية وفردية.

ت. بطريقة جبرية بمساعدة القانون $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

ث. بطريقة جبرية بمساعدة القانون $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

ج. بمساعدة متواليات النقاط التالية:



4. يمكن أن نكتب كل عدد فردي كفرق بين مربع عددين متتاليين.

معطى عدد فردي، مثلاً: 47. بينوا طريقة لإيجاد الأعداد المتتالية التي الفرق بين مربعها هو 47 (أو كل عدد فردي آخر).

فرق مربعات عددين معينين

5. أ. في أي حالات الفرق بين مربعات أعداد هو فردي؟ وفي أي حالات هو زوجي؟

ب. أكملوا جدول كهذا في دفاتركم، وسجلوا الكلمات زوجي، فردي.

		b	
		زوجي	فردية
a	زوجي	$a^2 - b^2$	
	فردية		

6. برهنوا أنه إذا كان هناك عدداً زوجيان أو فرديان، فإن فرق المربعات بينها من مضاعفات العدد 4.

7. ما هي الأعداد التي لا يمكن التعبير عنها كفرق بين مربعين؟ اشرحوا لماذا؟

8. أمامكم أعداد، أي منها لا يمكن كتابتها كفرق بين مربعين؟

23 24 25 26 50 51 60

عدد كفرق مربعات بطرق مختلفة

9. برهنوا أن كل عدد أولي (باستثناء العدد 2) يمكن كتابته كفرق مربع عددين طبيعيين بطريقة واحدة فقط - كفرق مربع عددين متتاليين.

10. أ. بكم طريقة مختلفة يمكنكم كتابة العدد 36 كفرق مربعات أعداد؟
ب. بكم طريقة مختلفة يمكنكم كتابة العدد 30 كفرق مربعات أعداد؟
ت. بكم طريقة مختلفة يمكنكم كتابة العدد 21 كفرق مربعات أعداد؟
ث. بكم طريقة مختلفة يمكنكم كتابة العدد 120 كفرق مربعات أعداد؟
هل تستطيعون أن تبرهنوا أنكم وجدتم جميع الطرق؟



11. حضروا جدولاً في برمجية إكسل (*Excel*) كجدول ضرب العملية $a^2 - b^2$ بالطريقة التالية.
أ. حوّلوا خلايا الجدول كمربعات.

ب. سجّلوا كعنوان في الخلية A1 العملية $a^2 - b^2$.

ت. سجّلوا، في العمود الأيسر، أعداداً متتالية من 0 حتى 12. هذا العمود يمثّل a .

ث. سجّلوا، في السطر العلوي، أعداداً متتالية من 0 حتى 12. هذا العمود يمثّل b .

ج. سجّلوا، في الخلية B2 القانون: $=A2^2 - B1^2$. هذا القانون يمثّل القاعدة $a^2 - b^2$.

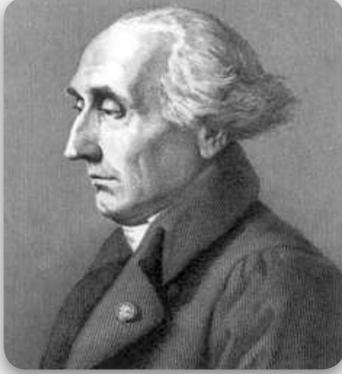
ح. جرّوا القانون على طول العمود، وجرّوا بعد ذلك كل العمود على طول الأسطر.

يمثّل العدد في كل خلية العملية $a^2 - b^2$ بين العدد a في العمود الأيسر والعدد b في السطر العلوي (كما هو الأمر في جدول الضرب).

خ. امحوا الأعداد السالبة من الجدول.

12. أ. أين نجد، في الجدول، أعداداً هي فرق مربعات أعداد متساوية، فرق مربعات أعداد متتالية، فرق مربعات أعداد الفرق بينها 2؟

ب. جدوا، في الجدول، الظواهر التي وجدتموها في بحثكم.



تتناول نظريات كثيرة، في مجال نظرية الأعداد، مربعات أعداد صحيحة. إحدى هذه النظريات هي النظرية المفاجئة المسماة "نظرية المربعات الأربعة، إذ تدعي هذه النظرية أن كل عدد طبيعي يمكن كتابته كمجموع أربعة مربعات أعداد صحيحة. برهن هذه النظرية جوزف لويس لجرانج سنة 1770 (Joseph-Louis Lagrange 1736-1813). كان لجرانج عالم رياضيات وعالمًا فلكيًا إيطاليًا، وقد انتقل للعيش في فرنسا وبروسيا. كان ملك بروسيا، فريديخ الثاني، راعيًا للجرانج لمدة 20 سنة. وقد سُمي الملك لجرانج "كبير الرياضيين في أوروبا".



نحافظ على لياقة رياضية

1. أمامكم جزء من الامتحان الذي حلّه أمير، وقد طلب منه أن يبسط التعبيرات الجبرية إذا كان الأمر ممكنًا. استعمل أمير طريقة الحلّ الخاطئ نفسها في جميع التمارين.

$$\text{أ. } \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2 \quad \text{ت. } \frac{x^2 + 16}{x - 4} = x - 4$$

$$\text{ب. } \frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3 \quad \text{ث. } \frac{x^2 + 25}{x + 5} = x + 5$$

- هل تستطيعون أن تكتشفوا طريقة حلّ أمير الخاطئ؟
- في أيّ تمارين حصل أمير على نتيجة صحيحة على الرغم من طريقة حلّه؟

2. سجّلوا مجال التعويض واختزلوا إذا كان الأمر ممكنًا.

$$\text{أ. } \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad \text{ج. } \frac{x^3 - x}{x - 1} \quad \text{د. } \frac{x^4 - x^2}{x - 1}$$

$$\text{ب. } \frac{x^2 - x}{x + 1} \quad \text{ح. } \frac{x^3 - x}{x} \quad \text{ر. } \frac{x^4 - x^2}{x + 1}$$

$$\text{ت. } \frac{x^2 - x}{x - 1} \quad \text{خ. } \frac{x^3 - x}{x + 1} \quad \text{ز. } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{ث. } \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{د. } \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} \quad \text{س. } \frac{x^4 - x^2}{x^2 + x}$$

3. بعد أن حصل أمير (أمير من المهمة السابقة) على الامتحان قال: إذا كانت عملية جمع أو طرح في بسط أو مقام كسر، فممنوع الاختزال. هل قول أمير صحيح؟



نضع مربعين متساويين، الواحد على الآخر، بحيث يكون أحد رؤوس المربع العلوي في مركز المربع السفلي.

أي قسم من المربع السفلي مغطى بواسطة المربع العلوي؟

