

الوحدة الحادية عشرة: أحداث متعلقة ببعضها واحتمال مشروط

الدرس الأول: احتمال أحداث متعلقة ببعضها



يوجد في صندوق مبيعات حملة التخفيض 60% قمصان زرقاء وسائر القمصان بيضاء. 20% من القمصان الزرقاء فيها ضرر معين، و 30% من القمصان البيضاء فيها ضرر معين. اختارت **نعيمه** قميصاً من الصندوق بطريقة عشوائية. ما احتمال أن تختار قميصاً سليماً؟

نتعلم كيفية حساب أحداث متعلقة ببعضها.

1. أ. أمامكم رسم تخطيطي "مساحة" مقسم حسب احتمال اختيار قميص

أبيض أو قميص أزرق.

انسخوا الرسم التخطيطي.

ارسموا خطاً أفقياً في كل مستطيل حسب احتمال اختيار قميص سليم (لا

يوجد فيه ضرر) أو فيه ضرر.

ب. ما احتمال أن تختار **نعيمه**، بطريقة عشوائية، قميصاً سليماً؟

اشرحوا.



ت. رسم **عادل** رسم تخطيطي "شجرة".

احسبوا بمساعدة الرسم التخطيطي "شجرة" احتمال أن

تختار **نعيمه**، بطريقة عشوائية، قميصاً سليماً.

هل حصلتم على النتيجة نفسها؟



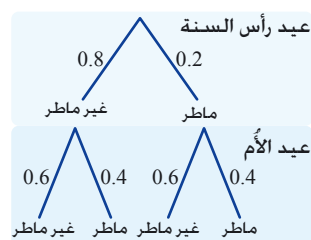
ث. قال **باسل**: بنينا في الوحدة السابقة الرسم التخطيطي "شجرة".

مثلاً: بنينا الرسم التخطيطي "مطر في عيد رأس السنة وفي

عيد الأم"

ما الفرق بين الرسومات التخطيطية "شجرة" السابقة والرسم التخطيطي

"شجرة" في بند ت؟ ما الجديد؟

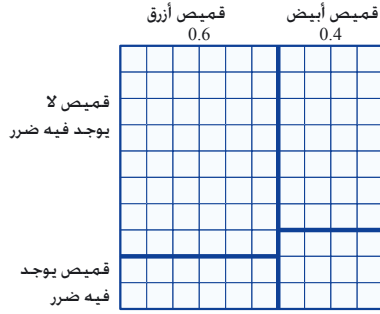




هنالك تجارب يتغيّر فيها الاحتمال في المرحلة الثانية حسب النتائج الناتجة في المرحلة الأولى. في هذه الحالات:

- نقسّم في الرسم التخطيطي "مساحة" كلّ مستطيل من المستطيلات الناتجة في المرحلة الأولى بطريقة مختلفة.
- في الرسم التخطيطي "شجرة" تتغيّر، في المرحلة الثانية، الاحتمالات المسجلة على الفروع التي تخرج من نفس التفرّع، وذلك حسب النتائج التي نتجت في المرحلة الأولى.

مثال: في المهمة 1

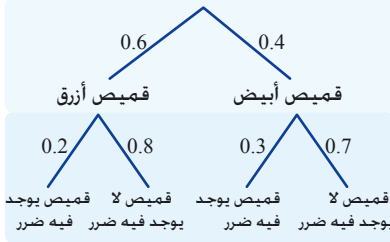


- في الرسم التخطيطي "مساحة" نقسّم في المرحلة الأولى مساحة المربع إلى مستطيلين حسب لون القميص.

نقسّم في المرحلة الثانية المستطيلات الناتجة بطريقة مختلفة، لأنّ احتمال اختيار قميص فيه ضرر أو قميص سليم متعلّق بلون القميص الذي تمّ اختياره في المرحلة الأولى.

تمّ التقسيم في مستطيل القميص الأزرق حسب الاحتمال 0.2 (ضرر)، 0.8 (دون ضرر أو سليم).

أما في مستطيل القميص الأبيض فقد تمّ التقسيم حسب الاحتمال 0.3 (ضرر)، 0.7 (دون ضرر أو سليم).



- في الرسم التخطيطي "شجرة"

تتفرّع الفروع في المرحلة الأولى حسب لون القميص.

تتفرّع الفروع في المرحلة الثانية حسب الاحتمالات المختلفة:

0.3 و 0.7 للقميص الأبيض، 0.8 و 0.2 للقميص الأزرق.

للتذكير

في الرسم التخطيطي "شجرة"، مجموع الاحتمالات في كلّ نقطة تفرّع هو 1.

2. يشترك سائد في لعبة إطلاق النار.

الاحتمال أن يُصيب الهدف في إطلاق النار الأوّل هو 0.4

إذا أصاب سائد الهدف في إطلاق النار الأوّل فاحتمال أن يُصيب الهدف في إطلاق النار الثاني هو 0.7

إذا لم يُصب سائد الهدف في إطلاق النار الأوّل فاحتمال أن يُصيب الهدف في إطلاق النار الثاني هو 0.45.

أ. ما احتمال أن لا يُصيب سائد الهدف بتاتاً؟

ب. ما احتمال أن يُصيب سائد الهدف مرّة واحدة على الأقل؟



3. الاحتمال أن نلتقي، بطريقة عشوائية، بشخص طوله أكثر من 1.80 م هو 0.2.

والاحتمال أن نلتقي بلعبة كرة سلة هو 0.05.

هل من المعقول الافتراض أنّه إذا التقينا بلعبة كرة سلة فاحتمال أن يكون طوله

أكثر من 1.80 هو 0.05 أيضاً؟ اشرحوا.



1. يتمرن يوسف على احراز الكرة في السلة. يرمي الكرة نحو السلة مرتين. احتمال أن يُحرز الكرة في المرة الأولى هو 0.3
إذا أحرز يوسف الكرة في المرة الأولى فاحتمال أن يُحرز الكرة في المرة الثانية أيضاً هو 0.6.
إذا لم يُحرز يوسف الكرة في المرة الأولى فاحتمال أن يُحرز الكرة في المرة الثانية هو 0.35.
أ. ما احتمال أن لا يُحرز يوسف الكرة بتاتاً؟
ب. ما احتمال أن يُحرز يوسف الكرة مرتين؟



2. احتمال ولادة بنت، في مدينة السلام، يساوي احتمال ولادة ولد.
وُجد في الإستطلاع الذي أجري في المدينة أن 40% من البنات شعرها فاتح و 30% من الأولاد شعرهم فاتح.
نختار طفلاً بطريقة عشوائية (ولد أو بنت) من بين أطفال المدينة.
ما احتمال أن نختار بنت شعرها غامق؟



3. احتمال ولادة طفل شعره فاتح، في دولة بلولاند، هو $\frac{1}{5}$.
 $\frac{2}{3}$ الأطفال الذين شعرهم فاتح عيونهم زرقاء و $\frac{1}{6}$ الأطفال الذين شعرهم فاتح عيونهم
زرقاء. أي حدث احتمال حدوثه أكبر:
أن نلتقي بشخص شعره فاتح وعينه زرقاء أم نلتقي بشخص شعره غامق وعينه زرقاء؟



4. هنالك مجموعة أشخاص تحافظ على الوزن السليم، 65% من أعضاء المجموعة
هم نساء وسائر أعضاء المجموعة هم رجال.
بعد مرور شهر على الحفاظ على الوزن، انخفض وزن 60% من النساء و 30% من الرجال.
نختار من المجموعة شخصاً (رجل أو امرأة) بطريقة عشوائية.
ما احتمال أن لا ينزل في الوزن؟



5. يُريد ثلاثة نقاد أن يكتبوا انتقاداً على كتاب جديد.
يكتب الأول، عادة، انتقاداً إيجابياً على ثلث الكتب.
يقرأ الثاني، عادة، انتقاد الأول ويكتب عن ثلثي الكتب العكس.
يقرأ الثالث انتقادي الأول والثاني. إذا اتفق الأول والثاني على انتقاد معين فهو يكتب عكسهما.
إذا كان الأمر غير ذلك فإنه يكتب نقداً إيجابياً عن نصف الكتب ويكتب نقداً سلبياً عن النصف الآخر.
نختار كتاباً، بطريقة عشوائية، ثم فحصه بواسطة النقاد الثلاثة.
أ. ما احتمال أن ينال الكتاب الذي تم اختياره على انتقاد إيجابي واحد؟ اشرحوا.
ب. ما احتمال أن لا ينال الكتاب الذي تم اختياره على انتقاد إيجابي؟ اشرحوا.

الدرس الثاني: أحداث تنتهي بمراحل مختلفة

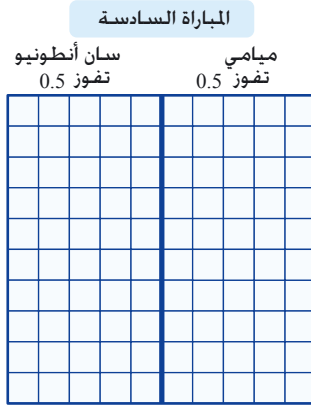


المرحلة النهائية في مباريات كرة السلة في الـ NBA مكوّنة من سلسلة مباريات. الفريق الأوّل الذي يفوز في أربع مباريات هو بطل الدوري. وصل الفريقان ميامي هيت (Miami Heat) وسان أنطونيو سפרس (San Antonio Spurs)، سنة 2013، اللعبة النهائية في دوري الـ NBA. بعد خمس ألعاب، فاز فريق سان أنطونيو سפרس بثلاث مباريات وفاز فريق ميامي بمبارتين.

نفترض أنّ الفريقين متكافئان، هذا يعني أنّه في كلّ لعبة منفردة هنالك نفس احتمال الفوز للفريقين ($\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$):
ما احتمال كلّ فريق أن يفوز بالبطولة في السنة نفسها؟
خمنوا أيّ فريق فاز بالبطولة؟

نتعلّم عن كيفية حساب الاحتمال عندما تنتهي الأحداث في مراحل مختلفة.

1. أمامكم رسم تخطيطي "شجرة" ورسم تخطيطي "مساحة"، وهما يصفان احتمال كلّ فريق بالفوز في المباراة.



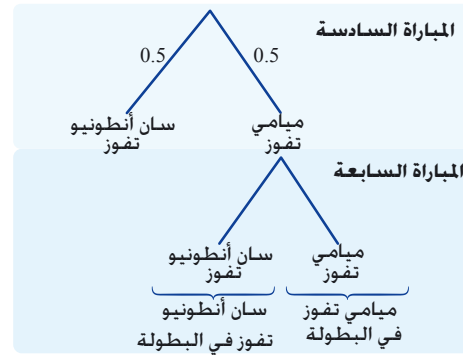
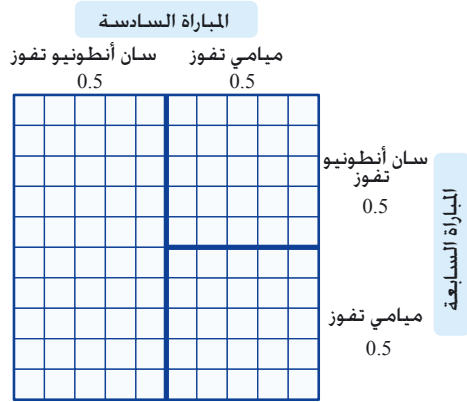
أ. انسخوا الرسمين التخطيطيين وأكملوا حسب احتمالات كلّ فريق الفوز في المباراة السابعة.
ب. احسبوا احتمال فوز كلّ فريق ببطولة الدوري.

حقّق فريق سان أنطونيو، سنة 2013، نتيجة 3:2 ضد فريق ميامي، لكن فاز فريق ميامي بالبطولة بنتيجة 4:3 وفي سنة 2012 أيضًا، فاز فريق ميامي بالبطولة بنتيجة 4:1 ضد فريق أكلاهوما.





- في المهمة 1، هنالك نتيجتان ممكنتان في المباراة السادسة: يفوز فريق سان أنطونيو أو يفوز فريق ميامي. إذا فاز فريق سان أنطونيو فهو يفوز في البطولة؛ لذا لا تكون مباراة إضافية. في هذه الحالة: لا يكون تفرّع إضافي من هذا الفرع في الرسم التخطيطي "شجرة". ولا يكون تقسيم إضافي لهذا المستطيل في الرسم التخطيطي "مساحة".
- إذا فاز فريق ميامي ينتج تعادل (3:3) وستجري مباراة إضافية. في هذه الحالة: نفرّع الفرع "يفوز فريق ميامي" إلى فرعين إضافيين في الرسم التخطيطي "شجرة"، ونقسّم في الرسم التخطيطي "مساحة" المستطيل "يفوز فريق ميامي" إلى مستطيلين: "يفوز فريق سان أنطونيو" أو "يفوز فريق ميامي".



لذا احتمال فوز سان أنطونيو في البطولة هو $0.5 + 0.25 = 0.75$
 واحتمال فوز فريق ميامي في البطولة هو 0.25

2. ينجح 0.3 من الذين يتعلمون سباق السيارة، في الامتحان، في المرة الأولى.
 ينجح 0.6 من الذين فشلوا، في المرة الأولى، في المرة الثانية.
 أ. جدوا احتمال أن يحتاج تلميذ/ة يتعلّم السباق أن يُمتحن في المرة الثالثة.
 استعينوا برسم تخطيطي "شجرة" أو برسم تخطيطي مساحة.



- ب. ينجح 0.8 من الذين فشلوا في امتحان السباق، في المرة الثانية، في المرة الثالثة.
 جدوا احتمال أن يحتاج تلميذ/ة يتعلّم السباق أن يُمتحن في المرة الرابعة.





-

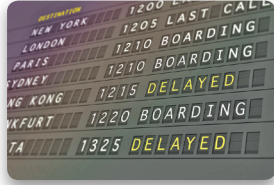
-

-

-



5. 0.3 من سكان مدينة معينة هم قادمون جدد.
- 0.6 من القادمين الجدد في المدينة يتعلمون اللغة العبرية في معهد اللغة العبرية.
- أ. ما احتمال أن نلتقي بمواطن في المدينة، بطريقة عشوائية، يتعلم في معهد اللغة العبرية؟
- أ. ما احتمال أن نلتقي بمواطن في المدينة، بطريقة عشوائية، لا يتعلم في معهد اللغة العبرية؟



6. تتأخر 12% من طائرات شركة "بساط الريح" في الوصول إلى المكان المطلوب.
- تتأخر 35% من الطائرات المتأخرة أكثر من ساعة.
- ما هو احتمال أن تصل طائرة المكان المطلوب بتأخر مقداره أكثر من ساعة واحدة؟



7. أرادت **مريم** أن تشعل شموعًا في ليلة الاحتفال. احتمال أن تجد شموعًا في بيتها هو 0.8.
- إذا لم تجد شموعًا في البيت فإنها تشتري من الدكان.
- احتمال أن تجد دكانًا مفتوحًا هو 0.9 ، واحتمال أن تجد في الدكان شموع هو 0.6.
- ما احتمال أن تشعل **مريم** الشموع في ليلة الاحتفال؟



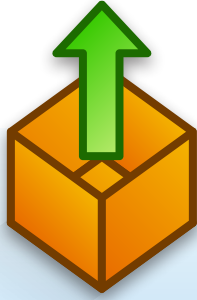
8. تبحث **نعيمه** عن معلومات لوظيفة موضوع التاريخ في مواقع الإنترنت.
- احتمال أن تجد معلومات للوظيفة في الموقع الأول هو 0.9.
- إذا لم تجد **نعيمه** معلومات للوظيفة في الموقع الأول فإنها تبحث في الموقع الثاني.
- احتمال أن تجد معلومات للوظيفة في الموقع الثاني هو 0.8.
- إذا لم تجد **نعيمه** معلومات للوظيفة في الموقع الثاني فإنها تبحث في الموقع الثالث.
- احتمال أن تجد معلومات للوظيفة في الموقع الثالث هو 0.7.
- إذا لم تجد **نعيمه** معلومات للوظيفة في الموقع الثالث فإنها لا تحضر الوظيفة بواسطة الإنترنت.
- ما هو احتمال أن تحضر **نعيمه** الوظيفة في موضوع التاريخ بواسطة المعلومات التي وجدتها في الإنترنت؟



9. تختار المعلمة تلميذًا أو تلميذة بالسحب يانصيب كالتالي:
- يرمي كل تلميذ مكعبًا حسب الدور.
- التلميذ الأول الذي يحصل على العدد 6 هو الذي تختاره المعلمة.
- باسل** هو التلميذ العاشر في الدور. ما احتمال أن يُختار؟



10. توقفت سيارة في جانب الطريق بسبب خلل.
- ميّز نصف الأشخاص الذين يمرون في الشارع السيارة.
- نصف الأشخاص الذين ميّزوا السيارة هم أشخاص مهتمون يقفون إلى جانب السيارة.
- يملك نصف الأشخاص الذين يقفون إلى جانب السيارة معلومات فنية للكشف عن الخلل.
- ما احتمال أن يكون الشخص الذي يمر في الشارع هو شخص مهتم ويملك المعلومات الفنية التي تُنقذ السيارة؟



الدرس الثالث: إخراج دون إعادة احتمال أحداث فيها كميات متغيرة

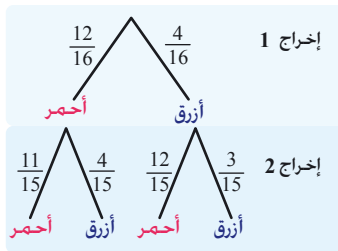
يوجد في جرة 16 كرة: 4 زرقاء و 12 حمراء.
أخرج باسل كرتين من الجرة، الواحدة تلو الأخرى (دون إعادة).
احسبوا احتمال إخراج كرتين زرقاء.
احسبوا احتمال إخراج كرتين حمراء.

نتعلم كيفية حساب احتمال أحداث فيها الكميات العامة متغيرة.

1. يوجد داخل كيس 40 قميصًا، 15 قميصًا باللون الأحمر وسائر القمصان باللون الأخضر.
أخرجت سامية قميصين من الكيس، بطريقة عشوائية، الواحد تلو الآخر.
أ. ارسموا الرسم التخطيطي "شجرة".
ب. احسبوا احتمال إخراج قميصين لونهما مختلف.



هنالك أحداث مكوّنة من مرحلتين، نصف فيها إخراج عشوائي من كمّية معطاة دون إعادة، تتغير الكمّية الكلية بعد الإخراج الأول، ويتغير في أعقابها أيضًا احتمال النتائج في المرحلة الثانية.
مثال: أخرجت كرة واحدة في المرحلة الأولى في مهمة الافتتاحية؛ لذا بقيت في الجرة 15 كرة.
احتمال إخراج كرة في المرحلة الثانية متعلق بلون الكرة التي أخرجت في المرحلة الأولى.

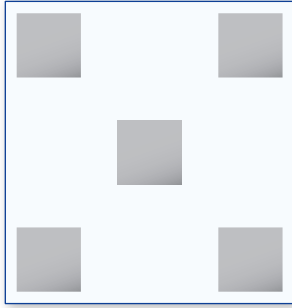


إذا أخرجت كرة زرقاء في المرحلة الأولى فتبقى في الجرة 3 كرات زرقاء و 12 كرة حمراء. لذا؛ احتمال إخراج كرة زرقاء في هذه الحالة هو $\frac{3}{15}$ واحتمال إخراج كرة حمراء هو $\frac{12}{15}$.

إذا أخرجت كرة حمراء في المرحلة الأولى فتبقى في الجرة 4 كرات زرقاء و 11 كرة حمراء. لذا؛ احتمال إخراج كرة زرقاء في هذه الحالة هو $\frac{4}{15}$ واحتمال إخراج كرة حمراء هو $\frac{11}{15}$
احتمال إخراج كرتين زرقاء هو $\frac{4}{16} \cdot \frac{3}{15} = \frac{1}{20}$.

2. يوجد في كيس 100 حبة حلوى بطعم مختلف.
20 حبة حلوى بطعم الليمون، 50 حبة حلوى بطعم التوت و 30 حبة حلوى بطعم الكرز.
أخرجت سلوى حبتين حلوى من الكيس، بطريقة عشوائية، الواحدة تلو الأخرى.
أ. ارسموا الرسم التخطيطي "شجرة".
ب. احسبوا احتمال إخراج حبتين حلوى لهما الطعم نفسه.

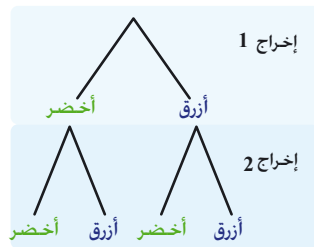




3. يحصل كلّ مشتري في مطعم بيتسا على بطاقة حظّ فيها 5 مربّعات. سجّل "كأس عصير" تحت مربّعين. نُزيل مربّعين فقط. إذا ظهر تحتهم "كأس عصير" فيحصل المشتري على كأس عصير مجاناً. ما احتمال الفوز بكأس عصير مجاناً؟



4. يشترك في لعبة 4 أشخاص. لتحديد اللاعب الذي يفتح اللعبة، وُضعت أربعة أقلام من النوع نفسه في كأس، قلم واحد منها مبرّي فقط. يختار أحد المشتركين قلمًا بطريقة عشوائية. إذا اختار القلم المبرّي فيكون اللاعب الأول. إذا لم ينجح في ذلك فيختار المشترك الثاني قلمًا. إذا اختار القلم المبرّي فيكون اللاعب الذي يفتح اللعبة، وهكذا دواليك (لا نُعيد الأقلام التي تمّ اختيارها إلى الكأس). عندما يختار أحد المشتركين القلم المبرّي تتوقف عملية الاختيار. أ. ما احتمال أن يختار اللاعب الأول القلم المبرّي؟ ما احتمال أن يختار اللاعب الثاني القلم المبرّي؟ وما احتمال أن يختار اللاعب الثالث القلم المبرّي؟ ب. هل هذه اللعبة نزيهة لاختيار اللاعب الذي يفتح اللعبة؟ اشرحوا.



1. يوجد في جرة 20 كرة: 8 كرات **زرقاء** و 12 كرة **خضراء**. أخرجت **عدن** كرتين من الجرة، الواحدة تلو الأخرى، بطريقة عشوائية، ودون إعادة. أ. انسخوا الرسم التخطيطي "شجرة" وأكملوا الاحتمالات المناسبة. ب. احسبوا احتمال إخراج: (i) كرتين **زرقاء**. (ii) كرتين **خضراء**.

2. يوجد في جرة 13 كرة: 7 كرات **زرقاء** و 6 كرات **حمراء**. أخرج **عادل** كرتين من الجرة، الواحدة تلو الأخرى، بطريقة عشوائية، ودون إعادة. أ. احسبوا احتمال إخراج كرتين **زرقاء**. ب. احسبوا احتمال إخراج كرتين لونهما مختلف.



3. يوجد في جرة 15 كرة: 6 زرقاء 4 حمراء و 5 خضراء.
أخرج عادل كرتين من الجرة، الواحدة تلو الأخرى، بطريقة عشوائية، دون إعادة.
أ. احسبوا احتمال إخراج كرتين زرقاء.
ب. احسبوا احتمال إخراج كرتين لونهما مختلف.



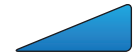
4. يوجد في علبة 12 بطاقة. سُجِّل على كل بطاقة عدد صحيح واحد من 1 حتى 12.
أ. اختارت نعيمة بطاقة (لا تُعيدها إلى العلبة). ما احتمال أن تختار العدد 5؟
ب. اختارت نعيمة بطاقة إضافية. ما هو احتمال أن تختار، في المرة الثانية، العدد 5؟



5. اشترك 20 تلميذاً في المخيم الصيفي. أُجري سحبان لليانصيب خلال المخيم.
يمكن الفوز بجائزة واحدة فقط.
فاز في السحب الأول أحد التلاميذ بتذكرة دخول إلى متنزه الألعاب (اللونا بارك).
فاز في السحب الثاني 3 أطفال بتذكرة دخول إلى السينما.
نختار تلميذاً واحداً من تلاميذ المخيم بطريقة عشوائية.
أ. ما احتمال الفوز بتذكرة دخول إلى السينما؟
ب. ما احتمال أن لا نفوز بتاتاً؟



6. يوجد في كيس 25 قطعة شوكولاتة:
8 قطع شوكولاتة مُرّة، 5 قطع شوكولاتة بيضاء وسائر قطع الحلوى بطعم الحليب.
أخرجت نعيمة قطعتين من الشوكولاتة من الكيس، الواحدة تلو الأخرى (دون إعادة).
أ. ما احتمال أن تُخرج نعيمة قطعتين من الشوكولاتة من النوع نفسه؟
ب. ما احتمال أن تُخرج نعيمة قطعة شوكولاتة بيضاء واحدة، على الأقل؟



7. أقفلت مريم دراجتها الهوائية بقفل شفرته مكوّنة من 4 أقلام.
تذكّرت مريم أنها استعملت الأرقام 7، 5، 3، 1 لكنها لم تتذكّر ترتيب الأرقام.
أ. كم إمكانية توجد لترتيب الأرقام الأربعة في الشيفرة؟
ب. ما احتمال أن تنجح مريم في فتح القفل في المحاولة الثالثة؟



الدرس الرابع: احتمال مشروط



تُختار في فحوصات الخدمة العسكرية عيّنة مكوّنة من 1,000 ذكر و 1,000 أنثى. وُجد أن 30 من كل 1,000 ذكر يعانون من عمى الألوان. وبنت واحدة من كل 1,000 بنت تعاني من عمى الألوان. نختار اسماً بطريقة عشوائية من قائمة المجندين إلى الخدمة العسكرية. خمنوا: ما احتمال أن نختار شخصاً يعاني من عمى الألوان؟ سنتناول الاحتمال المشروط.

1. نتطرق إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة. أ. انسخوا الجدول وأكملوا التكراريّة المناسبة في المكان المناسب.

	يعانون من عمى الألوان	لا يعانون من عمى الألوان	المجموع
بنون			
بنات			
المجموع			2000

ب. نختار اسماً بطريقة عشوائية من قائمة الذكور المجندين. ما احتمال أن لا نختار ذكر يعاني من عمى الألوان؟
ت. نختار اسماً بطريقة عشوائية من قائمة الإناث المجنדות. ما احتمال أن لا نختار أنثى تعاني من عمى الألوان؟
ث. ما احتمال أن نختار اسم ذكر من قائمة الذين يعانون من عمى الألوان؟



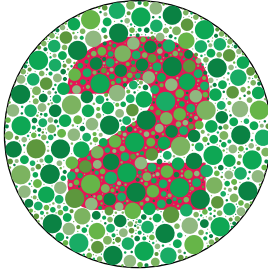
نسمي احتمال حدث معين بافتراض أنّ حدثاً آخر يحدث "احتمال مشروط".

مثال: وجدنا في مهمّة 1 احتمال مشروط. نتمعّن في جدول التكراريّة.

	يعانون من عمى الألوان	لا يعانون من عمى الألوان	المجموع
بنون	30	970	1000
بنات	1	999	1000
المجموع	31	1969	2000

نرى في جدول التكراريّة:

- في العيّنة المكوّنة من 1,000 ذكر متجنّد. يعانون 30 منهم من عمى الألوان. لإيجاد احتمال اختيار اسم ذكر لا يعاني من عمى الألوان نحسب كالتالي: $\frac{970}{1000} = 0.97$ (بند ب).
- في العيّنة المكوّنة من 1,000 بنت مجنّدة. تعاني بنت واحدة منهم من عمى الألوان. لإيجاد احتمال اختيار اسم بنت لا تعاني من عمى الألوان نحسب كالتالي: $\frac{999}{1000} = 0.999$ (بند ت).
- يوجد في العيّنة 30 ذكراً يعانون من عمى الألوان من مجموع 31 شخصاً يعانون من عمى الألوان. لإيجاد احتمال اختيار اسم ذكر من قائمة الأشخاص الذين يعانون من عمى الألوان نحسب كالتالي: $\frac{30}{31} = 0.97$ (بند ث).



مثال لامتحان إيشهارا (Ishihara): الشخص الذي لا يميز بين الأحمر والأخضر لا يستطيع أن يقرأ العدد الذي يظهر في الصورة.



هناك أنواع مختلفة من **عمى الألوان** ومستويات مختلفة، ابتداءً من عدم تمييز لون واحد حتى عمى الألوان الكامل. 8% من الرجال وحوالي 0.5% من النساء في المجتمع يعانون من

عمى الألوان.

في معظم الحالات مصدر عمى الألوان هو خلل وراثي ينتقل بالوراثة بواسطة جين متنحي موجودة في كروموسوم X، لذا يحدث الخلل فقط إذا كان مقابله كروموسوم آخر يحمل الخلل نفسه.

لا يميز معظم الذين يعانون من عمى الألوان بين اللونين الأخضر والأحمر، وفي حالات خطيرة يرى الأشخاص الذين يعانون من عمى الألوان العالم باللونين الأسود والأبيض وباللون الرمادي.

يوجد عند الرجل (XY) كروموسوم X واحد فقط، لذا يؤدي كل خلل في الجين إلى حدوث عمى الألوان. يوجد عند المرأة (XX) كروموسومان X، إذا كان خلل في كروموسوم X واحد فقط فإن الكروموسوم الآخر يمنع من حدوث عمى الألوان، لذا يحدث عمى الألوان إذا كان الكروموسومان فيهما خلل.

2. يوجد في مدرسة "هواة الدورات" دورتان بعد الظهر، دورة رياضيات ودورة كرة سلة. يشترك في دورة الرياضيات 70 ولدًا و 50 بنتًا. يشترك في دورة كرة السلة 130 ولدًا و 50 بنتًا. أ. انسخوا الجدول وأكملوا التكرارية المناسبة في المكان المناسب.

	رياضيات	كرة سلة	المجموع
بنون			
بنات			
المجموع			

- ب. نختار اسمًا، بطريقة عشوائية، من قائمة البنون الذين يشتركون في الدورات. ما احتمال أن نختار ولدًا يشترك في دورة الرياضيات؟
 ت. نختار اسمًا، بطريقة عشوائية، من قائمة البنات التي تشترك في الدورات. ما احتمال أن نختار بنتًا تشترك في دورة كرة السلة؟
 ث. ما احتمال أن نختار اسم بنت من قائمة جميع المشتركين في دورة الرياضيات؟
 ج. معلوم أن الاختيار وقع على مشترك/ة في دورة كرة السلة. ما احتمال أن يكون هذا المشترك بنتًا؟
 ح. ما احتمال أن نختار اسم ولد من قائمة جميع المشتركين؟
 ما احتمال أن نختار مشترك/ة في دورة الرياضيات من قائمة جميع المشتركين؟





3. يوجد في جارور دفاتر رقيقة ودفاتر سميكة، قسم منها دفاتر سطور وقسم منها دفاتر تربيقات. أمامكم جدول تكرارية مناسب.

المجموع	دفاتر سميكة	دفاتر رقيقة
دفاتر سطور	30	18
دفاتر تربيقات	6	6
المجموع		

أ. انسخوا الجدول وأكملوا سطر وعمود المجموع.

ب. كم دفترًا يوجد في الجارور؟

ت. نختار دفترًا واحدًا من الجارور بطريقة عشوائية. ما احتمال أن نختار دفترًا رقيقًا؟

ث. نختار دفترًا واحدًا من الجارور بطريقة عشوائية. ما احتمال أن نختار دفتر تربيقات؟

ج. معلوم أنه أُختير دفتر رقيق. ما احتمال أن يكون دفتر تربيقات؟

ح. معلوم أنه أُختير دفتر تربيقات. ما احتمال أن يكون الدفتر سميكا؟

خ. معلوم أنه أُختير دفتر سميكا. ما احتمال أن يكون دفتر تربيقات؟

د. معلوم أنه أُختير دفتر سطور. ما احتمال أن يكون الدفتر رقيقًا؟

ذ. معلوم أنه أُختير دفتر سطور. ما احتمال أن يكون الدفتر سميكا؟



حسبنا، في المهمة 3، في البنود ج - د "احتمال مشروط". ننفذ الحسابات كالتالي:

مجموع الدفاتر هو 24 دفترًا رقيقًا. 6 منها دفاتر تربيقات.

لذا، إذا كان معلومًا أننا اخترنا دفترًا رقيقًا فاحتمال أن يكون الدفتر تربيقات هو $\frac{6}{24} = 0.25$ (بند ج).

إذا كان معلومًا أننا اخترنا دفتر سطور فاحتمال أن يكون الدفتر رقيقًا هو $\frac{18}{48} = 0.375$ (بند خ).

إذا كان معلومًا أننا اخترنا دفتر سطور فاحتمال أن يكون الدفتر سميكا هو $\frac{30}{48} = 0.625$ (بند ذ).

انتبهوا! مجموع الاحتمالات في البندين د و ذ هو 1، لأنه في الحالتين أُختير دفتر سطور، وهذه هي جميع الإمكانيات لاختيار دفتر سطور.





4. تابعوا 2,000 شخص أعمارهم أكثر من 65 سنة لفحص نجاعة تطعيم ضد مرض الإنفلونزا.
تمّ تطعيم 1,200 شخص.
حصل 120 شخصاً على التطعيم وأصيبوا بمرض الإنفلونزا.
لم يحصل 240 شخصاً على التطعيم وأصيبوا بمرض الإنفلونزا.
أ. انسخوا الجدول وأكملوا التكرارية المناسبة في المكان المناسب.

المجموع	لم يحصلوا على تطعيم	حصلوا على تطعيم
أصيبوا بالإنفلونزا		
لم يمرضوا بالإنفلونزا		
المجموع		2000

- ب. نختار شخصاً بطريقة عشوائية. ما احتمال أن يكون من الذين حصلوا على تطعيم وأصيبوا بالإنفلونزا؟
ت. معلوم أن سائد لم يحصل على تطعيم. ما احتمال أن يُصاب بمرض الإنفلونزا؟
ث. نختار شخصاً، بطريقة عشوائية، من قائمة الذين مرضوا بالإنفلونزا. ما احتمال أنه حصل على تطعيم؟



1. فُحصت عيّنة من الرجال والنساء.
أمامكم جدول تكرارية مناسب.

المجموع	لا يملكون رخصة سياقة	يملكون رخصة سياقة
نساء	24	36
رجال	12	28
المجموع		

- أ. انسخوا الجدول وأكملوا سطر وعمود المجموع.
ب. كم شخصاً (رجال ونساء) كان في العيّنة؟
ت. نختار مفحوص/ة بطريقة عشوائية. ما احتمال اختيار امرأة تملك رخصة سياقة؟
ث. إذا اخترنا امرأة فما احتمال أنها تملك رخصة سياقة؟
ج. معلوم أن الذي أُختير يملك رخصة سياقة. ما احتمال اختيار امرأة؟
ح. معلوم أن الذي أُختير لا يملك رخصة سياقة. ما احتمال اختيار رجل؟



2. سألو 60 تلميذاً من شريحة الصفوف التاسعة: أين يفضلون الرحلة، في البحر الميت أم في الجليل؟
يُفضل 18 تلميذاً من الصف التاسع أن يسافروا إلى الجليل و 12 تلميذاً إلى البحر الميت.
يُفضل 15 تلميذاً من الصف التاسع ب أن يسافروا إلى الجليل، أما سائر التلاميذ فيفضلون السفر إلى البحر الميت.
أ. انسخوا الجدول وأكملوا التكرارية المناسبة في المكان المناسب.

	البحر الميت	الجليل	المجموع
التاسع أ			
التاسع ب			
المجموع			

- ب. نختار اسماً من الصف التاسع أ بطريقة عشوائية. ما احتمال اختيار تلميذ/ة يُفضل السفر إلى الجليل؟
ت. معلوم أن الذي أُختير/ت يُفضل السفر إلى البحر الميت. ما احتمال أنه/ها من الصف التاسع أ؟
ث. معلوم أن الذي أُختير/ت من الصف التاسع ب. ما احتمال أنه/ها يُفضل السفر إلى البحر الميت؟
ج. نختار اسم تلميذ/ة، بطريقة عشوائية، من شريحة الصفوف التاسعة. ما احتمال أنه/ها يُفضل السفر إلى الجليل؟



3. يتعلّم في شريحة الصفوف التاسعة، في مدرسة العلوم، 60 تلميذاً و 80 تلميذة.
يتعلّم 40 تلميذاً موضوع الحاسوب وتتعلم 50 تلميذة موضوع الحاسوب.
أ. انسخوا الجدول وأكملوا التكرارية المناسبة في المكان المناسب.

	لا يتعلّمون حاسوب	يتعلّمون حاسوب	المجموع
تلاميذ			
تلميذات			
المجموع			

- ب. نختار اسماً من قائمة جميع تلاميذ شريحة الصفوف التاسعة بطريقة عشوائية. ما احتمال أن يكون الشخص الذي أُختير/ت يتعلّم موضوع الحاسوب؟
ت. نختار اسم تلميذ بطريقة عشوائية. ما احتمال أنه يتعلّم موضوع الحاسوب؟
ث. نختار اسم تلميذة بطريقة عشوائية. ما احتمال أنها لا تتعلّم موضوع الحاسوب؟
ج. إذا كان معلوماً أن الذي أُختير/ت يتعلّم موضوع الحاسوب فما احتمال أن يكون تلميذاً؟





4. بعد أن أُجري امتحان في موضوع الرياضيات، سألوا 200 تلميذ هل استعدّوا للامتحان؟ أمامكم جدول تكرارية فيه معطيات عن نجاح التلاميذ في الامتحان.

المجموع	فشلوا في الامتحان	نجحوا في الامتحان
استعدّوا للامتحان	28	112
لم يستعدّوا للامتحان	42	18
المجموع		

- أ. انسخوا الجدول وأكملوا سطر وعمود المجموع.
 ب. نجح **زاهر** في الامتحان. ما احتمال أنه استعدّ للامتحان؟
 ت. لم يستعدّ **ماهر** للامتحان. ما احتمال أن ينجح في الامتحان؟
 ث. قالت **ماهرة**: إذا استعدّ التلاميذ للامتحان فهم ينجحون فيه. هل قول **ماهرة** صحيح؟ اشرحوا.



5. يوجد في شريحة الصفوف التاسعة 36 بنتاً و 24 ولداً.
 تطوّع كل تلميذ وتلميذة في المساعدة في صفوف البساتين أو بمساعدة التلاميذ في تحضير الوظائف البيتية.
 تطوّعت 30 بنتاً في تحضير الوظائف البيتية، أما سائر البنات فتطوّعت في مساعدة صفوف البساتين.
 تطوّع 10 تلاميذ في تحضير الوظائف البيتية، أما سائر التلاميذ فتطوّعوا في مساعدة صفوف البساتين.
 نختار تلميذة، بطريقة عشوائية من شريحة الصفوف التاسعة:
 أ. ما احتمال أن نختار تلميذة؟
 ب. ما احتمال أن نختار تلميذة؟
 ت. ما احتمال أن نختار تلميذة تطوّع في مساعدة صفوف البساتين؟
 ث. إذا كان معلوماً أنّ الذي أُختير/ت تطوّع في مساعدة صفوف البساتين. فما احتمال أن يكون تلميذة؟
 ج. إذا كان معلوماً أنّ الذي أُختير/ت تطوّع في مساعدة تحضير الوظائف البيتية. فما احتمال أن تكون تلميذة؟



6. تطرّقوا إلى المهمة 5 وحلّوا بمساعد الرسم التخطيطي "شجرة".



الدرس الخامس: مهام إضافية



تعلّمنا كيفية حساب احتمالات أحداث مختلفة.

نستمرّ، في هذا الدرس، في حساب الاحتمالات.

أمامكم امتحان **سامية**.

حدّدوا ما إذا كانت كلّ إجابة صحيحة أو غير صحيحة. اقترحوا تصحيحاً للإجابات غير الصحيحة.

امتحان في الاحتمال

1. يرمي كلّ من **يوسف** و**سامي** سهمًا نحو الهدف.

احتمال أن يُصيب **يوسف** الهدف هو 0.35. واحتمال أن يُصيب **سامي** الهدف هو 0.4.

أ. ما احتمال أن يُصيب كلاهما الهدف معًا؟

ارسموا الرسم التخطيطي "مساحة" أو الرسم التخطيطي "شجرة".

ب. ما احتمال أن يُصيب **يوسف** الهدف، وأن لا يُصيب **سامي** الهدف؟

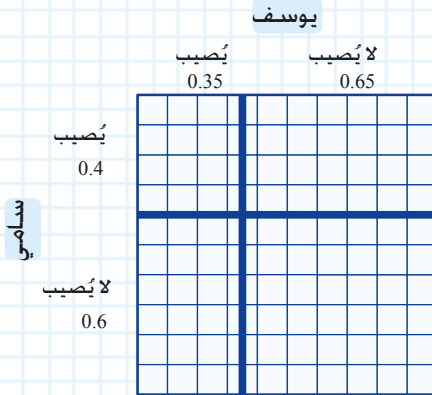
الحلّ

أ. الاحتمال أن لا يُصيب كلاهما الهدف هو:

$$0.35 \cdot 0.4 = 0.14$$

ب. الاحتمال أن يُصيب **يوسف** الهدف، وأن لا يُصيب **سامي**

$$\text{الهدف هو: } 0.35 \cdot 0.65 = 0.2275$$



2. يظهر عدداً فقط على مكعب للعب وهما: 1 و 2.

رموا المكعب 120 مرّة.

العدد 1 نَتَج 97 مرّة، والعدد 2 نَتَج 23 مرّة.

على كم سطح من سطوح المكعب من الممكن أن يُسجّل العدد 1؟ وعلى كم سطح من

سطوح المكعب من الممكن أن يُسجّل العدد 2؟ اشرحوا.

الحلّ

$$\frac{97}{120} \cdot \frac{100}{120} \cdot \frac{5}{6} \text{ هي التكرارية النسبية للعدد 1}$$

لذا، العدد 1 يظهر 5 مرّات، والعدد 2 يظهر مرّة واحدة.

3. يوجد في سلّة 9 كرات: 3 كرات حمراء و 6 كرات خضراء.

أ. نُخرج كرة واحدة من السلّة ونسجّل لونها.

نُعيد الكرة إلى السلّة. نُخرج كرة أخرى ونسجّل لونها.

ما احتمال إخراج كرتين لهما لون مختلف؟

ب. نُخرج كرتين من السلّة، بطريقة عشوائية، الواحدة تلو الأخرى، دون أن نُعيدهما.

ما احتمال إخراج كرتين لهما لون مختلف؟

الحلّ

أ. احتمال إخراج كرتين لهما لون مختلف،

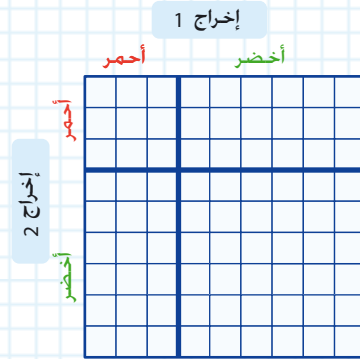
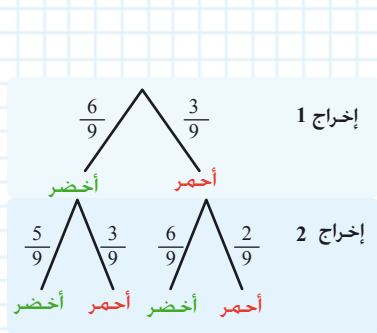
إخراج مع إعادة

$$\frac{6 \cdot 3}{100} + \frac{3 \cdot 6}{100} = \frac{36}{100}$$

ب. احتمال إخراج كرتين لهما لون مختلف،

إخراج دون إعادة

$$\frac{6}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{36}{81}$$



4. احتمال وصول الحقيبة، في شركة طيران "أركيع"، في الوقت المطلوب في المكان المناسب هو 0.96.

احتمال أن تتضرر الحقيبة خلال الطيران هو 0.1.

سافر نعيم مع شركة "أركيع" إلى لندن.

إذا سافر نعيم مع شركة "أركيع" إلى لندن فما احتمال أن يحصل على حقيبته سليمة وفي الوقت؟

الحلّ

احتمال أن يحصل نعيم على حقيبته سليمة وفي الوقت هو:

$$0.96 \cdot 0.1 = 0.096$$



5. اشترك نصف الممتحنين في دروس المراجعة.

نجح 0.8 من المشتركين في دروس المراجعة في الامتحان.

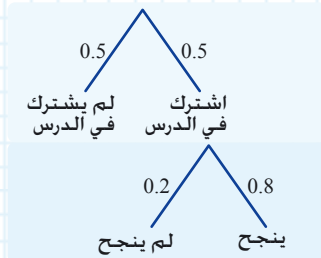
نجح 0.3 من التلاميذ الذين لم يشتركوا في دروس المراجعة في الامتحان.

إذا اخترنا ممتحنًا بطريقة عشوائية فما احتمال أن ينجح في الامتحان؟

الحلّ

الاحتمال أن ينجح ممتحن في الامتحان هو:

$$0.5 \cdot 0.8 = 0.4$$



6. "التدخين ضار للصحة ويؤدي إلى أمراض القلب".
لفحص هذا الادعاء تابعوا تطور الأمراض عند المدخنين وغير المدخنين.
يصف جدول التكرارية الآتي نتائج المتابعة.

	مدخنين	غير مدخنين	المجموع
مرضى في القلب	400	600	
غير مرضى في القلب	800	200	
المجموع			

- أ. انسخوا الجدول وأكملوا سطر وعمود المجموع.
ب. ما مجموع الأشخاص الذين فُحصوا؟
ت. نختار، بطريقة عشوائية، أحد/ إحدى المفحوصين/ المفحوصات. ما احتمال أن يكون/ تكون مدخن/ة ومريض/ة في القلب؟
ث. معلوم أن الشخص الذي أُختير/ت هو/هي مريض/ة في القلب. ما احتمال أن يكون/ تكون مدخن/ة؟
ج. معلوم أن الشخص الذي أُختير/ت غير مدخن/ة. ما هو احتمال أن يكون/ تكون مريض/ة في القلب؟

الحل
أ.

	مدخنين	غير مدخنين	المجموع
مرضى في القلب	400	600	1000
غير مرضى في القلب	800	200	1000
المجموع	1200	800	2000

ب. 2,000 ت. $\frac{400}{2000} = 0.2$ ث. $\frac{400}{1000} = 0.4$ ج. $\frac{400}{2000} = 0.75$



مجموعة مهام



1. نرمي مكعباً عادياً للعب. معلوم أنه نَتَج عددًا أكبر من 3. ما احتمال أن يكون العدد زوجي؟



2. نرمي مكعبين. معلوم أن مجموع العددين على المكعبين أكبر من 8.
ما احتمال أن يكون المجموع زوجي؟ (استعينوا بجدول بحيث تُسَجَّل فيه جميع المجاميع الممكنة).



3. أ. سجّلوا الإمكانيات الثمانية لترتيب الأطفال في عائلة مكوّنة من ثلاثة أطفال.
ب. نختار عائلة، بطريقة عشوائية، مكوّنة من ثلاثة أطفال. معلوم أن البكر بنت.
- ما احتمال أن يكون في العائلة ثلاث بنات؟
- ما احتمال أن يكون في العائلة بنتين؟
- ما احتمال أن يكون في العائلة أكثر من بنت واحدة؟



4. يلعب **معين** و**ضرار** لعبة "السلام والجمال".
يرمي كل واحد منهما مكعبين ويتقدّم عدد خطوات حسب مجموع العددين اللذين يظهران على المكعبين.
الفائز هو اللاعب الذي يصل أولاً إلى التريبعة 100.
منّ منهما له الاحتمال الأكبر أن يفوز في الخطوة القادمة؟

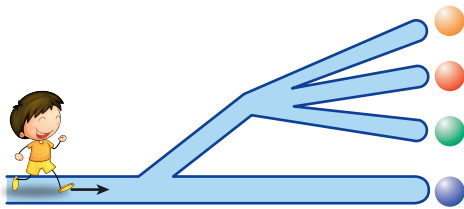
94	95	96 ضرار	97	98	99	100 يفوز
معين 93	92	91	90	89	88	87



5. يوجد في الكيس 7 قطع حلوى بطعم التوت و 5 قطع حلوى بطعم الليمون.
تُخرج **مريم** حبتين من الكيس، بطريقة عشوائية، وتأكلهما. كانت الحبتان اللتان أخرجتهما بطعم التوت.
أخرجت بعد ذلك حبة ثالثة بطريقة عشوائية.
ماذا يمكن القول عن الطعم الممكن لهذه الحبة:
أ. من المعقول الافتراض أكثر أن تكون بطعم التوت وليس بطعم الليمون.
ب. من المعقول الافتراض أكثر أن تكون بطعم الليمون وليس بطعم التوت.
ت. احتمال أن تكون بطعم التوت يساوي احتمال أن تكون بطعم الليمون.
ث. لا يمكن أن نعرف الطعم الذي له الاحتمال الأكبر.



6. احتمال النجاح في التجربة، في المرة الأولى، هو 60%.
إذا لم تنجح التجربة فتُنفذ مرة أخرى.
احتمال النجاح في التجربة، في المرة الثانية، هو 75%.
أ. ما احتمال أن لا تنجح التجربتين؟
ب. ما احتمال أن تنجح إحدى التجربتين؟



7. يقف **عماد** في بداية مسار يؤدي إلى أربع كرات.
يختار طريقه في كل مفترق بطريقة عشوائية.
أي كرة لها الاحتمال الأكبر أن تختار؟
احسبوه.



8. احتمال أن يُحرز لاعب كرة سلة كرة منفردة هو 0.65.
يرمي اللاعب الكرة نحو السلة مرتين.
ما احتمال أن يُحرز الكرة مرة واحدة على الأقل؟



9. تلعب هدى لعبة حاسوب مرتين.
احتمال الفوز في المراتين هو 0.04.
أ. ما احتمال الفوز بلعبة واحدة؟
أ. ما احتمال أن تفوز هدى بلعبة واحدة على الأكثر؟



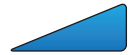
10. فُحصت في مجموعة تلاميذ، من الصفوف التاسعة في المدرسة، العلاقة بين انتماء التلاميذ إلى مجموعة القادمين الجدد وكونهم رياضيين.
أمامكم جدول تكرارية مناسب.

	رياضيون	غير رياضيين	المجموع
قادمون جدد	20		
غير قادمين جدد	20	50	
المجموع			100

- أ. انسخوا الجدول وأكملوه.
ب. كم تلميذاً من تلاميذ الصفوف التاسعة هم قادمون جدد؟
ت. نختار تلميذاً، بطريقة عشوائية، من تلاميذ الصفوف التاسعة. ما احتمال اختيار رياضي؟
ث. نختار تلميذاً، بطريقة عشوائية، من تلاميذ الصفوف التاسعة. ما احتمال اختيار تلميذاً ليس من القادمين الجدد؟
ج. معلوم أنه تم اختيار رياضي. ما احتمال أنه ليس من القادمين الجدد؟
ح. معلوم أنه تم اختيار تلميذاً غير رياضي. ما احتمال أنه ليس من القادمين الجدد؟
خ. معلوم أنه تم اختيار تلميذاً غير رياضي. ما احتمال أنه من القادمين الجدد؟
د. معلوم أنه تم اختيار تلميذاً من القادمين الجدد. ما احتمال أنه رياضي؟



11. يوجد في جرة 12 كرة: قسم منها أزرق والقسم الآخر أحمر.
 نُخرج كرة واحدة من الجرة ونسجل لونها. نُعيد الكرة إلى الجرة.
 نُخرج كرة مرة أخرى من الجرة ونسجل لونها. احتمال إخراج كرتين زرقاء هو $\frac{4}{9}$.
 أ. كم كرة من كل لون يوجد في الجرة؟
 ب. احسبوا احتمال إخراج:
 (i) كرتين حمراء.
 (ii) كرتين لونهما مختلف.



12. حضر التلاميذ شطائرًا مرزومة في سلال لوجبة الصباح في الرحلة السنوية.
 يوجد في كل سلة 15 شطيرة: 4 شطائر جبنة، 5 شطائر تونا و 6 شطائر شوكولاتة.
 يختار كل تلميذ شطيرتين بطريقة عشوائية.
 تحب سميرة ودعاء شطائر الشوكولاتة بشكل كبير جدًا.
 قرّرت سميرة أن تُخرج الشطيرتين من سلتين مختلفتين كي يكون احتمال الحصول على شطيرة شوكولاتة واحدة، على الأقل، عال.
 قرّرت دعاء أن تُخرج الشطيرتين من نفس السلة كي يكون احتمال الحصول على شطيرة شوكولاتة واحدة، على الأقل، عال.
 أ. خمنوا: أيّ قرار أفضل؟
 ب. ما احتمال أن تُخرج سميرة شطيرة واحدة من الشوكولاتة، على الأقل؟
 ت. ما احتمال أن تُخرج دعاء شطيرة واحدة من الشوكولاتة، على الأقل؟
 ث. أي بنت لها احتمال أكبر أن تحصل على شطيرة من الشوكولاتة؟

