الوحدة الثانية عشرة: تعاريف، نظريّات وبراهين

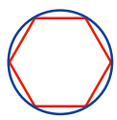
الدرس الأوّل: مصطلحات وتعريفات

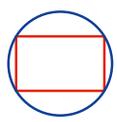
عرّفنا في الماضي مصطلحات كثيرة:
زوايا متجاورة، زوايا متقابلة بالرأس، تطابق مضلّعات، تشابه مثلّثات وغير ذلك.

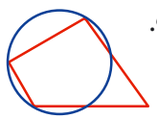
نتناول السؤال ما التعريف؟ وكيف نعرّف مصطلحًا في الرياضيّات؟

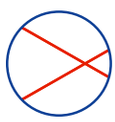
ما التعريف؟

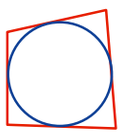
1. لعرض ما التعريف، نخترع مصطلحًا غير معروف في الرياضيّات ونعرّفه.
التعريف: "محصورون" هو مضلّع جميع رؤوسه تقع على محيط الدائرة.
- على أيّ مصطلحات يعتمد هذا التعريف؟
- حدّدوا هل كلّ شكل مِنَ الأشكال التالية هو "محصورون"؟

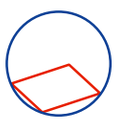
أ.


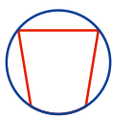
ب.


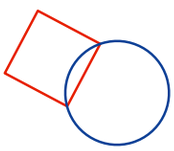
ت.


ث.


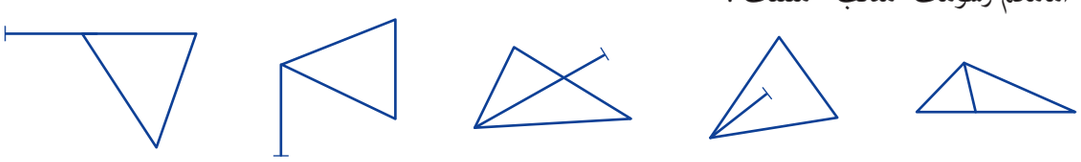
ج.


ح.


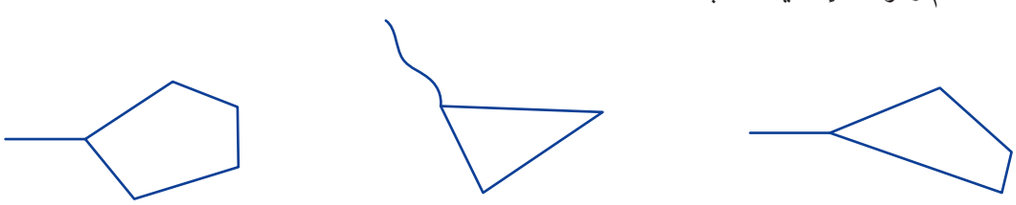
خ.


د.


2. أمامكم رسومات "مذنّب - مثلّثات".



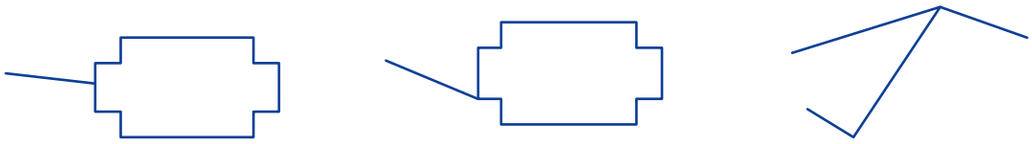
أ. حاولوا أن تعرفوا "مذنّب - مثلّثات".
ب. أمامكم رسومات إضافيّة لمذنّب - مثلّثات.



حاولوا أن تصوغوا تعريفًا مناسبًا لهذه الرسومات أيضًا.

3. نتطرّق إلى المصطلح "مذنّب - مثلّث" الذي عرفتموه في مهمّة 2.

أ. أمامكم رسومات إضافيّة. أيّ منها مناسب للتعريف الذي سجّلتموه؟



ب. هل يمكن أن نعرّف "مذنّب - مثلّث" بواسطة الرسومات؟ اشرحوا.

يصف **التعريف مصطلحًا جديدًا** بالكلمات بناءً على **مصطلحات سابقة**. يعرّف الرياضيون مصطلحًا جديدًا بواسطة **عدد قليل، قدر الإمكان**، مِنَ المصطلحات السابقة التي يمكن أن تُعرّف المصطلح.

عندما نعرّف بناءً على رسومات فقط نحصل على تعريفات مختلفة.

لذا، لا يمكن تعريف مصطلحات بناء على رسومات فقط.

كيف نعرّف؟

4. اشرحوا لماذا العبارة المسجّلة ليست تعريف للمصطلح؟

أ. الزاوية القائمة هي زاوية مجاورة للزاوية القائمة.

ب. الزاوية المنفرجة ليست زاوية قائمة.

ت. المربّع هو شكل رباعيّ جميع أضلاعه متساوية.

5. أ. وصفنا **الزاوية** في الماضي كالتالي: **الشعاعان** اللذان يخرجان **مِن نقطة** واحدة يُنتجان **زاوية**.
على أي مصطلحات يعتمد وصف الزاوية؟

ب. يمكن أن نَصف **شعاع** كالتالي: نسمّي الجزء من **مستقيم** الذي يبدأ مِن نقطة **"شعاع"**.
على أي مصطلحات يعتمد تعريف **الشعاع**؟

ت. حاولت **روان** أن تعرّف المستقيم كالتالي: المستقيم هو خطٌ لا نهائيّ. لا يوجد له سُمك وهو متواصل.
ارسموا خطًّا مناسبًا لوصف **روان** وليس مستقيمًا.

نعرّف مصطلحات بواسطة مصطلحات تمّ تعريفها في الماضي.

يجب أن تبدأ هذه السلسلة **بمصطلحات أوّليّة** لا تعتمد على مصطلحات عُرّفت في السابق ونقبلها دون تعريف.

مثال: النقطة والمستقيم هما **مصطلحان أوّليّان**.

هنالك مَن يعتقد أنّ الكلمة **تعريف** مشتقة مِنَ الكلمة معرفة، هذا يعني أنّ تعريف مصطلح جديد يحتوي على معرفة ويتمّ تعريفه بواسطة مصطلحات معروفة.

6. حدّدوا هل كلّ ما سُجِّل، في كلّ بند، يمكن أن يعرّف المربّع؟ اشرحوا.

أ. الشكل المبنيّ مِن أربع قطع متساوية بالطول.

ب. شكل رباعيّ جميع زواياه متساوية.

ت. شكل رباعيّ جميع زواياه قائمة.

ث. شكل رباعيّ جميع أضلاعه متساوية في الطول وجميع زواياه متساوية.

ج. شكل رباعيّ يقسّمه القطر إلى مثلّثين قائمي الزاوية متطابقين.

مجموعة مهامّ

1. سجّلوا تعريفًا لكلّ شكل.

أ. مثلّث متساوي الساقين.

ب. منصّف الزاوية.

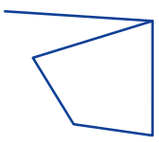
ت. ارتفاع في المثلّث.

ث. زوايا متبادلة بين مستقيمين ومستقيم ثالث يتقاطع معهما.

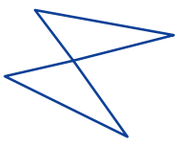
2. عرّفوا الشكل الرباعيّ.

أمامكم أشكال، حدّدوا أي منها مناسبة للتعريف الذي سجّلتموه؟

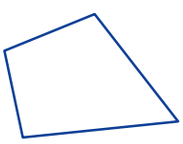
أ.

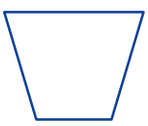
ت. 

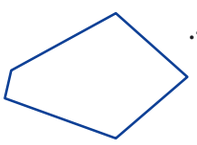
ج.

خ. 

ب.

ث. 

ح. 

د. 

3. أشيروا إلى الادّعاءات الصحيحة واشرحوا.

أ. التعريف هو وصف مصطلح جديد بمساعدة مصطلحات سابقة.

ب. عندما نعرّف مصطلحًا لا نستعمل المصطلح نفسه.

ت. يمكن أن تُستعمل رسومات أمثلة كتعريف للشكل.

ث. عندما نعرّف مجموعة مِنَ الأشكال لا نستعمل الأشكال التي تحقّق التعريف ولا تنتمي إلى مجموعة الأشكال.

ج. عندما نعرّف مجموعة مِنَ الأشكال لا نستعمل الأشكال التي لا تحقّق التعريف وتنتمي إلى مجموعة الأشكال.

4. حدّدوا هل كلّ ما سُجِّل، في كلّ بند، يمكن أن يعرّف المستطيل؟ اشرحوا.

أ. شكل رباعيّ ثلاث مِن زواياه قائمة.

ب. شكل رباعيّ ثلاث مِن زواياه متساوية.

ت. شكل رباعيّ جميع زواياه متساوية.

ث. شكل رباعيّ أضلاعه المتقابلة متوازية.

ج. شكل رباعيّ يقسّمه القطر إلى مثلّثين قائمي الزاوية متطابقين.

5. اشرحوا لماذا المسجّل في كلّ بند لا يُعتبر تعريفًا للمصطلح المشدد.

أ. **الزوايا المُكملة** هي زوايا لها ساق مُشترك.

ب. **الزوايا المتقابلة بالرأس** هي زوايا لها رأس مُشترك.

ت. **الزاوية الخارجيّة** للمثلّث هي زاوية أحد ساقيها هو ضلع في المثلّث.

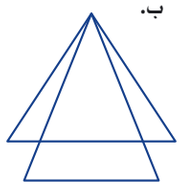
ث. **المتوسّط في المثلّث** هو قطعة تنصّف أحد أضلاع المثلّث.

6. صحّحوا تعاريف المصطلحات التي وردت في مهمّة 5.

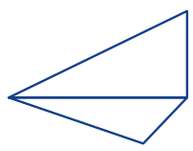
7. تعريف: نسمّي الشكل المبنيّ مِن مثلّثين لهما نقطة واحدة مشتركة فقط "**ثنائي-ثلاث**".
أيّ أشكال هي ثنائي - ثلاث؟

أ.

ب.



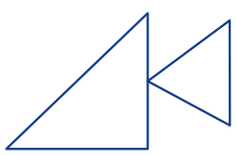
ت.



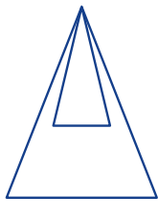
ث.

ج.

ح.

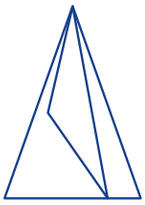


خ.



د.

ذ.



ر.

الدرس الثاني: ما النظريّة في الرياضيّات؟

صوغنا نظريّات خلال تعلُّم الهندسة (نظريّات تطابق، نظريّة التشابه وغير ذلك)، لكن
لم نتناول حتّى الآن ما النظريّة في الرياضيّات؟
افحصوا، في كلّ بند، هل يمكن أن نسأل: "صحيح" أو "غير صحيح"؟
أ. مجموع زوايا الشكل الرباعيّ هو 360°.
ب. كتاب هندسة للصفّ التاسع.
ت. عدد الأقطار في المضلّع يساوي عدد أضلاعه.

نتناول السؤال ما نظريّة في الرياضيّات، ونميّز بين نظريّة في الرياضيّات ونظريّة في الحياة اليوميّة.

ما النظريّة؟

1. حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن أن نسأل لكلّ تعبير: "صحيح" أو "غير صحيح".

أ. عندما يهطل مطر توجد غيوم في السماء.
ب. جميع زوايا المثلّث متساوية بالمقدار.
ت. يوجد في الشكل الخماسيّ 5 أقطار.
ث. الرياضيّات المدمجة الصفّ التاسع الجزء الأوّل.
ج. ما مجموع الزوايا في الشكل الرباعيّ؟
ح. مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

- الادّعاء في الرياضيّات مبنيّ مِن **معطيات واستنتاج**؛ لذا يمكن أن نسأل ما إذا كان الادّعاء "صحيح" أو "غير صحيح، هذا يعني أن نسأل، هل ينتج الاستنتاج مِنَ المعطيات أم لا ينتج منها؟
- يمكن أن نصوغ كلّ ادّعاء في الرياضيّات بواسطة الكلمتين "إذا - فإنّ" وهما تفصلان بين المعطيات والاستنتاج.
  مثال: إذا كان المضلع شكلًا خماسيًّا **فإنّ** عدد أقطاره يساوي عدد أضلاعه.
- نسمّي الادّعاء الصحيح **نظريّة**.

2. صوغوا بمساعدة "إذا - فإنّ" الادّعاءات التي وردت في المهمّة 1 (الادّعاءات التي يمكن أن نسأل عنها "صحيح" أو "غير صحيح").

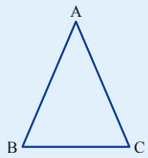
معطيات واستنتاجات

3. ارسموا وسجّلوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

مثال: إذا كان المثلّث متساوي الساقين فإنّ زاويتا القاعدة متساويتان.

معطى AB = AC

استنتاج BB = BC



أ. إذا كانت الزاوية A منفرجة في المثلّث ABC فإنّ الزاويتين الأُخريتان حادّتان.
ب. إذا كانت زوايا المثلّث الثلاث متساوية فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

4. افحصوا هل ينتج الاستنتاج مِنَ المعطيات؟ اشرحوا.

أ. **معطى** دعاء أقصر مِن رائدة.
نعيم أقصر مِن دعاء.
استنتاج نعيم أقصر مِن رائدة.

ب. **معطى** يوسف أقصر مِن داوود.
رائدة أقصر مِن داوود.
استنتاج رائدة أقصر مِن يوسف.

ت. **معطى** يتقاطع المستقيم a مع المستقيم b.
يتقاطع المستقيم b مع المستقيم c .
استنتاج يتقاطع المستقيم c مع المستقيم a.

5. افحصوا هل ينتج الاستنتاج مِنَ المعطيات؟
إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا. إذا كانت الإجابة لا فاعطوا مثالًا مضادًّا (المثال المضادّ هو مثال لا يتحقّق فيه الاستنتاج على الرغم مِن أنّ المعطيات تتحقّق).

أ. إذا قسمنا زاوية حادّة إلى زاويتين متساويتين في المقدار فإنّ كلّ واحدة منهما أصغر من 45°.

ب. إذا كانت في المثلّث زاويتين حادّتين فإنّ الزاوية الثالثة منفرجة.

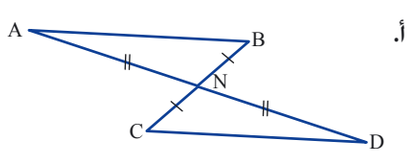
ت. الزاوية المكملة للزاوية الحادّة هي زاوية منفرجة.

للتذكير:

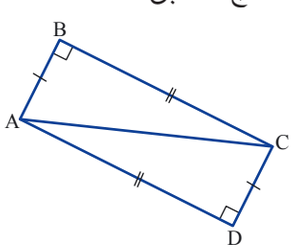
- **تطابق حسب ضلع، زاوية، ضلع:** إذا كان هناك ضلعان في مثلّث واحد متساويين مع ضلعين في مثلث آخر، وأيضًا **الزّاوية المحصورة** بين الضّلعين متساوية في هذين المثلّثين، فإن المثلّثين متطابقان (تطابق حسب ض. ز. ض).
- **تطابق حسب زاوية، ضلع، زاوية:** إذا كانت هناك زاويتان في مثلّث واحد مساويتين لزاويتين في مثلّث آخر، وأيضًا إذا كان الضّلعان اللّذان يقعان بين هذه الزّوايا متساويين في هذين المثلّثين فإن المثلّثين متطابقان (تطابق حسب ز.ض.ز)
- **تطابق حسب ضلع، ضلع، ضلع:** إذا كانت ثلاثة أضلاع في مثلّث واحد تساوي ثلاثة أضلاع في مثلّث آخر يتطابق المثلّثان. (تطابق حسب ض. ض. ض).
- **تطابق حسب قائم ووتر:** إذا تساوى القائم والوتر في مثلثين قائمي الزاوية على التناظر فإنّ المثلثين متطابقان.

6. يمكن أن نستنتج، في كلّ بند، مِنَ المعطيات أنّ المثلّثين متطابقان.
اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واذكروا بناءً على أيّ نظريّة يمكن استنتاج التطابق.

أ.



ب.



7. ارسموا، في كلّ بند، وصوغوا الادّعاء بمساعدة "إذا - فإنّ"، اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واشرحوا لماذا الادّعاء صحيح؟

أ. في المثلّث المتساوي الساقين، زاويتا القاعدة متساوية.

ب. في المثلّث المتساوي الساقين، المتوسّط للقاعدة ينصّف زاوية الرأس.

مجموعة مهامّ

1. صوغوا الادّعاءات التالية بواسطة "إذا - فإنّ".

أ. عندما يكون حارًا يجب أن نشرب كثيرًا.

ب. إذا لا يوجد كرة لا نستطيع أن نلعب كرة قدم.

ت. يهطل مطر في الشتاء.

ث. كل الأطفال الذين سنهم أكثر مِن 6 سنوات يجب أن يذهبوا إلى المدرسة.

ج. التلميذ الذي لا يحضّر وظائفه البيتيّة في الرياضيّات يفشل في الامتحان.

ح. المثلّث الذي توجد فيه زاويتان حادّتان هو مثلّث حادّ الزوايا.

2. افحصوا هل ينتج الاستنتاج مِنَ المعطيات؟

إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا. إذا كانت الإجابة لا فاعطوا مثالًا مضادًّا (المثال المضادّ يبيّن أنّ الادّعاء غير صحيح)

أ. إذا كان مجموع الزاويتين 180° فإنّ الزاويتين مكملتان.

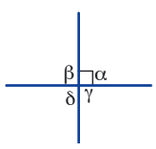
ب. إذا كانت الزوايا ذات رأس مشترك متساوية في المقدار فإنّها زوايا متقابلة بالرأس.

ت. إذا قسّمنا زاوية منفرجة إلى ثلاث زوايا متساوية في المقدار فإنّ كلّ واحدة منهن أصغر من 60° وأكبر من 30°.

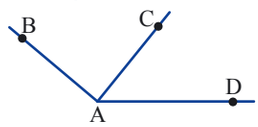
ث. إذا كانت الزوايا ذات رأس مشترك مختلفة في المقدار فإنّها زوايا غير متقابلة بالرأس.

3. اكتبوا، في كلّ بند، المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واشرحوا لماذا النظريّة صحيحة؟

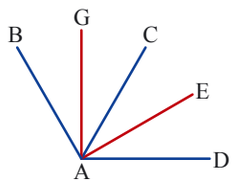
أ. إذا كانت إحدى الزوايا بين مستقيمين متقاطعين زاوية قائمة فإنّ الزوايا الثلاث الأخرى قائمة.



ب. إذا كان AC ينصّف الزاوية المنفرجة ∢BAD
فإنّ الزاوية ∢CAD أكبر من 45°.



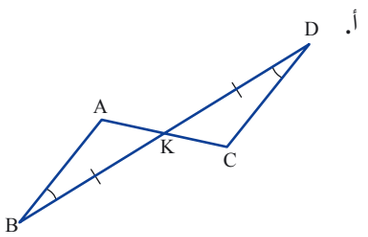
ت. إذا كان AC ينصّف الزاوية المنفرجة ∢BAD,
AE ينصّف الزاوية ∢CAD وَ AG ينصّف الزاوية ∢BAC
فإنّ الزاوية ∢GAE هي زاوية حادّة.



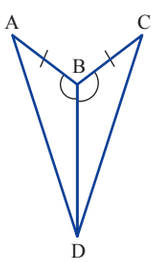
4. يمكن أن نستنتج، في كلّ بند، مِنَ المعطيات أنّ المثلّثين متطابقان.

اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واذكروا بناءً على أيّ نظريّة يمكن استنتاج التطابق.

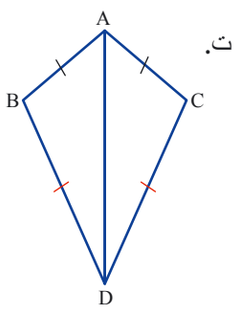
أ.



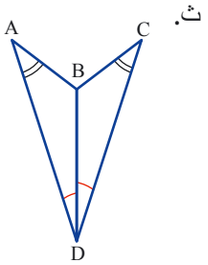
ب.



ت.



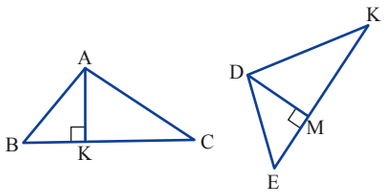
ث.



5. اكتبوا، في كلّ بند، المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واشرحوا لماذا النظريّة صحيحة؟

أ. إذا كان المثلثان متطابقين فإنّ طولي الارتفاعين للضلعين المتناظرين متساويان.

ب. إذا كان المثلّثان متطابقين فإنّ مساحتيهما متساوية.



6. ارسموا، في كلّ بند، وصوغوا الادّعاء بمساعدة "إذا - فإنّ"، اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة واشرحوا لماذا الادّعاء صحيح؟

أ. في المثلّث المتساوي الساقين، الارتفاع للقاعدة ينصف زاوية الرأس.

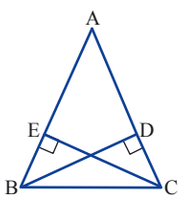
ب. في المثلّث المتساوي الساقين، الارتفاع للقاعدة هو متوسّط أيضًا.

7. BD وَ CE هما ارتفاعان للساقين في المثلّث المتساوي الساقين ABC.

أ. اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. اشرحوا لماذا $\Delta DCB \cong \Delta EBC$؟

ت. اشرحوا لماذا $\Delta ACE \cong \Delta ABD$؟



8. معطى أنّ جميع القطط التي اسمها "**سودوي**" هي سوداء.

أ. قطّة نريمان سوداء. هل يمكن الاستنتاج مِنَ المعطى أنّ اسمها "**سودوي**"؟

ب. قطّة رحيمة ليست سوداء. هل يمكن الاستنتاج مِنَ المعطى أنّ اسمها ليس "**سودوي**"؟

9. معطى أنّ الكلب الذي ينبح لا يعضّ. ومعطى أيضًا أنّ الكلب الشبعان لا ينبح.

أمامكم استنتاجات، أيّ استنتاج صحيح؟

أ. الكلب الشبعان لا يعضّ.

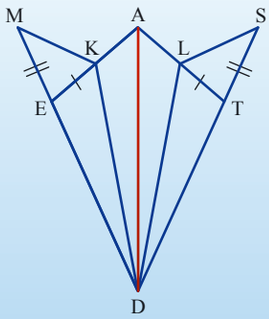
ب. الكلب الذي لا ينبح شبعان.

ت. الكلب الذي ينبح غير شبعان.

ث. الكلب الذي يعضّ غير شبعان.

الدرس الثالث: سلسلة براهين

معطى في الرسمة التي أمامكم أن AD ينصّف الزاوية A والزاوية KDL.
أشرنا إلى المعطيات الإضافيّة في الرسمة (أشرنا إلى القطع المتساوية بالطول بالإشارة نفسها).
كم زوجًا مِنَ المثلّثات المتطابقة يوجد في الرسمة؟

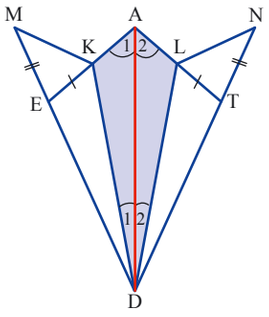


نميّز مثلّثات متطابقة، نبرهن ونستنتج استنتاجات.

نتطرّق في المهامّ 1 - 4 إلى الرسمة التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. اكتبوا بكتابة رياضيّة جميع أزواج المثلّثات المتطابقة التي وجدتموها: Δ_____ ≅ Δ_____
شدّدوا على تسجيل الرؤوس حسب التناظر.

2. انسخوا الرسمة.
AD ينصف الزاويتين A وَ D في الشكل الرباعيّ AKDL.
نبرهن أنّ المثلّث AKD يتطابق مع المثلّث ALD.



أ. انسخوا، وأكملوا المعطيات والاستنتاج.

معطى ∢A_1 = ∢_____

∢D_1 = ∢_____

المطلوب برهانه ΔAKD ≅ Δ_____

ب. انسخوا، أضيفوا مساواة في المكان المناسب وأكملوا البرهان.

الشرط	التعليل
∢A_1 = ∢A_2	معطى
_____	_____
_____	_____

⇓

_____ ΔAKD ≅ Δ_____ حسب نظرية _____

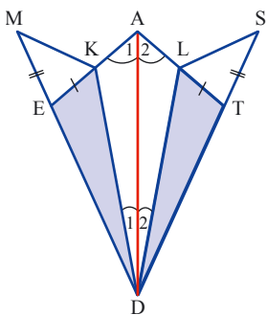
ت. استنتاج KD = LD
AK = AL علّلوا.

ث. هل وجدتم استنتاجًا إضافيًّا مِن تطابق المثلّثات؟ إذا كانت الإجابة نعم فما هو الاستنتاج؟

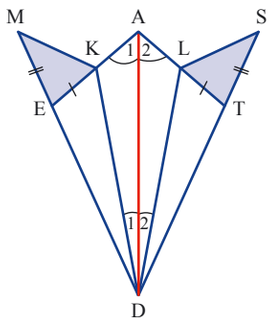
نسجّل عادةً البرهان كالتالي:

- نسجّل المعطيات.
- نسجّل المطلوب إثباته.
- نسجّل مراحل البرهان ونذكر، إلى جانب كلّ مرحلة، التعليلات التي تدعمها.
- نسجّل الاستنتاج ونعلّل.

3. أ. اكتبوا ثلاثة شروط تُبرهن أن $\Delta TLD \cong \Delta EKD$
(استعينوا بالاستنتاج مِنَ التطابق في المهمّة 2.)

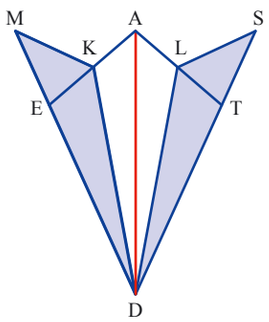


ب. **برهنوا أن:** $\Delta SLT \cong \Delta MKE$

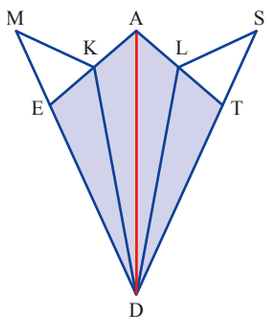


4. **برهنوا** تطابق أزواج مِنَ المثلّثات الإضافيّة.
(استعينوا باستنتاجات التطابق التي برهنتموها)

أ. $\Delta SLD \cong \Delta MKD$

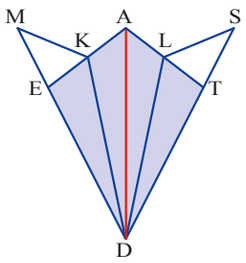


ب. $\Delta ATD \cong \Delta AED$



بنينا في المهامّ السابقة سلسلة مِنَ البراهين التي فيها كلّ برهان ابتداءً مِنَ البرهان الثاني يعتمد على استنتاجات مِنَ البراهين السابقة.

مثال: نبرهن تطابق المثلّثين ATD وَ AED مِنَ المهمّة 4.



الشرط	التعليل
$\measuredangle EAD = \measuredangle TAD$	معطى
$AD = AD$	ضلع مشترك في المثلّثين
$\measuredangle EDA = \measuredangle TDA$	معطى

$\Downarrow$

$\Delta ATD \cong \Delta AKD$ حسب نظريّة ز.ض.ز

فرضيات أساسيّة

نبني في الهندسة سلسلة نظريّات، ونبرهن فيها كلّ نظريّة بناءً على النظريّات والاستنتاجات السابقة.
نبدأ السلسلة من الفرضيّات التي لا توجد لها نظريّات سابقة. نسمّي هذه الفرضيات "**فرضيات أساسيّة**" (بديهيات).
استعملنا في الماضي هذه الفرضيّات على أنّها مفهومة ضمنًا دون أن نذكرها بوضوح.

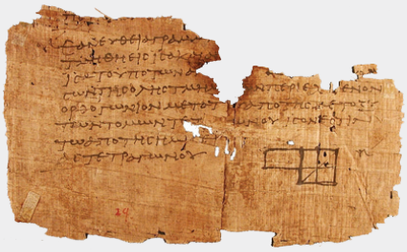
مثال: **بديهية:** يمرّ خطّ مستقيم واحد بين كلّ نقطتين.

5. **ادّعاء:** إذا كانت هناك ثلاث نقاط ليست على مستقيم واحد فإنّها رؤوس مثلّث **واحد**.
أ. برهنوا الادّعاء بناء على البديهيات في الإطار.
ب. انسخوا النقاط الأربع مرّتين، وارسموا شكلين رباعيّين مختلفين رؤوسهما A, B, C, D.

ت. قالت **سلوى:** إذا كانت هناك أربع نقاط، ومنها ثلاث نقاط ليست على مستقيم واحد فإنّها رؤوس شكل رباعيّ واحد. هل هذا الادّعاء صحيح؟ اشرحوا.

ث. كم شكلًا رباعيًّا مختلفًا يمكن أن نرسم بحيث تكون رؤوسها في النقاط الأربع المرسومة في بند ب؟

سُمي أُقليدس "أب الهندسة"، كان رياضيًّا يونانيًّا، عاش قبل حوالي 2,300 سنة وألّفَ سلسلة مِنَ الكتب عددها 13 كتابًا وسمّها "الأُسس".



لخص أُقليدس في هذه الكتب، أعدّ ورتّب المعرفة الرياضيّة التي تراكمت حتّى تلك الفترة في المجالات المتعلّقة بالهندسة وبصفات الأعداد.

كانت مساهمة أُقليدس الكبرى في تأسيس **المبنى الاستنتاجيّ** في الرياضيّات.

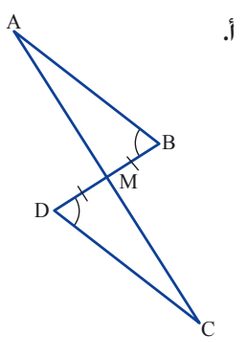
يعتمد المبنى الاستنتاجيّ على برهان ادّعاءات بواسطة ادّعاءات سابقة بُرهنت بواسطة ادّعاءات سبقتها، وهكذا دواليك حتّى البديهيات.

يتمّ توسيع المبنى الاستنتاجيّ بواسطة صياغة نظريّات تمّ التحقّق مِن أنّها صحيحة بناءً على المنظومة الأساسيّة وعلى النظريّات التي بُرهنت في الماضي.

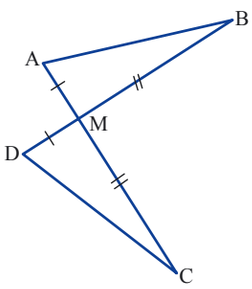
مجموعة مهامّ

1. أشرنا في كلّ رسمة إلى معطيات.
انسخوا الرسمة.
اكتبوا المعطيات بكتابة رياضيّة واكتبوا المطلوب إثباته.
برهنوا أنّ المثلّثات متطابقة.
اذكروا النظريّة التي يعتمد عليها الاستنتاج.

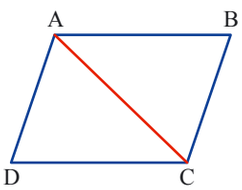
أ.



ب.



2. AC هو قُطر في الشكل الرباعيّ ABCD الذي جميع أضلاعه متساوية في الطول.

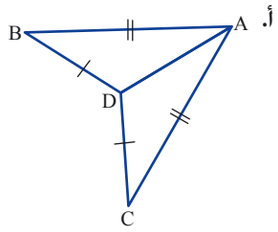


أ. اكتبوا المعطيات بكتابة رياضيّة.
برهنوا أنّ: $\Delta ADC \cong \Delta ABC$
علّلوا الاستنتاج: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle BAC$

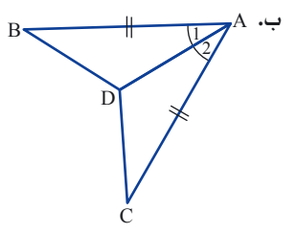
ب. ارسموا القطر BD وارمزوا إلى نقطة تقاطع القطرين بالحرف M.
برهنوا أنّ: $\Delta AMD \cong \Delta AMB$ (استعينوا ببرهانكم في بند أ)
برهنوا أنّ: $AM \perp BD$

3. المثلّثات الاتية متطابقة بحسب المعطيات المشار إليها في الرسمة.
اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.
اذكروا نظريّة التطابق التي يعتمد عليها الاستنتاج.

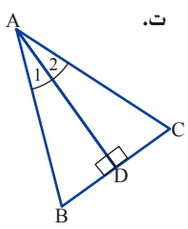
أ.



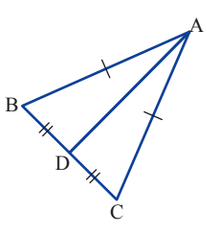
ب.



ت.



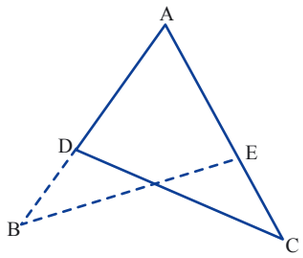
ث.



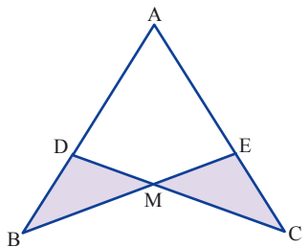
4. معطى $AB = AC$

$\measuredangle B = \measuredangle C$

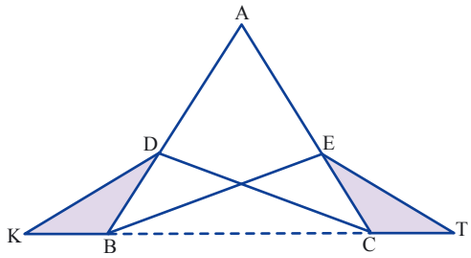
أ. **برهنوا أنّ:** $\Delta ABE \cong \Delta ACD$



ب. **برهنوا أنّ:** $\Delta EMC \cong \Delta DMB$
(استعينوا باستنتاجات التطابق التي برهنتموها في بند أ)



ت. ارسموا قطعتين متساويتين: $CT = BK$ (استعينوا بالرسمة)
برهنوا أنّ: $\Delta ECT \cong \Delta DBK$

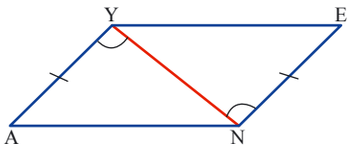


5. أشرنا إلى المعطيات في الشكل الرباعيّ YENA.
استنتاج المثلّثان متطابقان.

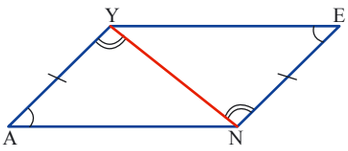
أ. اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. برهنوا التطابق.

ت. علّلوا، لماذا الزاوية $\measuredangle A$ تساوي الزاوية $\measuredangle E$؟



6. أشرنا إلى المعطيات في الشكل الرباعيّ YENA.



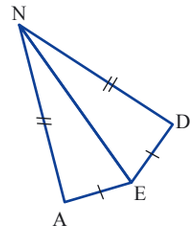
استنتاج المثلّثان متطابقان.

أ. اكتبوا المعطيات والاستنتاج بكتابة رياضيّة.

ب. برهنوا التطابق.

ت. سجّلوا استنتاجًا حول أزواج الأضلاع المتساوية بالطول في الشكل الرباعيّ YENA وعلّلوا.

7. يوجد في الشكل الرباعيّ EDNA زوجان مِنَ الأضلاع المتساوية الطول، كما هو مشار إليها في االرسمة.



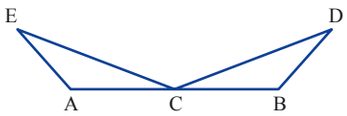
أ. اكتبوا المعطيات بكتابة رياضيّة.

ب. برهنوا أنّ $\Delta NDE \cong \Delta NAE$

ت. برهنوا أنّ NE ينصّف الزوايا المتقابلة في الشكل الرباعيّ.

8. أ. معطى $EA = DB$

$\measuredangle A = \measuredangle B$



انسخوا وأشيروا إلى المعطيات في الرسمة.

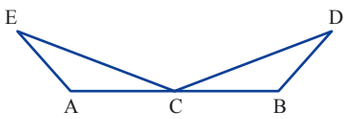
هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا فاعطوا مثالًا مضادًّا (المثال المضادّ هو مثال يبيّن أنّ المعطيات غير كافية).

ب. معطى $EA = DB$

$\measuredangle A = \measuredangle B$

C منتصف AB

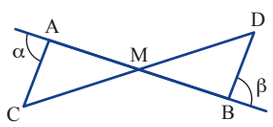


انسخوا وأشيروا إلى المعطيات في الرسمة.

هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا. إذا كانت الإجابة لا فاعطوا مثالًا مضادًّا.

9. معطى M منتصف القطعة AB.



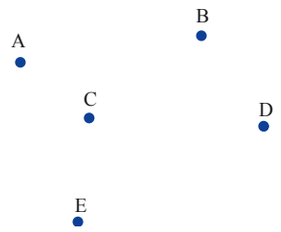
$\beta = \alpha$

برهنوا أنّ:

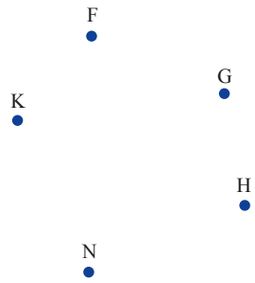
أ. $\Delta AMC \cong \Delta BMD$

ب. $MC = MD$

10. أ. كم مخمّسًا مختلفًا يمكن أن نرسم بحيث تكون رؤوسها في النقاط A, B, C, D, E ؟

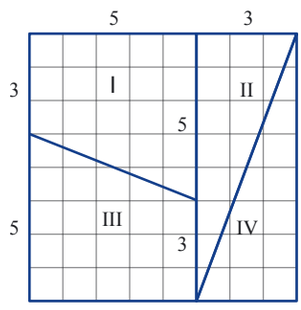


ب. كم مخمّسًا مختلفًا يمكن أن نرسم بحيث تكون رؤوسها في النقاط F, G, H, N, K؟ اشرحوا.

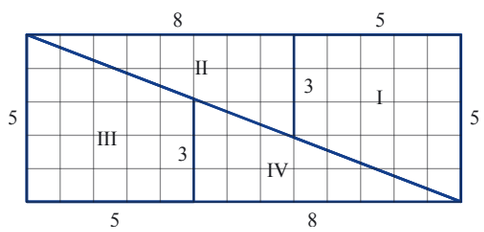


11. أمامكم برهان بصريّ يبيّن أنّ 64 = 65.
جدوا الخطأ.
مساحة المربّع في الرسمة أ تربيعة 64 = 8 x 8
انسخوا المربّع على ورقة مقسمة إلى تربيعات.
قصّوا الأقسام الأربعة (I,II,III,IV) وضعوها كما هو مرسوم في الرسمة ب.
المساحة المركّبة مِنَ القسمين I وَ II: تربيعة $\frac{13 \cdot 5}{2} = 32.5$
المساحة المركّبة مِنَ القسمين III وَ IV هي أيضًا 32.5 تربيعة.
لذا مساحة الأقسام الأربعة معًا هي 65 تربيعة.
هل يمكن ذلك؟

الرسمة أ



الرسمة ب



الدرس الرابع: لماذا نحتاج إلى البرهان؟

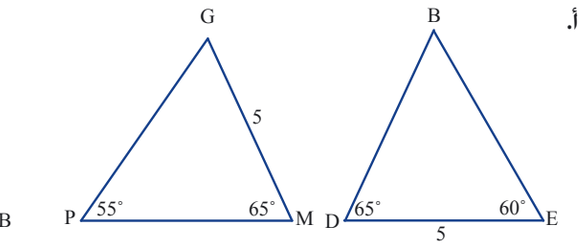
خمّنوا: هل يمكن أن تكون أربعة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث واحد تساوي أربعة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث آخر، وعلى الرغم مِن ذلك لا يتطابق المثلّثان؟

سنتعلّم عن الحاجة إلى البرهان.

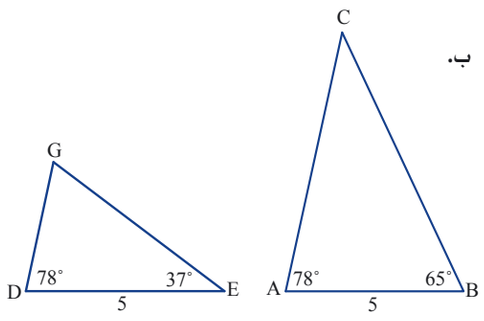
أُعِدّت الرسومات في مهامّ الدرس وفي مجموعة المهامّ للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. احسبوا مقدار الزاوية الثالثة في كلّ مثلّث، وحدّدوا هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلثين متطابقان؟
إذا كانت الإجابة نعم فسجّلوا حسب أيّ نظريّة؟ إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

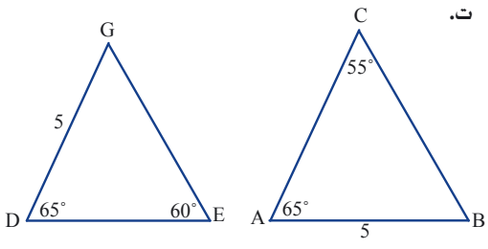
أ.



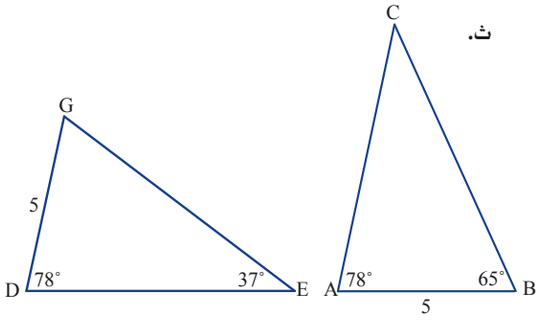
ب.



ت.



ث.



2. ما عدد المعطيات المتساوية في كلّ زوج مِنَ المثلّثات في المهمّة 1؟
هل يمكن أن تكون **أربعة** مقادير (طول ضلع ومقدار 3 زوايا) في مثلّث واحد تساوي **أربعة** مقادير (طول ضلع ومقدار 3 زوايا) في مثلّث آخر، وعلى الرغم مِن ذلك لا يتطابق المثلّثان؟ اشرحوا.

تعتمد التعليلات في الهندسة على نظريّات سابقة تعلّمناها.
مثال: اعتمدنا في المهمّة 1 على نظريّة التطابق ز.ض.ز مِن خلال التشديد على مساواة مقدار الزوايا المتناظرة في المثلّثين (الأضلاع المتساوية في الطول يجب أن تقع بين زوايا متساوية في المقدار).

للتذكير

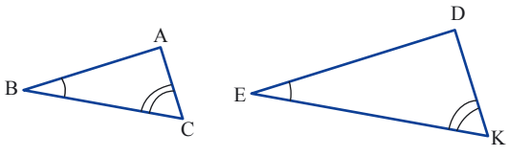
في المثلّثات المتشابهة جميع الزوايا متساوية على التناظر، وهنالك نفس النسبة بين أطوال الأضلاع على التناظر.

نرمز إلى التشابه بواسطة الإشارة ~ .

نظريّة: إذا كان في مثلّثين زوجين مِنَ الزوايا المتساوية بالمقدار فإنّ المثلّثين متشابهان.

مثال: $\Delta ABC \sim \Delta DEK$ لأنّ $\sphericalangle B = \sphericalangle E$

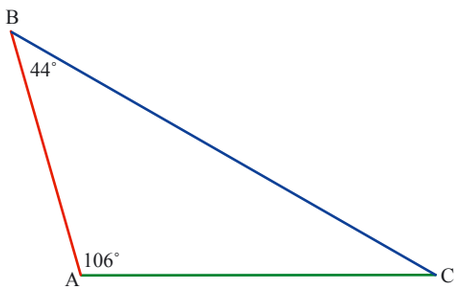
$\sphericalangle C = \sphericalangle K$

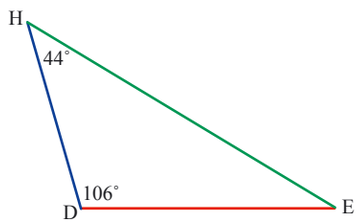


3. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "خمسة مقادير متساوية" "חמישה גדלים שווים". ستبحثون في الفعّاليّة السؤال التالي:

هل يمكن أن تكون خمسة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث واحد تساوي خمسة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث آخر، وعلى الرغم مِن ذلك لا يتطابق المثلّثان؟ نفذوا الفعّاليّة.

4. أ. قيسوا وجدوا في المثلّثين أزواجًا مِنَ الزوايا المتساوية.





ب. قيسوا أطوال الأضلاع الملوّنة **بالأحمر** وأطوال الأضلاع الملوّنة **بالأخضر** في المثلثين.

ماذا وجدتم؟ كم مقدارًا متساويًا (طول أضلاع ومقدار زوايا) يوجد في المثلثين؟

هل المثلّثان متطابقان؟ هل المثلّثان متشابهان؟ علّلوا.

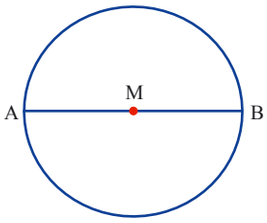
ت. هل يمكن أن تكون خمسة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث واحد تساوي خمسة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث آخر، وعلى الرغم مِن ذلك لا يتطابق المثلّثان؟ اشرحوا.

5. هل يمكن أن تكون ستة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث واحد تساوي ستة مقادير (طول الأضلاع ومقدار الزوايا) في مثلّث آخر، وعلى الرغم مِن ذلك لا يتطابق المثلّثان؟ اشرحوا.

6. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "מתמטיקה משולבת" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب "פעילויות באמצעות מחשב" فعّاليّة "زاوية ترتكز على القُطر" "זווית נשענת על קוטר". ستبحثون في الفعّاليّة السؤال التالي:
ماذا يمكن أن يكون مقدار الزاوية التي رأسها يقع على محيط الدائرة وساقاها يمران عبر أطراف القطر؟ نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

7. ارسموا دائرة مركزها M وارسموا القُطر BA.



أ. حاولوا أن ترسموا زاوية، بواسطة المنقلة، مقدارها 110° بحيث يقع رأسها على محيط الدائرة، ويمرّ ساقيها عبر النقطتين A وَ B.

ب. حاولوا أن ترسموا زاوية حادّة، بواسطة المنقلة، بحيث يقع رأسها على محيط الدائرة، ويمرّ ساقيها عبر النقطتين A وَ B.

ت. خمّنوا: ماذا يمكن أن يكون مقدار الزوايا التي تقع رؤوسها على محيط الدائرة، ويمرّ ساقيها عبر النقطتين A وَ B؟

ث. عيّنوا النقطة P على محيط الدائرة، صلوا بخطّ بين النقطة P والنقطتين A وَ B، قيسوا مقدار الزاوية.

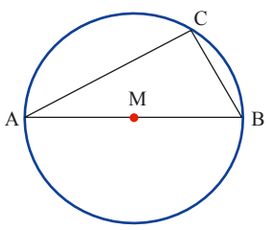
ج. ارسموا زاوية إضافيّة كهذه وقيسوها.

ح. صحّحوا فرضيتكم في بند ت إذا احتجتم ذلك.

للتذكير: في المثلّث المتساوي الساقين زاويتا القاعدة متساويتان.

نفكّر بـ ...

8. قالت **عناية**: الزاوية التي يقع رأسها على محيط الدائرة ويمرّ ساقيها عبر أطراف القطر هي زاوية قائمة.



للشرح وللاقتناع لماذا ادعاء **عناية** صحيح دائمًا يجب برهان ذلك.
انسخوا الرسمة وصلوا CM. برهنوا فرضيّتكم.

الفرضيّات الحدسيّة ليست صحيحة بالضرورة.
البرهان فقط هو الذي يُتيح لنا أن نحقّق وأن نشرح نتائج تبدو مفاجأة.

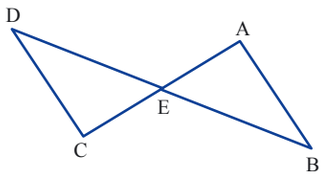
9. أ. معطى $\measuredangle B = \measuredangle D$

$AB = CD$

المطلوب برهانه $\Delta ABE \cong \Delta CDE$

انسخوا الرسم التخطيطيّ وأكملوا نظريّة تطابق مناسبة.

معطيات ← ＿＿＿＿ ← استنتاج



ب. معطى $AE = CE$

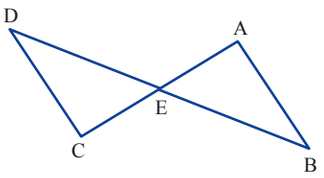
$CD = AB$

سجّلوا ثلاثة مقادير متساوية في المثلّثين.

هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثات متطابقة؟ اشرحوا.

إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا.

إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًا.



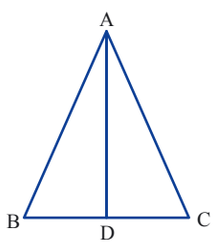
مجموعة مهامّ

1. قُسّم كلّ شكل، في كلّ بند، بواسطة خطّ داخليّ إلى مثلّثين.

سجّلوا مقادير متساوية (أطول أضلاع ومقدار زوايا) في المثلّثين.

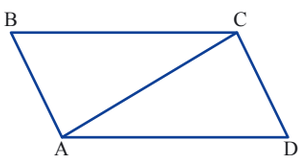
حدّدوا هل يمكن الاستنتاج أنّ المثلّثين متطابقان؟ علّلوا.

أ. معطى $AB = AC$

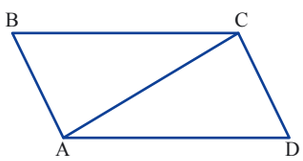


ب. معطى $AB = CD$

$\measuredangle B = \measuredangle D$

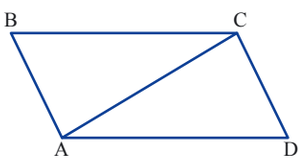


ت. معطى $AB = CD$



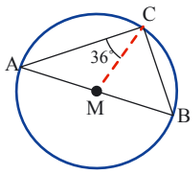
ث. معطى $AB = CD$

$\measuredangle BAC = \measuredangle DCA$

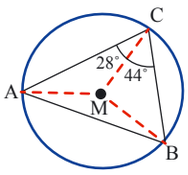


2. احسبوا مقدار زوايا المثلّث ABC حسب المعطيات المسجّلة في الرسمة.

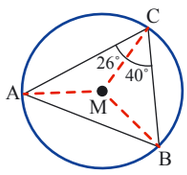
أ. AB قُطر في الدائرة مركزها M.



ب. M مركز الدائرة.

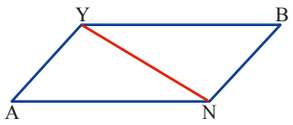


ت. M مركز الدائرة.



3. انسخوا الرسمة، في كلّ بند، وأشيروا فيها إلى 3 مقادير تبرهن أنّ المثلّثات متطابقة وعلّلوا.
انسخوا الرسم التخطيطيّ وأكملوا نظريّة التطابق التي استعملتموها.

أ. معطى $BN = AY$

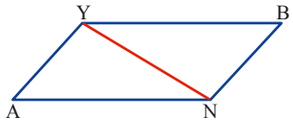


$\measuredangle AYN = \measuredangle BNY$

استنتاج $\Delta AYN \cong \Delta BNY$

معطيات ← ⬜ ← استنتاج

ب. معطى $\measuredangle A = \measuredangle B$

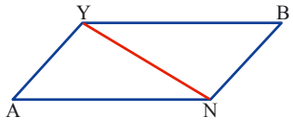


$\measuredangle AYN = \measuredangle BNY$

استنتاج $\Delta AYN \cong \Delta BNY$

معطيات ← ⬜ ← استنتاج

ت. معطى $AY = BN$



$YB = NA$

استنتاج $\Delta AYN \cong \Delta BNY$

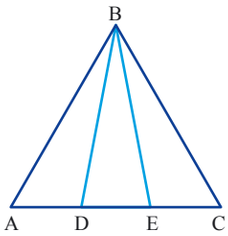
معطيات ← ⬜ ← استنتاج

4. معطى مثلث ABC متساوي الأضلاع.

$AD = DE = EC$

استنتاج $\Delta BAD \cong \Delta BCE$

برهنوا التطابق.



5. أ. هل يمكن أن تكون للمثلّث ثلاثة ارتفاعات خارجيّة؟

إذا كانت الإجابة نعم فارسموا مثلّثًا بواسطة مسطرة ومنقلة، وارسموا ارتفاعاته. اشرحوا.

ب. هل يمكن أن تكون في المثلّث ثلاثة ارتفاعات داخليّة؟

إذا كانت الإجابة نعم فارسموا مثلّثًا بواسطة مسطرة ومنقلة، وارسموا ارتفاعاته. اشرحوا.

ت. هل يمكن أن يكون في المثلّث ارتفاعين داخليّين وارتفاع ثالث خارجه؟

إذا كانت الإجابة نعم فارسموا مثلّثًا بواسطة مسطرة ومنقلة، وارسموا ارتفاعاته. اشرحوا.

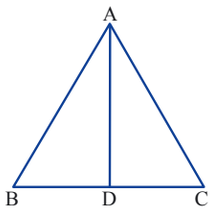
6. افحصوا، في كلّ بند، هل ينتج الاستنتاج مِنَ المعطيات؟ إذا كانت الإجابة نعم فبرهنوا.

إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

أ. معطى $AB = AC$

AD متوسّط للضلع BC

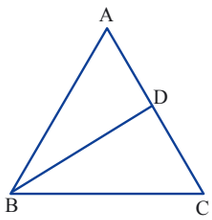
استنتاج $\Delta ADC \cong \Delta ADB$



ب. معطى $AB = AC$

BD متوسّط للضلع AC

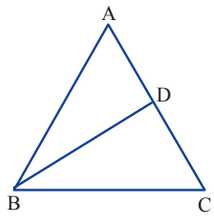
استنتاج $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



ت. معطى $AB = AC$

BD ينصّف الزاوية B.

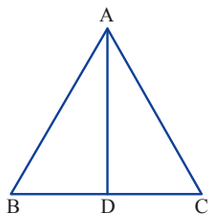
استنتاج $\Delta ABD \cong \Delta CBD$



ث. معطى $AB = AC$

AD ينصّف الزاوية A.

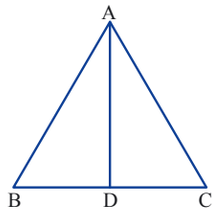
استنتاج $\Delta ABD \cong \Delta ACD$



ج. معطى $AD \perp BC$

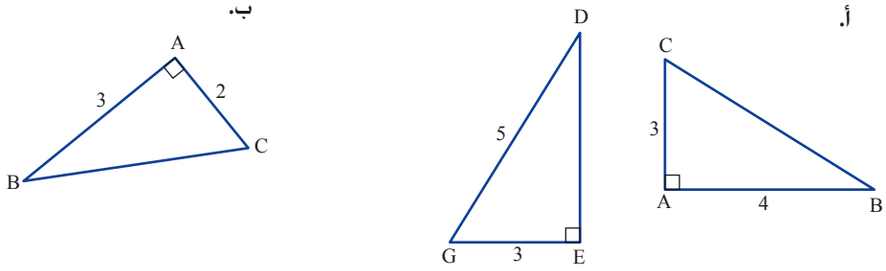
AD ينصّف الزاوية A.

استنتاج $\Delta ADC \cong \Delta ADB$

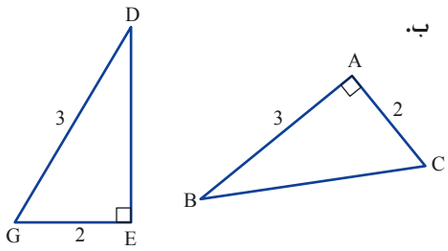


7. حدّدوا، في كلّ بند، هل المثلّثات متطابقة وعلّلوا؟ (احسبوا مقدار إضافيّ إذا احتجتم ذلك).

أ.



ب.



8. معطى مثلّثان متشابهان غير متطابقين. سُجّل طولان مِن أضلاع المثلّث ΔABC في الرسمة بالسم.

أ. يوجد في المثلث DEH ضلعان طولهما 4 سم وَ 6 سم أيضًا.

أيّ ضلع طوله 6 سم وأيّ ضلع طوله 4 سم؟ اشرحوا.

ب. احسبوا طول الضلع الثالث في كلّ مثلّث بواسطة تشابه المثلّثات.