الوحدة الثامنة والعشرون: مسائل كلاميّة

الدرس الأوّل: نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة متغيّرات

اِشترتْ مجموعات من التلاميذ علب ذرة وعلب تونا، من دكاكين مختلفة، استعدادًا للرحلة السنويّة.

نجمع في المهام الآتية معطيات عن هذه الشراءات.

نحل مسائل كلاميّة بطريقة حسابيّة وبمساعدة هيئة معادلات.

1. أكملوا التفاصيل الناقصة.

مجموعة **عدن**			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة	4	5	
علب التونة	6	4	
المجموع الكليّ			

مجموعة **مريم**			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة		5	30
علب التونة		4	28
المجموع الكليّ			

مجموعة **سحر**			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة	3		12
علب التونة	5		30
المجموع الكليّ			

2. اِشترتْ مجموعة **ماهر** علب ذرة وعلب تونا بمبلغ كليّ مقداره 90 شاقلا.
سعر علبة الذرة 4 شواقل، وسعر علبة التونا 6 شواقل.

أ. إذا اِشترت المجموعة 6 علب ذرة فكم علبة تونا اِشترت المجموعة؟

ب. إذا اِشترت المجموعة 5 علب تونا فكم علبة ذرة اِشترت المجموعة؟

ت. هل هنالك إمكانيّة أنْ تشتري المجموعة 10 علب ذرة؟ اِشرحوا.

ث. هل هنالك إمكانيّة أنْ تشتري المجموعة 24 علبة ذرة؟ اِشرحوا.

ج. هل هنالك إمكانيّة أنْ تشتري المجموعة عدد متساوٍ من علب الذرة وعلب التونا؟ اِشرحوا.

3. اشترت مجموعة **زاهر** ومجموعة **يوسف** من نفس الدكان.

مجموعة زاهر			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة	8		
علب التونة	6		
المجموع الكليّ			50

مجموعة يوسف			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة	4		
علب التونة	8		
المجموع الكليّ			40

أ. هل يمكن، بناءً على المعطيات، أن نحدّد سعر علبة الذرة وسعر علبة التونة في الدكان؟ اِشرحوا.

ب. أُرمزوا بـ x إلى سعر علبة الذرة (بالشواقل) ($x \geq 0$).
أُرمزوا بـ y إلى سعر علبة التونة (بالشواقل) ($y \geq 0$).
أكملوا التفاصيل الناقصة في الجداول بمساعدة المتغيّرين x وَ y.

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على الجدولين، وحلّوها.

ث. ما هو سعر علبة الذرة؟

ما هو سعر علبة التونة؟

للتذكير

فيما يلي مراحل حلّ مسألة كلاميّة بمساعدة معادلات:

- نحدّد ماذا يمثّل المتغيّر (أو ماذا تمثّل المتغيّرات).
- نبني تعابير جبريّة مناسبة ونسجّل شروط محدوديّة المسألة.
- نسجّل معادلة (أو هيئة معادلات) مناسبة.
- نحلّ المعادلة (أو هيئة المعادلات).
- نفحص هل يمكن أن يكون حلّ المعادلة (أو هيئة المعادلات) حلًّا للمسألة، ونسجّل إجابة كلاميّة.

مثال: في المهمة 3،

x يمثّل سعر علبة الذرة بالشواقل $(x \geq 0)$.

y يمثّل سعر علبة التونة بالشواقل $(y \geq 0)$.

هيئة معادلات مناسبة:

$$\begin{cases} 8x + 6y = 50 \\ 4x + 8y = 40 \end{cases}$$

حلّ هيئة المعادلات:

$y = 3 \, , \, x = 4$

الإجابة: سعر علبة الذرة 4 شواقل، وسعر علبة التونة 3 شواقل.

4. أمامكم معطيات حول شراء مجموعة **جاد**.

مجموعة جاد			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
علب الذرة		7	
علب التونة		6	
المجموع الكليّ	17		108

أ. هل يمكن، بناءً على المعطيات، أنْ نحدّد عدد العلب، من كل نوع، التي اشترتها مجموعة **جاد**؟ اِشرحوا.

ب. أُرمزوا بـ x إلى عدد علب الذرة ($x \geq 0$, x عدد صحيح).

أُرمزوا بـ y إلى عدد علب التونا ($y \geq 0$, y عدد صحيح).

أكملوا التفاصيل الناقصة في الجدول.

ت. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة، وحلّوها.

ث. ما هو عدد علب الذرة الّتي اِشترتها مجموعة جاد؟

ما هو عدد علب التونة الّتي اِشترتها مجموعة جاد؟

5. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + 5y = 15 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 2x + 5y = -4 \\ 2x - 5y = 16 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 3x = 18 \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$

عُلب المخللات

اِقترحتْ حكومة نابليون، سنة 1800، أنْ تمنح جائزة مالية عالية لمن يكتشف طريقة مريحة وناجعة للحفاظ على كمّيّات كبيرة من الطعام الّتي يستعملها الجيش الفرنسي أثناء حملاته.

فاز في الجائزة حلواني فرنسيّ، سنة 1809، وقد اكتشف طريقة للحفاظ على طعام موجود في مرطبان زجاجيّ. فيما بعد طُوّرت علبة المخللات، وهي عبارة عن علبة مُحكمة الإغلاق، يُحفظ الطعام داخلها بعد مروره بعمليّة تعقيم للقضاء على الكائنات الحيّة الدقيقة الملوثة. اِكتشفوا مفتاح علب المخللات بعد مرور 30 سنة. حتّى هذا الاكتشاف فتح الجنود الفرنسيون علب المخللات بمساعدة سكين حادّ أو حجر حادّ.

خلافًا للاعتقاد الشائع، ليس بالضرورة أنْ تحتوي المخللات على مواد حافظة.

لا يمكن الحفاظ على الطعام في علبة المخللات بعد فتحها.

مجموعة مهامّ

1. سعر الطابع الواحد 3 شواقل، وسعر الظرف الواحد شاقلان.

اِشترى **هلال** 30 طابعًا وظرفًا، ودفع 84 شاقلا.

أ. نرمُز بـ x إلى عدد الطوابع ($x \geq 0$, x عدد صحيح) الّتي اشتراها **هلال**.

نرمُز بـ y إلى عدد الظروف ($y \geq 0$, y عدد صحيح) الّتي اشتراها **هلال**.

أكملوا الجدول.

	عدد الطوابع / الظروف	سعر الطابع الواحد أو الظرف الواحد (بالشواقل)	السعر الكلّيّ (بالشواقل)
طوابع	x		
ظروف	y		
المجموع	30		84

ب. أُكتبوا هيئة معادلات مناسبة، وحلّوها.

ت. كم طابعًا وكم ظرفًا اشترى **هلال**؟

2. سعر كرة تنس أرضيّ 5 شواقل وسعر كرة تنس طاولة شاقلان.
اِشترى **عمار** 15 كرة من النوعين ودفع 48 شاقلًا.
أ. أكملوا الجدول.

	عدد الكرات	سعر الكرة الواحدة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
كرة تنس أرضيّ			
كرة تنس طاولة			
المجموع			

ب. أُكتبوا هيئة معادلات مناسبة، وحلّوها.

ت. كم كرة تنس أرضيّ اشترى **عمار**؟
كم كرة تنس طاولة اشترى **عمار**؟

3. يشتري **السيد هلال** كلّ شهر طوابعًا بريديّة وظروفًا بمبلغ كليّ مقداره 55 شاقلًا.
سعر الطابع الواحد 3 شواقل، وسعر الظرف الواحد شاقلان.
أ. اِشترى السيد هلال 15 طابعًا في شهر شباط. كم ظرفًا اشترى في هذا الشهر؟
ب. اِشترى السيد هلال 8 ظروف في شهر آذار. كم طابعًا اشترى في هذا الشهر؟
ت. هل هنالك إمكانيّة أنْ يشتري السيد هلال 9 طوابع في شهر واحد؟ اِشرحوا.
ث. هل هنالك إمكانيّة أنْ يشتري السيد هلال 20 طابعًا في شهر واحد؟ اِشرحوا.
ج. هل هنالك إمكانيّة أنْ يشتري السيد هلال عدد متساوٍ من الطوابع والظروف في شهر واحد؟ اِشرحوا.

4. سعر تذكرة الدخول للمتحف: للبالغ في السنّ x شواقل ($x \geq 0$)، وللأطفال y شواقل ($y \geq 0$).
أ. يوجد في عائلة **جمال** بالغان في السنّ وَ 7 أطفال. دفعت العائلة 275 شاقلًا مقابل دخولها المتحف.
أُكتبوا معادلة مناسبة.
ب. يوجد في عائلة **جواد** بالغان في السنّ وَ 5 أطفال. دفعت العائلة225 شاقلًا مقابل دخولها المتحف.
أُكتبوا معادلة مناسبة.
ت. حلوا هيئة المعادلات.
ث. ما هو سعر تذكرة الدخول للبالغ في السنّ؟
ج. ما هو سعر تذكرة الدخول للطفل؟
ح. كم شاقلًا تدفع مجموعة مكوّنة من 5 بالغين وَ 3 أطفال مقابل دخولها المتحف؟

5. اِشترى **فراس** و**حسام** ممحايات وأقلام رصاص من دكان القرطاسيّة.
اِشترى **فراس** 4 ممحايات وَ 5 أقلام رصاص ودفع 23 شاقلا.
اِشترى **حسام** 8 ممحايات وَ 6 أقلام رصاص ودفع 34 شاقلا.
أ. أُكتبوا هيئة معادلات مناسبة، وحلّوها.
ب. ما هو سعر الممحاة؟
ما هو سعر قلم الرصاص؟

6. اِشترتْ **ليلى** 3 أكياس مشروب شوكو وَ 4 علب حليب ودفعت 34 شاقلا.
اِشترى **تامر** 4 أكياس مشروب شوكو وَ 3 علب حليب ودفع 32.5 شاقلا.
ما هو سعر كيس مشروب شوكو واحد؟
ما هو سعر علبة حليب واحدة؟

7. أمامكم معادلة $2x + 3y = 18$
جِدُوا جميع حلول المعادلة التي هي عبارة عن أزواج من الأعداد الطبيعية.

8. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 21 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 28 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$

9. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 6x + 5y = 16 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} 3x + 5y = 10 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 4x + 3y = 5 \end{cases}$

الدرس الثاني: متغيّر واحد أو متغيّران

حلّ مسائل بمساعدة متغيّر واحد أو بمساعدة متغيّران

سعر تذكرة دخول مسرح 60 شاقلًا، وسعر تذكرة دخول سينما 30 شاقلا.
اِشترى تلاميذ 24 تذكرة (قسم منها للمسرح والقسم الآخر للسينما) ودفعوا 960 شاقلا.
كم تذكرة من كلّ نوع اشترى التلاميذ؟

نحلّ مسائل بطرق مختلفة.

نتطرّق في المهامّ 1 – 4 إلى المعطيات الّتي وردتْ في مهمّة الافتتاحيّة.

1. حلّ بمساعدة متغيّرين

رَمَز **عمر** بـ x إلى عدد تذاكر المسرح (x عدد طبيعيّ)، وَبـ y إلى عدد تذاكر السينما (y عدد طبيعيّ).

أ. أكملوا الجدول.

	الكمّيّة	سعر التذكرة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
تذاكر المسرح	x		
تذاكر السينما	y		
المجموع الكليّ	24		960

ب. سجّل **عمر** هيئة معادلات $\begin{cases} x + y = 24 \\ 60x + 30y = 960 \end{cases}$

هل تصف المعادلتان قصة المسألة؟ اِشرحوا.

ت. حُلّوا هيئة المعادلات، وجِدُوا كم تذكرة من كلّ نوع اشترى التلاميذ؟

2. حلّ بمساعدة متغيّر واحد

رَمَزت **سماهر** بـ x إلى عدد تذاكر المسرح التي اشتراها التلاميذ ($x < 24$, x عدد طبيعيّ).

أ. أكملوا الجدول.

	الكمّيّة	سعر التذكرة (بالشواقل)	السعر الكليّ (بالشواقل)
تذاكر المسرح	x		
تذاكر السينما	$24 - x$		
المجموع الكليّ	24		960

ب. اِشرحوا لماذا يجب أن يكون x عدد طبيعيّ، ولماذا يجب أن يكون أصغر من 24؟

ت. سجّلت **سماهر** المعادلة $60x + 30(24 - x) = 960$.

هل تصف المعادلة قصة المسألة؟ اِشرحوا.

ث. حُلّوا المعادلة، وجدوا كم تذكرة من كل نوع اشترى التلاميذ؟

للتذكير

عندما نحلّ مسائل بمساعدة معادلات نرمُز إلى مقادير غير معروفة بمساعدة متغيّرات.

عندما نختار متغيّرات مختلفة نلائم لها تعابير مختلفة ومعادلات مختلفة. حلول المعادلات مختلفة، لكن إجابة المسألة متماثلة.

مثال:

	في المهمّة 1	في المهمّة 2
عدد تذاكر المسرح	x	x
عدد تذاكر السينما	y	24 – x
شروط على المتغيّرات	x عدد طبيعيّ، y عدد طبيعيّ	x, x < 24 عدد طبيعيّ
معادلة /معادلات	$\begin{cases} x + y = 24 \\ 60x + 30y = 960 \end{cases}$	60x + 30(24 – x) = 960
الحلّ	x = 8 , y = 16	x = 8
إجابة المسألة	8 تذاكر للمسرح 16 تذكرة للسينما	8 تذاكر للمسرح 16 تذكرة للسينما

3. حلّ عدديّ

قالت **هيام**: أنا أحسب السعر في الحالات المختلفة وأكمل الجدول حتّى أحصل على الإجابة.

أكملوا الجدول حسب اقتراح **هيام**، وحلّوا المسألة.

عدد تذاكر المسرح	23	22	. . . .
عدد تذاكر السينما	1	2	. . . .
السعر الكليّ (بالشواقل)	750	780	. . . .

4. تناقشوا حول حسنات وسيئات كلّ طريقة حل.

5. حُلّوا المسألة الآتية بالطريقة التي ترغبونها.

يوجد في مزرعة موسى 50 بقرة ودجاجات معًا.

مجموع عدد أرجل البقرات والدجاجات معًا هو 128.

كم بقرة وكم دجاجة يوجد في مزرعة موسى؟

6. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 15 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} -3x + 2y = 18 \\ 3x + 5y = 3 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 4x + 3y = 19 \end{cases}$

مجموعة مهامّ

1. مجموع عددين هو 16.
إذا ضربنا أحدهما في 2 والعدد الآخر في 3، وجمعنا حاصلي الضرب فنحصل على 28.
ما هما العددان؟

2. خرجتْ مجموعة مكوّنة من 20 شخصًا (بالغ في السنّ وأطفال) في رحلة.
سعر تذكرة البالغ في السنّ 150 شاقلًا، وسعر تذكرة الطفل 90 شاقلا.
سعر الرحلة لكلّ المجموعة 2,280 شاقلا.
كم بالغًا كان في المجموعة؟
كم طفلًا كان في المجموعة؟

3. خرج مجموعة مكوّنة من 40 شخصًا (بالغ في السنّ وأطفال) في رحلة.
سعر الرحلة للبالغ في السنّ 150 شاقلًا، وسعر الرحلة للطفل 90.
سعر الرحلة لجميع البالغين يساوي سعر الرحلة لجميع الأطفال.
كم بالغًا في السنّ كان في المجموعة؟
كم طفلًا كان في المجموعة؟

4. سعر قلم حبر 7 شواقل وسعر قلم رصاص 4 شواقل.
اشترى **يزيد** 24 قلمًا من النوعين (حبر ورصاص) ودفع 126 شاقلا.
كم قلمًا من الحبر اشترى **يزيد**؟
كم قلمًا من الرصاص اشترى **يزيد**؟

5. سعر كراسة رياضيّات 25 شاقلًا، وسعر كراسة لغة عربيّة 20 شاقلا.
اشترت المعلمة 42 كراسة من النوعين (رياضيّات ولغة عربيّة) ودفعتْ 960 شاقلا.
كم كراسة رياضيّات اشترت المعلمة؟
كم كراسة لغة عربيّة اشترت المعلمة؟

6. صِلُوا بين كلّ هيئة معادلات وحلّها.
سجّلوا، في الجدول، الحروف تحت الاعداد المناسبة.

(1) $5x - y = 2$; $x = 1$

(2) $x + y = 2$; $2x - y = -5$

(3) $7x + y = 20$; $2x - y = 7$

(4) $x + y = 4$; $x - 2y = 1$

(5) $x + 4y = 1$; $y = 1$

(6) $4x + y = 1$; $x - y = 4$

(7) $x + y = 4$; $x - y = 2$

- (3, −1) ב
- (1, 3) ד
- (3, 1) כ
- (−1, 3) ו
- (−3, 1) ה
- (1, −3) ל

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

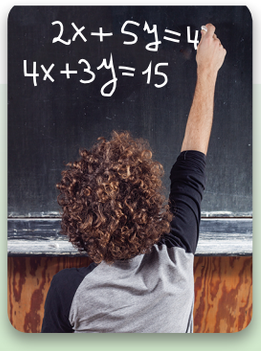
7. الحلّ لهيئتين من المعادلات الآتية هو (2− ,1). جِدُوا الهيئتين.
ما هي حلول الهيئات الأخرى؟

أ. $\begin{cases} x + y = -1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 3 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 3x = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

8. مجموع ثلاثة أعداد هو 20.
العدد الأوّل ممثّل بواسطة x، العدد الثاني ممثّل بواسطة y، العدد الثالث ممثّل بواسطة 2x.
مجموع العددين الأوّل والثاني 4 أضعاف العدد الثالث.
جِدُوا الأعداد الثلاثة.

الدرس الثالث: نبسّط ونحلّ



معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 3x + y + 4x - 5x = 13 \\ 8x - 2y + y - 6x = 7 \end{cases}$

اِقترحتْ **هند** أنْ نبسّط وأنْ نرتّب كلّ معادلة، وبعد ذلك نحلّ.

بسّطوا المعادلات وسجّلوا هيئة المعادلات الناتجة.

نبسّط معادلات ونحلّ هيئة معادلات.

نرتّب ونحلّ

1. حُلّوا هيئة المعادلات الّتي وردتْ في مهمّة الافتتاحيّة.
2. حُلّوا الهيئات الآتية.

مثال:

معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 3x + 2 + 4y = 6 - y \\ 9x - 10 - 3y = 5x + 5 \end{cases}$

نبسط ونرتّب كلّ معادلة بحيث تصبح صورتها $\square \cdot x + \square \cdot y = \square$

$$\begin{cases} 3x + 2 + 4y = 6 - y \;/\; -2 + y \\ 9x - 10 - 3y = 5x + 5 \;/\; +10 - 5x \end{cases}$$

حصلنا على هيئة المعادلات الآتية: $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 4x - 3y = 15 \end{cases}$

نحلّ الهيئة:

$$\begin{array}{rl} & 3x + 5y = 4 \;/\cdot 3 \\ & 4x - 3y = 15 \;/\cdot 5 \\ \hline & 9x + 15y = 12 \\ + & 20x - 15y = 75 \\ \hline & 29x = 87 \;/:29 \\ & x = 3 \end{array}$$

نعوّض في إحدى المعادلتين (نفترض المعادلة الأولى) ونحسب y

$$\begin{aligned} 3\cdot 3 + 2 + 4y &= 6 - y \\ 11 + 4y &= 6 - y \;/\; +y - 11 \\ 5y &= -5 \;/:5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

حلّ الهيئة $(3, -1)$

أ. $\begin{array}{l} 2x + 3 + y + 2 = 10 \\ \underline{3x + 2 + 4y = 2} \end{array}$

ب. $\begin{array}{l} 2x + 3y - 2x = 9 \\ \underline{2y + 4x = 8 + 3x} \end{array}$

ت. $\begin{array}{l} 5x + 4y = 14 \\ \underline{3x - 1 = 3 + 2y} \end{array}$

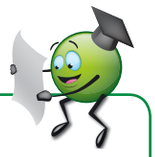
3. معطاة هيئتان من المعادلات بمتغيّرين.

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5y + 3x + 8 \\ 2x + 3y = 4y + 1 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \quad (II)$$

قالت **ندين**: هنالك نفس الحلّ للهيئتين.

هل قول **ندين** صحيح؟ اِشرحوا.



لحلّ هيئة معادلات، من الأفضل أنْ **نرتّب** كلّ معادلة بحيث تصبح صورتها $\square = \square \cdot y + \square \cdot x$

مثال: معطاة هيئة معادلات في مهمّة الافتتاحيّة:

$$\begin{cases} 3x + y + 4x - 5x = 13 \\ 8x - 2y + y - 6x = 7 \end{cases}$$

بعد تبسيط وترتيب المعادلات، نحصل على الهيئة الآتية:

$$\begin{cases} 2x + y = 13 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

نبسّط، نرتّب ونحلّ

4. بسّطوا، في كلّ بند، وجدوا حلًّا لهيئة المعادلات.

مثال:

$$\begin{cases} 4(x + 3) + 5(y - 4) = 5 \\ 6(x + 1) = 21 - 3y \end{cases}$$

نبسط ونرتب المعادلة الأولى:

$$4(x + 3) + 5(y - 4) = 5$$
$$4x + 12 + 5y - 20 = 5$$
$$4x + 5y - 8 = 5 \ / + 8$$

نحصل على: $4x + 5y = 13$

نسجِّل كهيئة معادلات مرتّبة ونحلّ

نبسط ونرتب المعادلة الثانية:

$$6(x + 1) = 21 - 3y$$
$$6x + 6 = 21 - 3y \ / - 6$$
$$6x = 15 - 3y \ / + 3y$$

نحصل على: $6x + 3y = 15$

$$4x + 5y = 13 \quad / \cdot (-3)$$
$$6x + 3y = 15 \quad / \cdot 5$$
$$-12x - 15y = -39$$
$$+ \quad 30x + 15y = 75$$
$$18x = 36 \ / : 18$$
$$y = 1 \ , \ x = 2$$

حلّ الهيئة $(2, 1)$

أ. $\begin{cases} 2(x + 3) + 5y = 11 \\ 3y + 2 = 5 - 4x \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 5(x - 1) + y = 10 \\ 2x + 3 = 3y - 8 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2x + 3(y - 2) = 6 \\ 4(x - 1) + 3y = 14 \end{cases}$

في أعقاب...

5. وُضعتْ كُتب على رفين.

نرمُز بـ x إلى عدد الكتب في الرف العلويّ ($x \geq 0$, عدد صحيح).

نرمُز بـ y إلى عدد الكتب في الرف السفليّ ($y \geq 0$, عدد صحيح).

- إذا أضفنا إلى الرف العلويّ كتابين، وإلى الرف السفليّ 17 كتابًا فيصبح عدد الكتب متساوٍ في الرفين.
- إذا أضفنا إلى الرف العلويّ 16 كتابًا، وإلى الرف السفليّ 3 كُتب فيصبح عدد الكتب في الرف العلويّ ضعفي عدد الكتب في الرف السفليّ.

أ. أمامكم معادلات، اختاروا من بينها معادلتين مناسبتين لمضمون المسألة.

$x + 2 = y + 17$ $\quad$ $x + 17 = y + 2$ $\quad$ $x + y = 17 + 2$

$2(x + 16) = y + 3$ $\quad$ $x + 16 = 2(y + 3)$ $\quad$ $2(x + 3) = y + 16$

ب. حُلّوا هيئة المعادلات الّتي حصلتم عليها.

كم كتابًا يوجد على الرف؟

مجموعة مهامّ

1. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y + 1 = 8 \end{cases}$ $\quad$ ت. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y - x - 1 = 6 \end{cases}$ $\quad$ ج. $\begin{cases} x + 2y = 9 - x \\ 2x - 7 = 2y \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = x + 4 \end{cases}$ $\quad$ ث. $\begin{cases} x - 1 = 3y \\ x + 4y = 8 \end{cases}$ $\quad$ ح. $\begin{cases} 5x + 3y = x + 11 \\ 5x - 7 = y + 2 \end{cases}$

2. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 4x - 1 = 2y + 3 \\ x + 4 = 5 - 3y \end{cases}$ $\quad$ ث. $\begin{cases} 2y + 4x = 72 \\ y + 2x - 25 = 55 - 2y \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2x + y = x + 10 \\ x + y = 3y - x + 4 \end{cases}$ $\quad$ ج. $\begin{cases} 2x + 2y - 5 = 5 + 2y \\ 7x - 2y + y = 6x + 1 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 3x + 2y = x + y + 7 \\ x + y = 4y - 4x + 1 \end{cases}$ $\quad$ ح. $\begin{cases} 2y + 8 = 4x - 3y \\ 6x - y = 2x + 2y \end{cases}$

3. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{aligned} x + y &= 9 \\ 5(x + 1) - 4y &= 5 \end{aligned}$

ب. $\begin{aligned} 2(x + 3) + 5y &= 11 \\ 5 - 4x &= 3y + 2 \end{aligned}$

ت. $\begin{aligned} x + 2(y - 2) &= 0 \\ 2(x - 1) + y &= 3 \end{aligned}$

4. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{aligned} 3(x + y) + y &= 8 \\ 2(x - y) + 3y &= 7 \end{aligned}$

ب. $\begin{aligned} x + 2(y - 2) &= 1 \\ 3y + 2(x - y) &= 4 \end{aligned}$

ت. $\begin{aligned} 2x + 7 &= 10 + y \\ 3x - 2(x + y) &= 3 \end{aligned}$

5. أ. يوجد في غرفتين معًا 32 طفلا.

نرمُز بـ x إلى عدد الأطفال في الغرفة أ (x عدد طبيعيّ).

نرمُز بـ y إلى عدد الأطفال في الغرفة **ب** (y عدد طبيعيّ).

أُكتبوا معادلة مناسبة.

ب. اِنضم 8 أطفال إلى الغرفة **أ**.

اِنضم طفلان إلى الغرفة **ب**.

بعد الانضمام، أصبح عدد الأطفال في الغرفة أ مساوٍ لعدد الأطفال في الغرفة **ب**.

أُكتبوا معادلة مناسبة.

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

كم طفلًا كان، في البداية، في الغرفة أ؟

كم طفلًا كان، في البداية، في الغرفة **ب**؟

6. يوجد مع **رامي** و**نديم** علبتين فيهما نفس عدد الخرزات الخضراء والخرزات الحمراء.

نرمُز بـ x إلى عدد الخرزات الخضراء في كلّ علبة (x عدد طبيعيّ، $x > 6$).

نرمُز بـ y إلى عدد الخرزات الحمراء في كلّ علبة (x عدد طبيعيّ، $y > 8$).

أ. أخرج **رامي** من علبته 6 خرزات خضراء وأضاف إلى العلبة 8 خرزات حمراء، نتيجة لذلك، أصبح عدد الخرزات الخضراء، في علبة **رامي**، يساوي عدد الخرزات الحمراء.

أُكتبوا معادلة مناسبة.

ب. أضاف **نديم** 8 خرزات خضراء إلى علبته، وأخرج خرزتين حمراء من علبته.

نتيجة لذلك، أصبح عدد الخرزات، في علبة **نديم**، 50 خرزة (خضراء وحمراء معًا).

أُكتبوا معادلة مناسبة.

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

كم خرزة خضراء كانت، في البداية، في كلّ علبة؟

كم خرزة حمراء كانت، في البداية، في كلّ علبة؟

الدرس الرابع: نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة الموازنة

حصلتْ كلّ مجموعة تلاميذ على وعاءين فيهما سائل. يوجد في الوعاء الأوّل **ماء**، وفي الوعاء الثاني **عصير**.
x يمثّل حجم **الماء** بالسنتمترات المكعّبة في الوعاء الأوّل ($x > 0$).
y يمثّل حجم **العصير** بالسنتمترات المكعّبة في الوعاء الثاني ($y > 0$).

نحاول أنْ نكتشف، إذا كان الأمر ممكنًا، كمّيّة الماء وكمّيّة العصير في كلّ وعاء، في البداية، في حالات مختلفة.

نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة الموازنة.

نتطرّق في المهامّ 1 – 4 إلى المعطيات الّتي وردتْ في مهمّة الافتتاحيّة.

1. في مجموعة **أمير**

أ. كان حجم الماء، **في البداية**، **مساويًا** لحجم العصير.

أُكتبوا معادلة مناسبة للحالة الابتدائيّة.

ب. نقل التلاميذ 40 سنتمترًا مكعّبًا من وعاء الماء إلى وعاء العصير.

أكملوا تعابير جبريّة مناسبة.

بعد عمليّة النقل: حجم **الماء** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب،

حجم **العصير** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب.

أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

أيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟

بعد عمليّة النقل: كان حجم العصير ضعفيْ حجم الماء.

أيّ معادلة من بين المعادلتين الآتيتين تصف العلاقة بين حجم الماء وحجم العصير بعد عمليّة النقل؟

$x - 40 = 2(y + 40)$ $\qquad$ $2(x - 40) = y + 40$

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

ما هو حجم الماء وما هو حجم العصير، في كلّ وعاء، **في البداية**؟

للتذكير

إذا أردنا كتابة معادلة عن كمّيّات غير متساوية فنُنْتِج **موازنة** بين الطرفين على النحو الآتي:
نُصغّر الكمّيّة الكبرى، أو **نُكبر** الكمّيّة الصغرى.
مثال: في مجموعة **أمير**، بعد عمليّة النقل، يمكن أن:

نضرب حجم الماء في 2 (الحجم الأصغر) $\qquad$ $2 \cdot \underbrace{(x - 40)}_{\text{حجم الماء}} = \underbrace{y + 40}_{\text{حجم عصير}}$

أو

نُقسِّم حجم العصير على 2 (الحجم الأكبر) $\qquad$ $\underbrace{x - 40}_{\text{حجم الماء}} = \underbrace{(y + 40)}_{\text{حجم عصير}} : 2$

2. في مجموعة **أميرة**

أ. كان حجم العصير، **في البداية**، ضعفيْ حجم الماء.
أُكتبوا معادلة مناسبة للحالة الابتدائيّة.

ب. نقل التلاميذ 50 سنتمترًا مكعّبًا من وعاء الماء إلى وعاء العصير.
أكملوا تعابير جبريّة مناسبة.

بعد عمليّة النقل: حجم **الماء** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب،
حجم **العصير** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب.

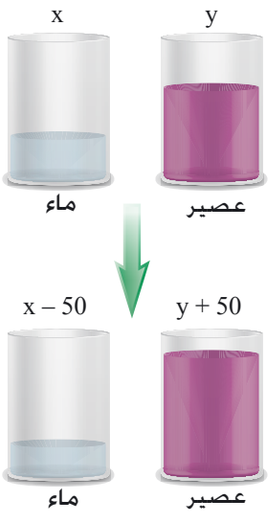
أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

أيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟

بعد عمليّة النقل: كان حجم العصير 4 **أضعاف** حجم الماء.
أُكتبوا معادلة تصف العلاقة بين حجم الماء وحجم العصير بعد عمليّة النقل؟

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

ما هو حجم الماء وما هو حجم العصير، في كلّ وعاء، **في البداية**؟



3. في مجموعة **ماهرة**

كان حجم السائلين معًا، في البداية، في الوعاءين 160 سنتمترًا مكعّبًا.
بعد ذلك، أضافوا 20 سنتمترًا مكعّبًا إلى وعاء الماء، وسكبوا 30 سنتمترًا مكعّبًا من وعاء العصير.
عندئذٍ أصبح حجم الماء ضعفيْ حجم العصير.
أي هيئة معادلات مناسبة للقصّة؟ اِشرحوا.

I. $\begin{cases} x + y = 160 \\ x + 20 = 2(y - 30) \end{cases}$

II. $\begin{cases} x + y = 160 \\ 2(x + 20) = y - 30 \end{cases}$

4. جِدُوا، في كلّ بند، حجم الماء وحجم العصير اللذان كانا في البداية.

	البداية	العمليّة التي نُفِّذت	بعد العمليّة
أ.	حجم السائل في الوعاءين معًا 120 سنتمترًا مكعّبًا	نقلوا 30 سنتمترًا مكعّبًا من وعاء الماء إلى وعاء العصير	حجم السائل في الوعاءين متساوي
ب.	حجم السائل في الوعاءين متساوٍ	أضافوا 10 سنتمترات مكعّبة إلى وعاء الماء أضافوا 60 سنتمترًا مكعّبًا إلى وعاء العصير	حجم العصير ضعفي حجم الماء

5. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات، وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2(x - 1) + 3y = 9 \\ 3(x + 2) + 4y = 21 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2(x + y) = -6 \\ 3x + 4y - 12x = 40 \end{cases}$

6. معطاة أربع معادلات.

$2x + 3y = 19$ $\quad 2y = 3x + 4$ $\quad 4x - y = 3$ $\quad 3x + y = 11$

أ. الزوج (2 , 5) هو أحد حلول كلّ معادلة. افحصوا.

ب. اِختاروا زوجًا من المعادلات وحلّوها كهيئة معادلات. على ماذا حصلتم؟

ت. اِختاروا زوجًا إضافيًّا من المعادلات وحلّوها كهيئة معادلات. على ماذا حصلتم؟

ث. هل يجب أنْ نحُلّ هيئة المعادلات كي نعرف الحلّ؟ اِشرحوا.

مجموعة مهامّ

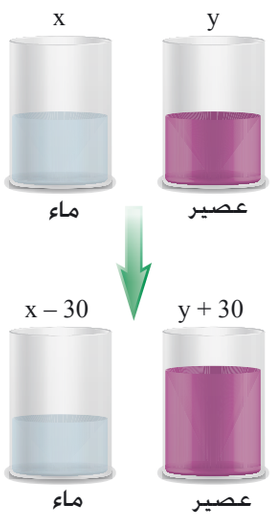
1. أ. سجّلوا معادلة واحدة بحيث يكون الزوج (3, 6) أحد حلولها.

ب. سجّلوا معادلة أخرى بحيث يكون الزوج (3, 6) أحد حلولها.

ت. سجّلوا هيئة معادلات مكوّنة من المعادلتين اللتين سجّلتموهما. ما هو حلّ الهيئة؟

2. يوجد مع **رنا** وعاءين.

يوجد في الوعاء الأوّل x سنتمترًا مكعّبًا ($x > 0$)، وفي الوعاء الثاني y سنتمترًا مكعّبًا من العصير ($y > 0$).



أ. كان حجم الماء، **في البداية**، **يساوي** حجم العصير..

أكتبوا معادلة مناسبة للحالة الابتدائيّة.

ب. نقلتْ **رنا** 30 سنتمترًا مكعّبًا من وعاء الماء إلى وعاء العصير.

أكملوا تعابير جبريّة مناسبة.

بعد عمليّة النقل: حجم **الماء** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب،

حجم **العصير** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب.

أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟

أيّ قيم مناسبة لـ y حسب شروط المسألة؟

قاستْ **رنا**، بعد عمليّة النقل، ووجدتْ أنّ حجم العصير ضعفيْ حجم الماء.

أكتبوا معادلة تصف العلاقة بين حجم الماء وحجم العصير **بعد عمليّة النقل**.

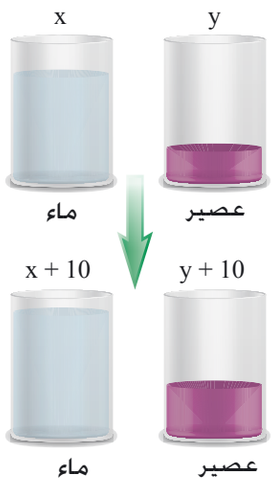
ت. أكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

ث. كم سنتمترًا مكعّبًا من الماء كان في الوعاء، في البداية؟

كم سنتمترًا مكعّبًا من العصير كان في الوعاء، في البداية؟

3. لدى **مريم** وعاءان.

يوجد في الوعاء الأوّل x سنتمترًا مكعّبًا ($x > 0$)، وفي الوعاء الثاني y سنتمترًا مكعّبًا من العصير ($y > 0$).



أ. كان حجم الماء، في البداية، 4 أضعاف حجم العصير.

أُكتبوا معادلة مناسبة.

ب. أضافت **مريم** 10 سنتمترات مكعّبة إلى كلّ وعاء.

أكملوا تعابير جبريّة مناسبة.

بعد عمليّة النقل: حجم **الماء** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب،

حجم **العصير** في الوعاء _____ سنتمتر مكعّب.

بعد الإضافة أصبح حجم الماء 3 أضعاف حجم العصير.

أُكتبوا معادلة تصف العلاقة بين حجم الماء وحجم العصير بعد **الإضافة**.

ت. أُكتبوا هيئة معادلات بناءً على البنود السابقة وحلّوها.

كم سنتمترًا مكعّبًا من الماء وكم سنتمترًا مكعّبًا من العصير كان في الوعاء، **في البداية**؟

4. هنالك 50 كتابًا على رفين معًا.

عندما نقلنا 15 كتابًا من الرفّ الأول إلى الرفّ الثاني أصبح عدد الكتب متساوٍ على الرفين.

نرمُز بـ x إلى عدد الكتب على الرف الأول (x عدد طبيعيّ أصغر من 15).

نرمُز بـ y إلى عدد الكتب على الرف الثاني (y عدد طبيعيّ أصغر من 50).

أ. أكملوا الجدول.

	عدد الكتب على الرف الأول	عدد الكتب على الرف الثاني
في البداية	x	y
بعد النقل	x – 15	

ب. أُكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ت. كم كتابًا كان على الرف الأول في البداية؟

كم كتابًا كان على الرف الثاني في البداية؟

5. يوجد مع **مريم** و**ميسم** معًا 120 طابعًا.
أعطتْ **مريم** **ميسم** 30 طابعًا، عندئذٍ أصبح عدد طوابع **مريم** ضعفيْ عدد طوابع **ميسم**.
نرمُز بـ x إلى عدد الطوابع الّتي كانت مع **مريم** في البداية (x عدد طبيعيّ، $30 < x < 120$)
نرمُز بـ y إلى عدد الطوابع الّتي كانت مع **ميسم** في البداية (y عدد طبيعيّ، $y < 120$)

أ. أكملوا الجدول.

	عدد طوابع مريم	عدد طوابع ميسم
في البداية	x	y
بعد العطاء		

ب. أُكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ت. كم طابعًا كان مع **مريم** في البداية؟

كم طابعًا كان مع **ميسم** في البداية؟

6. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} x - y = 7 \\ 2x - 9y = 21 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} 5(x - 4) - 2y = 0 \\ x + 4(y + 1) + 14 = 0 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + 4y + 8 = 0 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 3x - 2(y + x) = 3 \\ 2x + 7 = 10 + y \end{cases}$

7. حُلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 2(x - 1) - 3y = 1 \\ 2x + 4y + 18 = 0 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 3x - 5y - 12 = 0 \\ 2x + 3y + 11 = 0 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 3x + 2(y - 5) = 4 \\ 4x + 3(y + 1) = 24 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5(4x - 3) - 3(y + 1) = 15 \end{cases}$

8. يوجد في غرفتين 30 طاولة، يجلس 4 أشخاص حول الطاولة في الغرفة **أ**، ويجلس 5 أشخاص حول الطاولة في الغرفة **ب**.
لم تبق أماكن فارغة بجانب الطاولات.
إذا انتقل 12 شخصًا من الغرفة **ب** إلى الغرفة **أ** يصبح عدد الأشخاص في الغرفتين متساوٍ.
كم طاولة يوجد في الغرفة **أ**؟ وكم طاولة يوجد في الغرفة **ب**؟