الوحدة الثامنة: توسيع وتضييق القطوع المكافئة

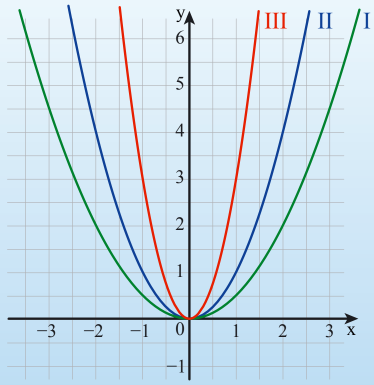
الدرس الأوّل: توسيع وتضييق

أمامكم قطوع مكافئة تصف الدوال التالية:

$f(x) = x^2$

$g(x) = 0.5x^2$

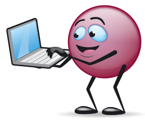
$h(x) = 3x^2$



ما الصفات المشتركة للقطوع المكافئة الثلاثة؟

بماذا تختلف عن بعضها؟ خمّنوا ممّا ينبع هذا الاختلاف؟

نبحث قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.



1. ستجدون في موقع "الرياضيّات المدمجة" "**מתמטיקה משולבת**" في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب" "**פעילויות באמצעות מחשב**" فعّاليّة "نوسّع ونضيق القطع المكافئ $y = x^2$" "**מרחיבים ומכווצים את הפרבולה** $y = x^2$". نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة في الحاسوب

2. نتطرّق إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. أيّ تمثيل جبريّ مناسب لكلّ قطع مكافئ؟

ب. انسخوا الجدول وأكملوه.

افحصوا إجاباتكم عن بند أ.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = x^2$					
$g(x) = 0.5x^2$					
$h(x) = 3x^2$					

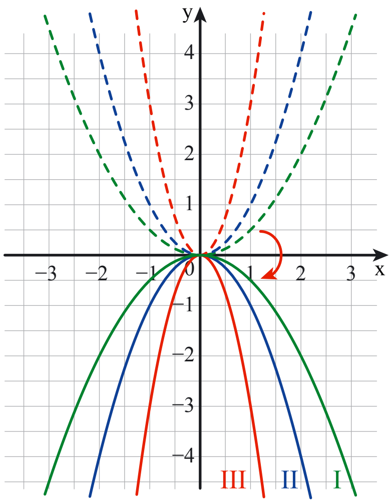
ت. أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "تضييقًا"؟

أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "توسيعًا"؟

ث. كيف تؤثّر قيمة المعامل a على شكل القطع المكافئ؟

انتبهوا، في الدّالّة $f(x) = x^2$، المعامل x^2 هو 1. هذا يعني أنّ $a = 1$.

3. نتطرّق إلى القطوع المكافئة التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
نرى في الرسمة انعكاسات القطوع المكافئة الثلاثة بواسطة محور x.



أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ للقطع المكافئ المناسب له.

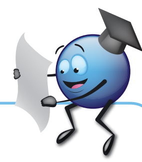
$t(x) = -x^2 \quad ; \quad m(x) = -0.5x^2 \quad ; \quad s(x) = -3x^2$

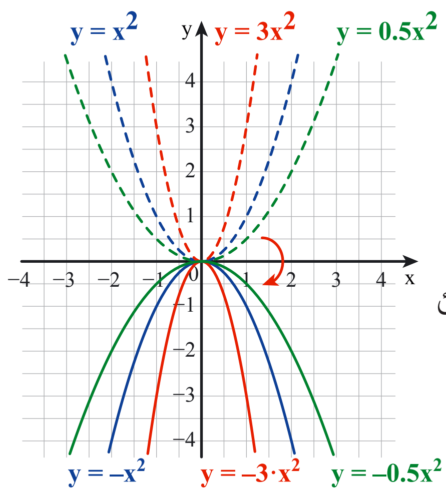
ب. أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "تضييقًا"؟
أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "توسّعًا"؟

ت. كيف تؤثّر قيمة المعامل a على شكل القطع المكافئ؟

نفكّر بـ ...

4. أ. ما الصفات المشتركة لجميع الدوال التي صورتها $y = ax^2$ $(a \neq 0)$؟
ب.كيف تؤثّر قيمة المعامل a على شكل الخطّ البيانيّ؟





تعرّفنا على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = ax^2$ $(a \neq 0)$.
يمكن الحصول على هذه القطوع المكافئة بواسطة تضييق أو توسيع القطعين المكافئين $y = x^2$ أو $y = -x^2$.

صفات جميع القطوع المكافئة لهذه العائلة هي:

- محور التماثل هو $x = 0$.
- إحداثيّا نقطة الرأس هما $(0, 0)$.
- **كلّما ازدادت قيمة a المطلقة** يزداد "تضييق" ذراعي القطع المكافئ (تصبح أقرب إلى محور y) وتزداد وتيرة تغيّر الدّالّة لكلّ x.
  كلّما صغرت قيمة a المطلقة يزداد "توسّع" ذراعي القطع المكافئ (تصبح أقرب إلى محور x) وتقلّ وتيرة تغيّر الدّالّة لكلّ x.

إذا كان a موجبًا $(a > 0)$

- يوجد للقطع المكافئ نهاية صغرى.
- الدّالّة تنازليّة في المجال $x < 0$ وتصاعديّة في المجال $x > 0$.
- الدّالّة موجبة في كلّ مجال باستثناء العدد 0.

إذا كان a سالبًا $(a < 0)$

- يوجد للقطع المكافئ نهاية عظمى.
- الدّالّة تصاعدية في المجال $x < 0$ وتنازليّة في المجال $x > 0$.
- الدّالّة سالبة في كلّ مجال باستثناء العدد 0.

نفكّر بـ ...

5. أمامكم تمثيلات جبريّة لقطوع مكافئة ومستقيمات.
ارسموا، في كلّ بند، رسومات تقريبيّة للخطوط البيانيّة المناسبة.
حدّدوا هل يتقاطع القطع المكافئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 4x^2$ ، $y = 4$
ب. $y = x^2$ ، $y = -4$
ت. $y = -4x^2$ ، $y = -\frac{1}{4}$
ث. $y = -x^2$ ، $y = 0$

6. حلّوا، إذا لم تجدوا حلًّا فاشرحوا.

أمثلة:

$4x^2 = 64 \quad / :4$
$x^2 = 16$
$x = -4$ أو $x = 4$

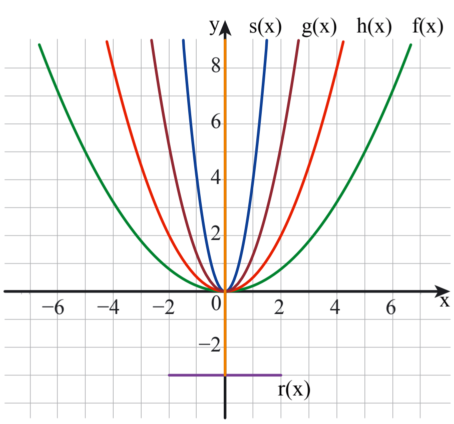
$2(x^2 + 1) = 20 \quad / :4$
$x^2 + 1 = 10$
$x^2 = 9$
$x = -3$ أو $x = 3$

أ. $3x^2 = 48$
ب. $13x^2 = 26$
ت. $-2x^2 = -3x^2$
ث. $\frac{1}{2}x^2 = 8$
ج. $4x^2 - 100 = 0$
ح. $5(x^2 - 1) = 15$
خ. $2x^2 + 8 = 0$
د. $2x^2 + 8 = 16$
ذ. $2x^2 - 5 = -2x^2 - 5$

مجموعة مهامّ

1. أمامكم رسمة مكوّنة من أربعة قطوع مكافئة وقطعتين.
لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى كلّ خطّ بيانيّ.

$y = 0.2x^2$	$y = 0.5x^2$
$y = -3$	$y = 4x^2$
$y = 1.3x^2$	$x = 0$



2. ارسموا في هيئة محاور واحدة رسومات تقريبيّة للدوال التالية.

أ. $y = 2x^2$ ب. $y = -3x^2$ ت. $y = 4x^2$ ث. $y = -0.5x^2$

أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "تضييقًا"؟

أيّ دالّة تصف القطع المكافئ الأكثر "توسّعًا"؟

3. انسخوا وأكملوا **بطاقة الهُويّة** لكلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 2x^2$	$y = -2x^2$	$y = \frac{1}{2}x^2$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة			
محور التماثل			
إحداثيّا نقطة التقاطع			
نوع الرأس			
نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)			
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)			
مجال تصاعد الدّالّة			
مجال نزول الدّالّة			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)			
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)			

4. حلّوا، إذا لم تجدوا حلًّا فاشرحوا.

أ. $6x^2 = 24$ ت. $3(x^2 - 1) = 0$ ج. $2x^2 = 50$ خ. $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$

ب. $-2x^2 = 1$ ث. $-x^2 = 3x^2$ ح. $-5x^2 = 0$ د. $\frac{1}{3}x^2 + 3 = 0$

5. يوجد في كلّ بند تمثيل جبريّ لقطع مكافئ وتمثيل جبريّ لمستقيم.
حدّدوا هل يتقاطع القطع المكافئ والمستقيم؟ إذا كانت الإجابة نعم فجدوا إحداثيي نقطة التقاطع.

أ. $y = x^2$, $y = 9$

ب. $y = 9x^2$, $y = 9$

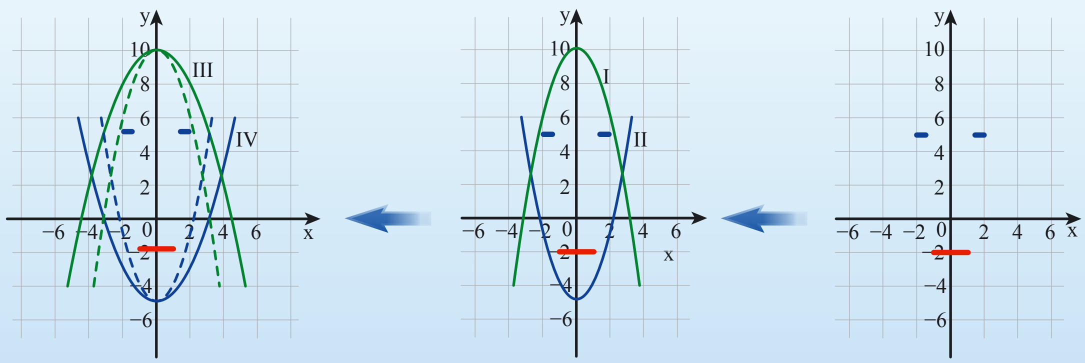
ت. $y = -9x^2$, $y = -1$

ث. $y = \frac{1}{9}x^2$, $y = -9$

الدرس الثاني: توسيع أو تضييق وإزاحة عموديّة

أضافت **رائدة** قطعين مكافئين (I وَ II) إلى القطع في الرسمة وأنتجت قناعًا كهذا:

قالت **سائدة**: القناع "نحيف" جدًّا. قامت بتوسيعه كالتالي (القطعان المكافئان III وَ IV):



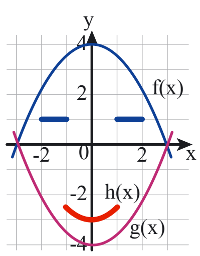
لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى القطع المكافئ المناسب.

$f(x) = x^2 - 5$ $\quad$ $g(x) = 0.5x^2 - 5$ $\quad$ $h(x) = -0.5x^2 + 10$ $\quad$ $s(x) = -x^2 + 10$

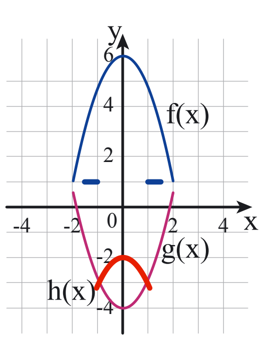
نبحث قطع مكافئ من العائلة $y = ax^2 + k$ $(a \neq 0)$.

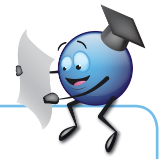
1. تطرّقوا إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
أعطوا مثالًا لتمثيلات جبريّة مناسبة.
أ. نتج قناعًا أوسع مِنَ القناع الذي أنتجته **سائدة**.
ب. نتج قناعًا أنحف مِنَ القناع الذي أنتجته **رائدة**.

2. أمامكم قناع مكوّن من ثلاثة قطوع مكافئة من العائلتين:
$y = 0.5x^2 + k$ أو $y = -0.5x^2 + k$.
سجّلوا لكلّ قطع مكافئ:
أ. التمثيل الجبريّ المناسب.
ب. إحداثيّا نقطة الرأس.
ت. محور التماثل.



3. أمامكم قناع مكوّن من ثلاثة قطوع مكافئة من العائلتين:
$y = 1.2x^2 + k$ أو $y = -1.2x^2 + k$.
سجّلوا لكلّ قطع مكافئ:
أ. التمثيل الجبريّ المناسب.
ب. إحداثيّا نقطة الرأس.
ت. محور التماثل.





إذا أزحنا القطع المكافئ $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ بمقدار k وحدات على طول محور y فينتج القطع المكافئ مِنَ العائلة $\mathbf{y = ax^2 + k}$.

إذا كان **k موجبًا** $(k > 0)$ فإنّ القطع المكافئ يتحرك إلى **أعلى**، وإذا كان **k سالبًا** $(k < 0)$فإنّ القطع المكافئ يتحرك إلى **أسفل**. محور التماثل لجميع القطوع المكافئة مِن هذه العائلة هو $x = 0$، وإحداثيّا نقطة الرأس هما $(0, k)$.

مثال

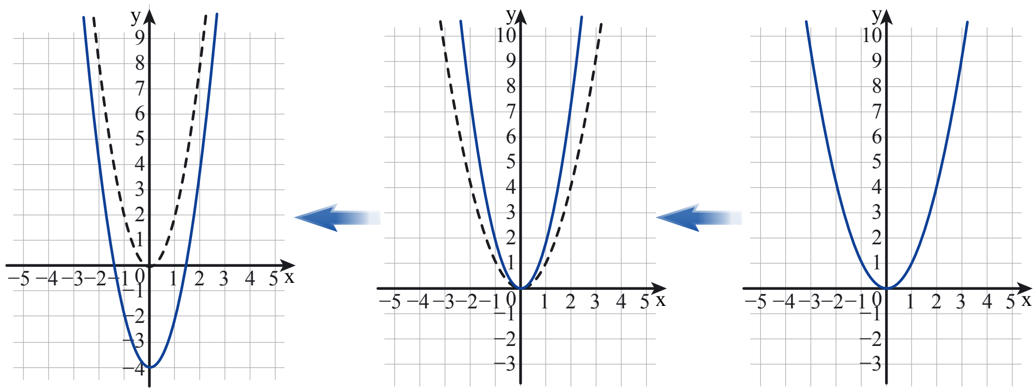
في رسمة القطع المكافئ $y = 2x^2 - 4$

$(k= -4,\ a = 2)$

محور التماثل هو $x = 0$

رأس القطع المكافئ هو نهاية صغرى إحداثيّاها هما: $(0, -4)$.

يمكن الحصول على هذا القطع المكافئ بواسطة إزاحة القطع المكافئ $y = 2x^2$ بمقدار 4 وحدات عموديًّا إلى أسفل.



نفكّر بـ ...

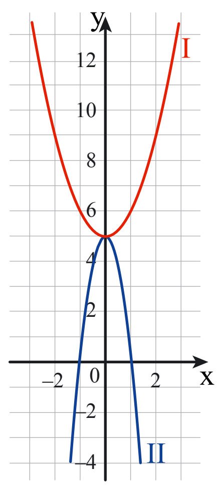
.4 أمامكم خطّان بيانيّان للدالتين:

$f(x) = x^2 + 5$

$g(x) = -5x^2 + 5$

أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى القطع المكافئ المناسب.

ب. سجّلوا بماذا تتشابه الدوال وبماذا تختلف؟



.5 حدّدوا، في كلّ بند، هل توجد نقاط صفرية للقطع المكافئ؟ إذا كانت الإجابة نعم فجدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.

أ. $y = 3x^2 - 12$ ب. $y = -3x^2 - 12$ ت. $y = 12x^2 + 3$ ث. $y = x^2 - 12$

.6 أمامكم تمثيلات جبريّة لقطوع مكافئة ولمستقيمات.
ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة للخطين البيانيّين المناسبين.
حدّدوا هل يتقاطع القطع المكافئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 3x^2 - 2$ ، $y = 4$
ب. $y = 3x^2$ ، $y = -1$
ت. $y = -3x^2 + 3$ ، $y = 2.5$
ث. $y = \frac{1}{3}x^2 + 5$ ، $y = 5$

.7 أمامكم تمثيلات جبريّة لقطوع مكافئة ولمستقيمات.
ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة للخطين البيانيّين المناسبين.
حدّدوا هل يتقاطع القطع المكافئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 3x^2$ ، $y = 3x^2 + 5$
ب. $y = 4x^2$ ، $y = \frac{1}{2}x^2$
ت. $y = -2x^2 + 3$ ، $y = 4x^2 + 9$
ث. $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ ، $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$

مجموعة مهامّ

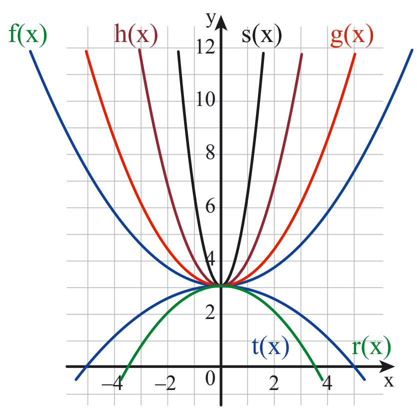
.1 انسخوا وأكملوا **بطاقة الهُويّة** لكلّ دالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 4x^2 + 1$	$y = -4x^2 + 1$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة التقاطع		
نوع الرأس		
نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

.2 لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى القطع المكافئ المناسب له في الشكل التالي.

$y = 0.2x^2 + 3$ $\qquad$ $y = 0.4x^2 + 3$ $\qquad$ $y = 4x^2 + 3$

$y = -0.2x^2 + 3$ $\qquad$ $y = 1.1x^2 + 3$ $\qquad$ $y = -0.5x^2 + 3$

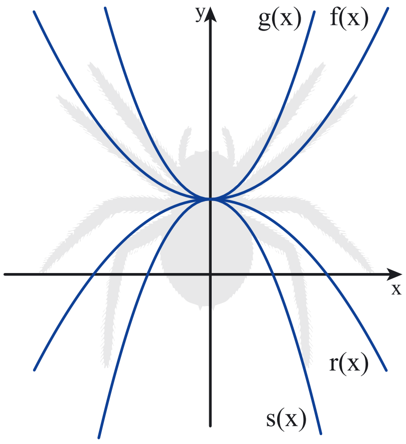


3. بدأ "العنكبوت" الذي يظهر في الرسمة نزهتة مِن نقطة الأصل في هيئة المحاور، وصعد على طول محور y.

أمامكم الخطوط البيانيّة للدوال:

$y = 0.5x^2 + 3$ $\quad$ $y = 1.2x^2 + 3$

$y = -0.5x^2 + 3$ $\quad$ $y = -1.2x^2 + 3$



أ. لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى القطع المكافئ المناسب.

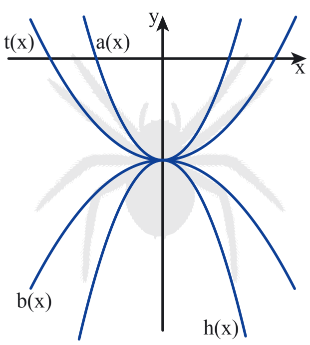
ب. كم وحدة صعد "العنكبوت" على طول محور y؟

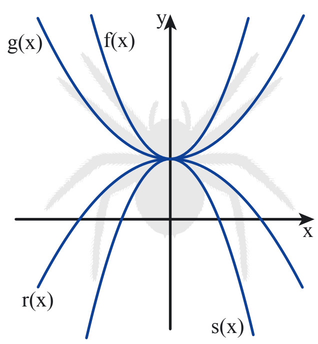
4. أمامكم الخطوط البيانيّة للدوال:

$y = 0.3x^2 + 8$ $\quad$ $y = 0.3x^2 - 8$ $\quad$ $y = -0.3x^2 + 8$ $\quad$ $y = -0.3x^2 - 8$

$y = 0.6x^2 + 8$ $\quad$ $y = 0.6x^2 - 8$ $\quad$ $y = -0.6x^2 + 8$ $\quad$ $y = -0.6x^2 - 8$

لائموا كلّ تمثيل جبريّ إلى القطع المكافئ المناسب.



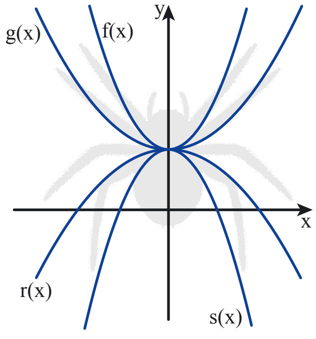


5. بدأ "العنكبوت" الذي يظهر في الرسمة نزهتة مِن نقطة الأصل في هيئة المحاور، وصعد على طول محور y بمقدار 9 وحدات.

أمامكم أربعة قطوع مكافئة من العائلة $y = ax^2 + k$.

في قطعين مكافئين: $|a| = 0.5$، وفي قطعين مكافئين آخرين: $|a| = 0.2$.

جدوا التمثيلات الجبريّة للقطوع المكافئة التي تظهر في الرسمة.



6. جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدوال. إذا لم تجدوا نقاطًا صفريّة فاشرحوا.

أ. $y = 2x^2 - 8$ ت. $y = -3x^2 + 27$ ج. $y = -x^2 + 25$

ب. $y = -x^2 + 4$ ث. $y = 6x^2 - 6$ ح. $y = 2 - 2x^2$

7. حدّدوا، في كلّ بند، هل يتقاطع القطع المكافئ والمستقيم في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = x^2 - 8$، $y = 0$

ب. $y = 3x^2 + 8$، $y = 5$

ت. $y = -8x^2 + 3$، $y = 5$

ث. $y = 8x^2 + 3$، $y = 3$

8. حدّدوا، في كلّ بند، هل يتقاطع القطعان المكافئان في نقطة واحدة، في نقطتين، أم أنّهما لا يتقاطعان؟

أ. $y = 2x^2$، $y = 5x^2$

ب. $y = 3x^2 + 8$، $y = -3x^2 + 10$

ت. $y = -8x^2 + 3$، $y = 3x^2 + 8$

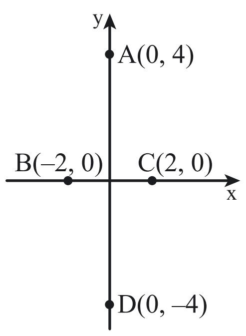
ث. $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$، $y = -2x^2 + 3$

9. أ. جدوا دالّة مِنَ العائلة $y = ax^2 + 6$ بحيث تقع النقطة $(2, 20)$ على خطها البيانيّ.

ب. جدوا دالّة مِنَ العائلة $f(x) = ax^2 + k$ بحيث يتحقّق $f(0) = 1$ وَ $f(1) = -3$.
ما إحداثيّاتَ النقاط الصفريّة للدّالّة؟

10. أ. يمر القطع المكافئ مِنَ العائلة $y = ax^2 + k$ عبر النقاط A, B وَ C.
جدوا تمثيله الجبريّ.

ب. جدوا التمثيل الجبريّ للقطع المكافئ الذي يمرّ عبر النقاط B, C وَ D.

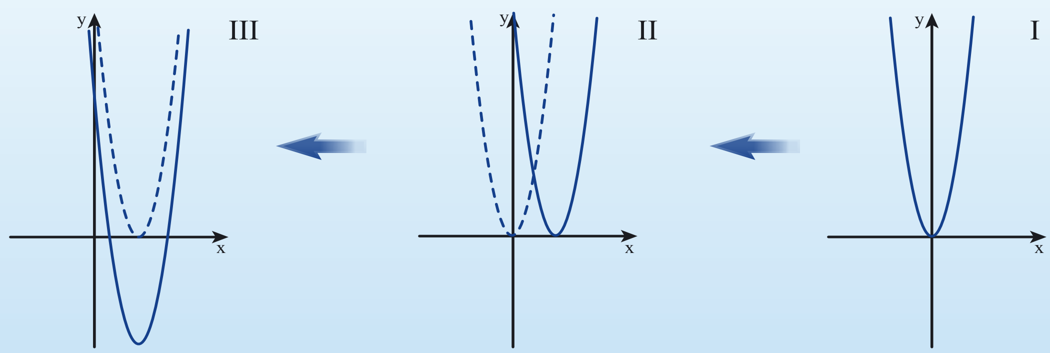


الدرس الثالث: توسيع أو تضييق وإزاحة

رسم **رائد** القطع المكافئ للدّالّة
$y = 2x^2$

أزاحها 3 وحدات إلى اليمين على محور x (إزاحة أفقيّة)

أزاحها 8 وحدات إلى أسفل (إزاحة عموديّة)



خمّنوا التمثيلات الجبريّة للقطوع المكافئة الناتجة بعد الإزاحة (الرسمتان II, III).

نبحث قطوعًا مكافئة مِنَ العائلة $y = a(x - p)^2 + k$ $(a \neq 0)$.

.1 انسخوا وأكملوا **بطاقة الهُويّة** لكلّ دالّة. استعينوا بالرسمة التقريبيّة التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = 2(x - 3)^2$	$y = 2(x - 3)^2 - 8$
المجال	كلّ الأعداد	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة		
محور التماثل		
إحداثيّا نقطة التقاطع		
نوع الرأس		
نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)		
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y ($x = 0$)		
مجال تصاعد الدّالّة		
مجال نزول الدّالّة		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة ($y > 0$)		
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة ($y < 0$)		

نفكّر بـ ...

.2 معطاة الدّالّة $y = 5(x + 3)^2 - 20$.
اشرحوا كيف يمكن أن نعرف (دون أن نرسم رسمة تقريبيّة) صفات الدوال التالية:
- هل يوجد للدّالّة نقطة صغرى أم نقطة كبرى؟
- ما هما إحداثيّا نقطة الرأس؟
- كم نقطة صفريّة يوجد للدّالّة؟

3. حدّدوا، في كلّ بند، دون أن تحلّوا المعادلة، كم نقطة صفريّة توجد للدّالّة؟ اشرحوا.

أ. $f(x) = -2(x-1)^2$　　ب. $g(x) = 5(x+2)^2 + 3$　　ت. $h(x) = -3(x+1)^2 + 4$

4. جدوا، في كلّ بند، إحداثيّات النقاط الصفريّة للدّالّة. إذا لم تجدوا نقاطًا صفريّة فاشرحوا.

أمثلة:

الدّالّة: $y = 2(x-1)^2 - 18$

$2(x-1)^2 - 18 = 0$

$2(x-1)^2 = 18 \quad / :2$

$(x-1)^2 = 9$

$x - 1 = 3$ أو $x - 1 = -3$

$x_1 = 3 + 1 = 4$　　$x_2 = -3 + 1 = -2$

الدّالّة: $y = -2(x+1)^2 - 8$

$-2(x+1)^2 - 8 = 0$

$-2(x+1)^2 = 8 \quad / :(-2)$

$(x+1)^2 = -4$

لا يوجد حلّ للمعادلة، من هنا لا توجد نقاط صفرية للدّالّة.

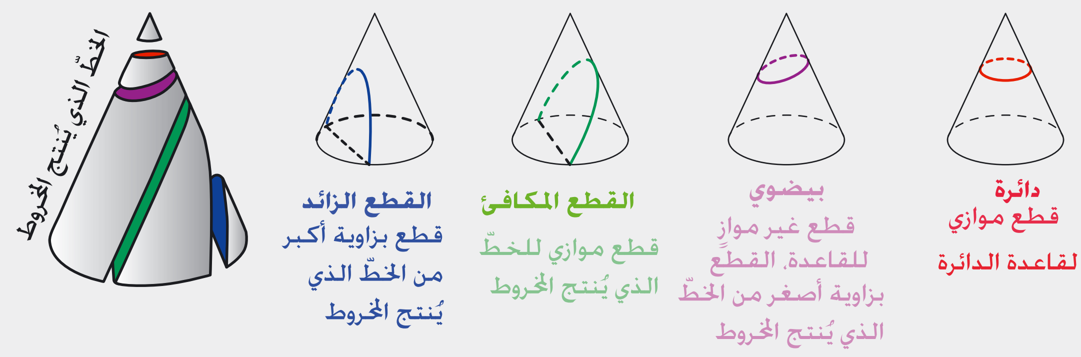
إحداثيّات النقاط الصفريّة هي: $(4, 0)$ وَ $(-2, 0)$.

أ. $y = 2(x+5)^2 - 18$　　ت. $y = 2(x-5)^2 - 18$　　ج. $y = -4(x+1)^2 - 28$

ب. $y = -2(x+5)^2 + 18$　　ث. $y = 4(x-1)^2 - 28$　　ح. $y = -4(x+1)^2 + 28$

عالم الرياضيّات والفلك اليونانيّ أبلونيوس من فرجا الذي عاش بين السنوات 262 إلى 190 قبل الميلاد بحث صفات الأشكال الناتجة من قطوع المَخروط (اسم المخروط كونوس أيضًا وباللغة الإنجليزيّة cone). نُشرت نتائج أبحاثه في كتاب من ثمانية أجزاء اسمه "Conics" ("قطوع المخروط"). حُفظت سبعة أجزاء من ثمانية أجزاء حتّى يومنا هذا.

إذا قطعنا قطعة من مخروط فإنّ الشكل الهندسيّ للقطع متعلّق بالزاوية التي تمّ بواسطتها قطع المخروط. يمكن أن نرى في الرسمة كيف تنتج: **الدائرة**، **الشكل البيضوي**، **القطع المكافئ** و**القطع الزائد**.



تعرّفنا على قطوع مكافئة مِنَ العائلة $y = a(x - p)^2 + k$ $(a \neq 0)$.

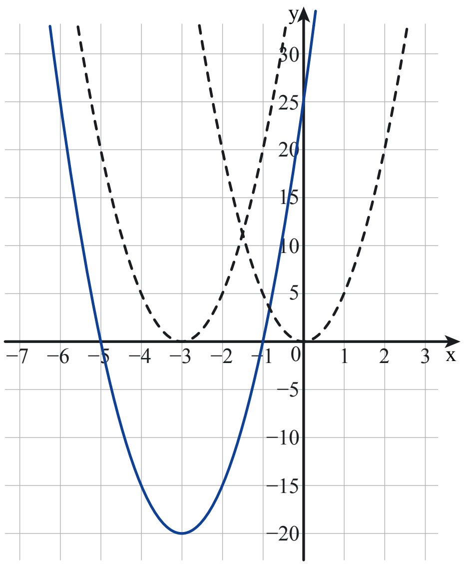
يمكن الحصول على هذه القطوع من دمج إزاحات (عموديّة وأفقيّة) للقطع المكافئ مِنَ العائلة $y = ax^2$

إزاحة أفقيّة: p وحدات إلى اليمين أو اليسار.

إزاحة عموديّة: k وحدات إلى أعلى أو إلى أسفل.

محور التماثل: $x = p$

إحداثيّا نقطة الرأس: (p, k)



مثال: في المهمّة 2

القطع المكافئ $y = 5(x + 3)^2 - 20$,

$(a = 5,\ k = -20,\ p = -3)$

ينتج مِنَ الإزاحة الأفقيّة للقطع المكافئ $y = 5x^2$

بمقدار 3 وحدات إلى اليسار وَ 20 وحدة إلى أسفل.

محور التماثل: $x = -3$

إحداثيّا نقطة الرأس: $(-3, -20)$

مجموعة مهامّ

1. انسخوا وأكملوا **بطاقة الهُويّة** للدالّة.

التمثيل الجبريّ للدّالّة	$y = -2(x - 3)^2 + 2$
المجال	كلّ الأعداد
رسمة تقريبيّة	
محور التماثل	
إحداثيّا نقطة التقاطع	
نوع الرأس	
نقطة التقاطع مع محور x (نقطة الصفر، $y = 0$)	
إحداثيّا نقطة التقاطع مع محور y $(x = 0)$	
مجال تصاعد الدّالّة	
مجال نزول الدّالّة	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة موجبة $(y > 0)$	
المجال الذي تكون فيه الدّالّة سالبة $(y < 0)$	

2. حدّدوا، في كلّ بند، دون أن تحلّوا المعادلة، كم نقطة صفريّة توجد للدّالّة؟

أ. $y = -0.5(x - 1)^2 - 3$ ب. $y = 5(x + 9)^2$ ت. $y = -7(x + 1)^2 + 4$

3. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة وجدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحاور.

أ. $y = 2(x - 1)^2 - 8$ ب. $y = -(x + 7)^2 + 25$

4. ارسموا، في كلّ بند، رسمة تقريبيّة وجدوا إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحاور.

أ. $y = -0.5(x - 10)^2 + 8$ ب. $y = -0.1(x + 7)^2 + 0.9$ ت. $y = -0.5(x + 3)^2 + 2$

5. معطاة دالّة منَ العائلة $y = a(x - p)^2 + k$.
إحداثيّا نقطةَ الرأس للدّالّة هما $(3, -2)$.
جدوا، في كلّ بند، حسب المعطيات إحداثيّات نقاط تقاطع الخطّ البيانيّ للدّالّة مع المحاور.

أ. $a = 0.5$ ب. $a = -4$

6. معطاة دالّة منَ العائلة $y = a(x - p)^2 + k$.
جدوا التمثيلَ الجبريّ للدّالّة إذا كان معلومًا أن $a = 2$ والنقاط الصفريّة للدّالّة هما:
$(5, 0)$ وَ $(2, 0)$.

7. أ. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون معادلة محور تماثله $x = 3$.
كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟

ب. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون معادلة محور تماثله $x = 3$ وإحداثيّا نقطة الرأس هما $(3, -2)$.
كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟

ت. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون معادلة محور تماثله $x = 3$ ونقطته الصغرى $(3, -2)$.
كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟

ث. ارسموا قطعًا مكافئًا بحيث تكون معادلة محور تماثله $x = 3$ ونقطته الصغرى $(3, -2)$
ومعلوم أن قيمة a هي 2. كم قطعًا مكافئًا كهذا يمكن أن نرسم؟

8. معطاة الدّالّة $y = 2(x-3)^2 - 8$.

أ. جدوا إحداثيّات النقاط الصفريّة للدالّة ومحور تماثلها.

ب. ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدّالّة.

ت. حدّدوا موجب أم سالب دون أن تجدوا قيمًا دقيقة.

$f(7)$ $f(4)$ $f(1.5)$ $f(0)$ $f(-7)$

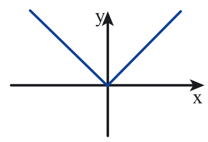
ث. اختاروا إشارة الترتيب المناسبة $<$, $>$ أو $=$ (لا توجد حاجة لتنفيذ الحسابات).

$f(2) \bigcirc f(-1)$ $f(5) \bigcirc f(1)$ $f(2) \bigcirc f(1.5)$ $f(9) \bigcirc f(3)$

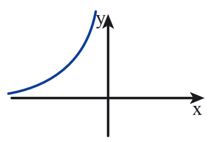
ج. جدوا، على الخطّ البيانيّ، أزواجًا مِنَ النقاط بحيث تكون قيمة y لكلّ زوج متساوية.

9. أمامكم خطوط بيانية لدوال.

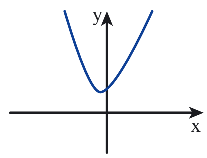
أ.



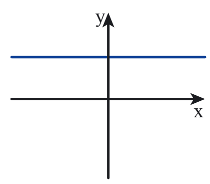
ت.



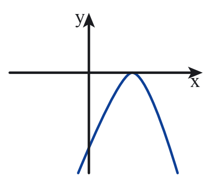
ج.



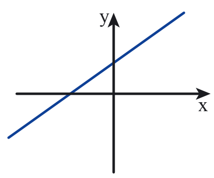
ب.



ث.



ح.



صنّفوا الخطوط البيانيّة حسب الصفات التالية (يمكن أن تكون أكثر مِن صفة واحدة للخطّ البيانيّ):

الدّالّة موجبة في كلّ المجال

توجد نقطة صفرية واحدة للدّالّة

الدّالّة تصاعديّة في كلّ المجال

10. أمامكم تمثيلات جبريّة للدوال:

أ. $y = 2x$ ت. $y = 2 + x$ ج. $y = \frac{x}{2}$ خ. $y = -(x-2)^2 + 2$

ب. $y = 2x^2$ ث. $y = 2$ ح. $y = (x-2)^2 + 2$ د. $y = 2(x-2)^2$

صنّفوا الخطوط البيانيّة حسب الصفات التالية (يمكن أن تكون أكثر مِن صفة واحدة للخطّ البيانيّ):

الدّالّة هي دالّة خطّيّة

يمرّ الخطّ البيانيّ للدّالّة في نقطة الأصل

محور تماثل الدّالّة هو $x = 2$

توجد نقطة صغرى للدّالّة

توجد نقطة صفرية واحدة للدّالّة

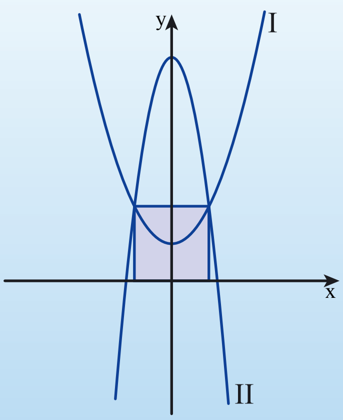
الدرس الرابع: قطوع مكافئة ومساحات

أمامكم قطعان مكافئان يصفان الدالتين:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$

$g(x) = 12 - 2x^2$

رُسم عمودان من نقطتيْ تقاطع القطعين المكافئين إلى المحاور.
اقترحوا طريقة لحساب مساحة المستطيل الناتج.



نجد إحداثيّات نقاط على الخطوط البيانيّة ونحسب مساحات.

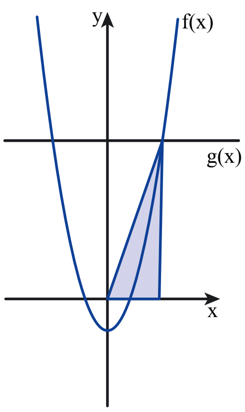
.1 نتطرّق إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. لائموا تمثيلًا جبريًّا لكلّ قطع مكافئ. اشرحوا.

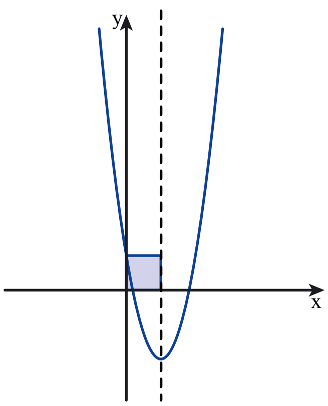
ب. جدوا إحداثيّات نقاط تقاطع القطعين المكافئين.

ت. جدوا أطوال أضلاع المستطيل، محيط المستطيل ومساحته.

ث. ما نوع المستطيل الناتج؟



.2 أمامكم خطّان بيانيّان للدّالّتين $f(x) = 2x^2 - 1$,$g(x) = 5$.
رُسم عمود من نقطة تقاطع الخطّين البيانيّين إلى المحور x
ورُبطت هذه النقطة مع نقطة الأصل لهيئة المحاور (انظروا الرسمة).
جدوا مساحة المثلّث الملوّن.
قرّبوا إجاباتكم حتّى منزلتين على يمين النقطة العشريّة.



.3 نتج القطع المكافئ الذي يظهر في الرسمة من إزاحة القطع المكافئ $y = 3x^2$ بمقدار وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتين إلى الأسفل.

أ. اكتبوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة.

ب. رُسم خطّ موازي لمحور x من نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور y.
ما نوع الشكل الرباعيّ المحصور بين هذه المستقيمات الأربعة: الموازي، محور تماثل القطع المكافئ، محور x ومحور y (الشكل الرباعيّ الملوّن في الرسمة)؟

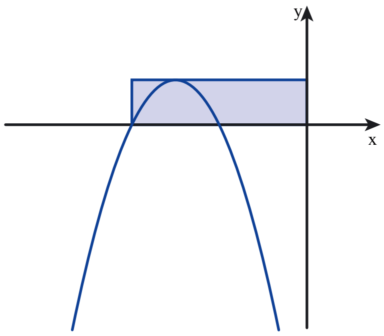
ت. احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ.

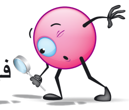
4. نتج القطع المكافئ الذي يظهر في الرسمة من إزاحة القطع المكافئ $y=-x^2$ بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أعلى.

أ. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للدالة.

ب. رُسم خطّ موازي لمحور x عبر نقطة الرأس للقطع المكافئ، ورُسم خطّ موازي لمحور y عبر إحدى النقاط الصفريّة للقطع المكافئ (انظروا الرسمة).

ت. احسبوا محيط ومساحة المستطيل الملوّن في الرسمة.





في أعقاب...

5. أمامكم خطّان بيانيّان للدالتين:

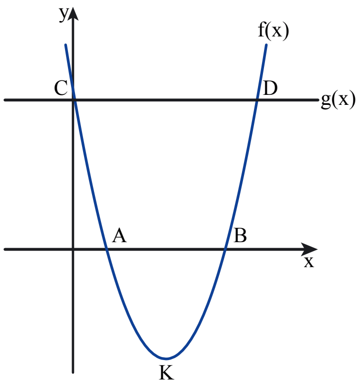
$f(x)=(x-3)^2-4$ $\qquad$ $g(x)=5$

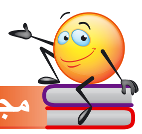
أ. جدوا إحداثيّات النقاط A, B, C, D, K

ب. ارسموا خطًّا بين A وَ B ,C وَ D.
نتج الشكل الرباعيّ ABDC.
ما نوع الشكل الرباعيّ؟ اشرحوا.

ت. احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ ABDC.

ث.احسبوا محيط الشكل الرباعيّ ABDC.



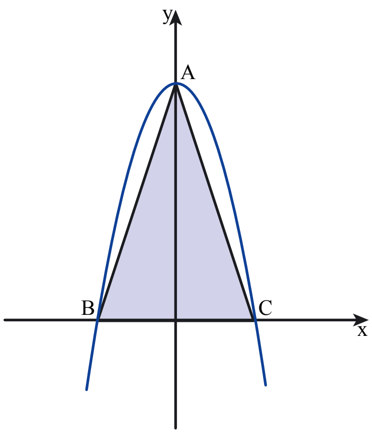


مجموعة مهامّ

1. أمامكم رسمة الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=-x^2+9$.

أ. احسبوا إحداثيّات النقاط A, B, C.

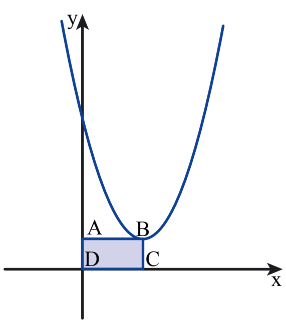
ب. احسبوا مساحة المثلّث ABC.



2. أمامكم رسمة الخطّ البيانيّ للدّالّة $y=\frac{1}{2}(x-4)^2+2$

أ. ما إحداثيّا نقطة الرأس للقطع المكافئ؟

ب. رُسم عمودان للمحاور من نقطة رأس القطع المكافئ.
احسبوا مساحة المستطيلَ الناتج (المستطيل الملوّن في الرسمة).

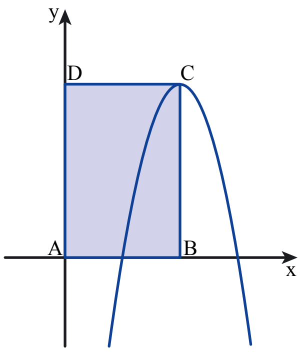


3. نتج القطع المكافئ الذي يظهر في الرسمة مِن إزاحة القطع المكافئ $y = -3x^2$ بمقدار وحدتين إلى اليمين وَ 3 وحدات إلى أعلى.

أ. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة.

ب. رُسم خطّان عموديان مِن نقطة رأس القطع المكافئ إلى المحاور (انظروا الرسمة).

احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ ABCD.



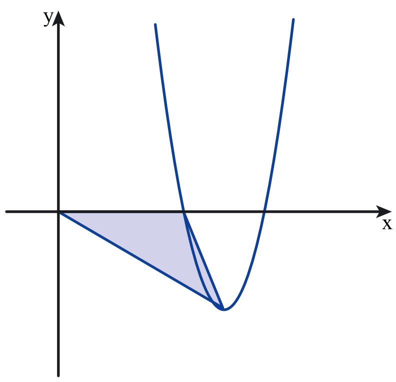
4. نتج القطع المكافئ الذي يظهر في الرسمة مِن إزاحة القطع المكافئ $y = 2x^2$ بمقدار 5 وحدات إلى اليمين وَ 3 وحدات إلى أسفل.

أ. سجّلوا تمثيلًا جبريًّا مناسبًا للدّالّة.

ب. رُسم خطّ يربط بين نقطة رأس القطع المكافئ والنقطة الصفريّة القريبة إلى محور y ورُسم خطّ يربط بين نقطة الرأس ونقطة الأصل لهيئة المحاور (انظروا الرسمة).

احسبوا مساحة المثلّث الناتج. (المثلّث الملوّن في الرسمة).

قرّبوا إجاباتكم حتّى رقمين على يمين النقطة العشريّة.



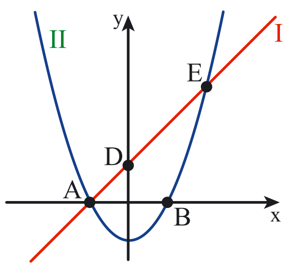
5. أمامكم خطّان بيانيّان للدّالّتين:

$f(x) = x^2 - 1 \qquad g(x) = x + 1$

أ. لائموا كلّ خطّ بيانيّ إلى الدّالّة المناسبة.

ب. جدوا إحداثيّات النقاط A, B, D, E

ت. احسبوا مساحة المثلّث DADB.



6. أمامكم خطّان بيانيّان للدّالّتين:

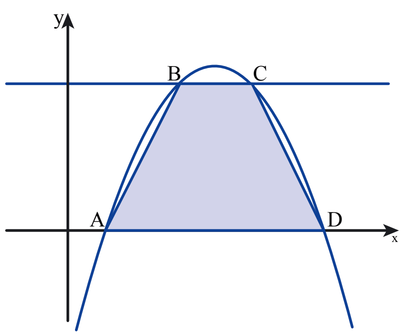
$$y = -\frac{1}{4}(x-8)^2 + 9$$

$$y = 8$$

يتقاطع الخطّان البيانيّان في النقطتين B وَ C.

يتقاطع القطع المكافئ مع محور x في النقطتين A وَ D (انظروا الرسمة).

احسبوا مساحة شبه المنحرف ABCD.



الدرس الخامس: معادلات ومسائل

وجد متنزهون بئرًا خلال جولتهم. أرادوا أن يفحصوا عُمق البئر.
رموا حجرًا إلى داخل البئر وقاسوا الزمن الذي يمرّ مِن لحظة بداية سقوط الحجر حتّى سماعهم صوت الحجر يصطدم بقاعدة البئر*.

تصف الدالة $y = 5x^2$ (بالتقريب) المسافة y (بالأمتار) التي قطعها الحجر خلال المدّة الزمنيّة لسقوط الحجر x (بالثواني).

هل تزداد أم تصغر سرعة سقوط الحجر خلال سقوط الحجر؟
أيّ قيم x مناسبة للدّالّة حسب شروط المسألة؟

نحلّ مسائل بمساعدة معادلة تربيعيّة وبمساعدة تمثيل بيانيّ.

نتطرّق في المهمّتين 1 وَ 2 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. إذا سمعنا صوت اصطدام الحجر بقاعدة البئر بعد مرور 2.5 ثواني فما عُمق البئر؟
ب. كم من الوقت يستغرق سقوط الحجر إذا كان عُمق البئر 500 م؟

2. نرمز: x - الزمن (بالثواني) الذي مرّ منذ بداية سقوط الحجر.
أ. أيّ قيم مناسبة لـ x حسب شروط المسألة؟
ب. انسخوا وأكملوا.

x (الزمن بالثواني)	0	1	2	3	5	8
y (المسافة بالأمتار)				$5 \cdot 3^2 = 45$		

3. رمى **عامر** كرة إلى أعلى.
تصف الدّالّة $\mathbf{y = -5(x-1)^2 + 20}$ ارتفاع الكرة y (بالأمتار) حسب الزمن x (بالثواني).
x يمثّل عدد الثواني منذ أن رمى عامر الكرة.
ارسموا رسمة تقريبيّة للخطّ البيانيّ للدالة وجدوا:
أ. الارتفاع الابتدائيّ الذي رمى منه **عامر** الكرة.
ب. الارتفاع الأقصى الذي وصلته الكرة.
ت. أي ارتفاع وصلت الكرة بعد مرور $\frac{1}{2}$ ثانية؟ بعد مرور ثلاث ثواني؟
ث. في أي ثوانٍ كانت الكرة على ارتفاع 15 مترًا؟

* بسبب سرعة الصوت الكبيرة نهمل الزمن الذي يمرّ حتّى يصل الصوت مِن أسفل البئر إلى أُذننا.

تتغيّر وتيرة سقوط الأجسام من كوكب إلى آخر، وهي متعلّقة بقوّة الجاذبيّة للكوكب.
نرمز إلى هذا العدد بالحرف **g** ونسمّيه تسارع السقوط الحر (باللغة الإنجليزيّة: Free Fall Acceleration).

يصف التعبير $y=\frac{1}{2}gx^2$ المسافة (y) التي يقطعها الجسم خلال زمن معيّن (x).

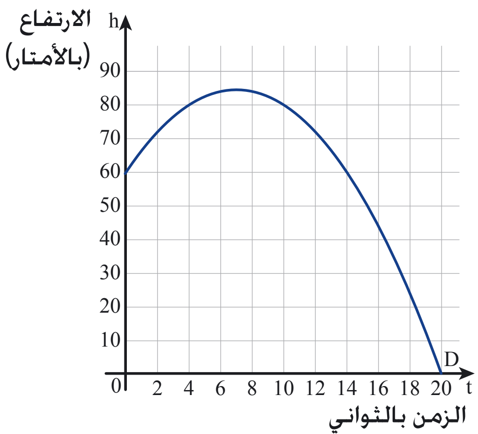
x يمثّل الزمن الذي يقطعه الجسم (بالثواني) منذ لحظة السقوط، y يمثّل المسافة (بالأمتار).

يظهر في الجدول العدد الذي يحدّد وتيرة سقوط أجسام موجود بالقرب من سطوح أجرام سماوية مختلفة.

الجرم السماويّ	الشمس	الكرة الأرضيّة	القمر	المريخ (مارس)	الزهرة (فينوس)	زُحل (ستورن)	المشتري (يوفيتر)
تسارع السقوط الحرّ g (بالأمتار/ثواني²)	274	9.81	1.63	3.71	8.87	10.5	24.9

مثلًا: تسارع السقوط الحرّ على سطح القمر أصغر 6 أضعاف من تسارع السقوط الحرّ على سطح الكرة الأرضيّة.
لذا؛ تسقط الأجسام على القمر ببطء مقارنة بالكرة الأرضيّة.

4. أمامكم خطّ بيانيّ لدالّة $h(t)=-\frac{1}{2}(t-7)^2+84.5$ تصف ارتفاع تحليق طير فوق الأرض (بالأمتار) خلال الزمن t (بالثواني). t يمثّل الزمن الذي تمّ قياسه منذ لحظة بداية تحليق الطير.



أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. عوّضوا $t = 0$ وجدوا النقطة المناسبة على الخطّ البيانيّ.
ما معنى النقطة في سياق المسألة؟

ت. بعد مرور كم من الثواني يعود الطير إلى الارتفاع الذي بدأ منه بالتحليق؟

ث. جدوا، إذا كان الأمر ممكنًا، بعد كم ثانية، تقريبًا، يكون الطير على ارتفاع 72 م؟ 24 م؟ 90 م؟

ج. جدول رأس القطع المكافئ.
ما معنى رأس القطع المكافئ في سياق المسألة؟ ?

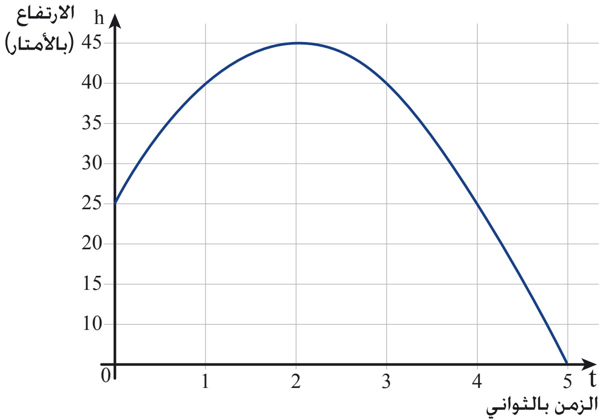
ح. ما معنى النقطة D في سياق المسألة؟

معنى التعبير "نظرة من تحليق الطير" هو وصف غير مفصّل، نستعمل هذا التعبير عادة لوصف تصوير المناظر من ارتفاع عالي ونقول: "صور من نظرة تحليق الطير". تُعطي هذه الصور نظرة عامة ومثيرة الاهتمام عن المكان، لكن لا نميّز فيها تفاصيل دقيقة دائمًا.

معهد وايزمن للعلوم " نظرة من تحليق الطير"

مجموعة مهامّ

1. رُمِي حجر من طرف سطح بناية ارتفاعها 25 مترًا إلى أعلى وسقط الحجر على الأرض.
الدّالّة التي تناظر بين عدد الثواني (t) التي مرّت مِنَ اللحظة التي رُمِي فيها الحجر والارتفاع بالأمتار عن سطح الأرض (h) هي: $h(t) = -5(t-2)^2 + 45$.



أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. بعد مرور كم ثانية تقريبًا وصل الحجر الارتفاع الذي رُمِي منه؟

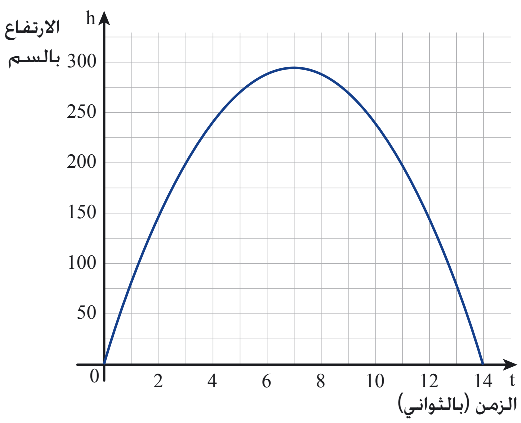
ت. بعد مرور كم ثانية وصل الحجر ارتفاع 15 مترًا؟ 40 مترًا؟

ث. بعد مرور كم ثانية وصل الحجر الأرض؟

ج. ما إحداثيّا رأس القطع المكافئ؟

ح. ما معنى الرأس في سياق المسألة؟

2. يتمرّن رياضيّ على القفز إلى أعلى بالزانة (بواسطة عصا).
الدّالّة التي تناظر بين عدد الثواني (t) التي مرّت من لحظة القفز والارتفاع الذي وصله الرياضيّ بالسم فوق سطح الأرض (h) هي: $h(t) = -6(t-7)^2 + 294$



أ. أيّ قيم مناسبة لـ t حسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. كم من الوقت استمرّ القفز؟

ت. بعد مرور كم مِنَ الوقت وصل الرياضيّ الارتفاع الأقصى؟ ما الارتفاع الأقصى الذي وصله؟

ث. كم مرّة وصل الرياضيّ ارتفاع 200 سم خلال القفز؟ اشرحوا.

3. حدّدوا، في كلّ بند، دون أن تحسبوا عدد النقاط الصفريّة للدّالّة (يمكنكم الاستعانة برسمة تقريبيّة مناسبة للقطع المكافئ). احسبوا إحداثيّات النقاط الصفريّة وافحصوا إجاباتكم.

أ. $y = -3(x-1)^2 - 3$

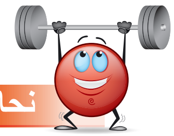
ب. $y = 64 - 2x^2$

ت. $y = -x^2 + 1$

ث. $y = 8(x+6)^2 - 2$

ج. $y = 2(x+6)^2$

ح. $y = 8x^2$



نحافظ على لياقة رياضيّة

النسبة

1. النسبة بين عدد البنين إلى عدد البنات في الصفّ التاسع هي 5:3.
أ. ما عدد البنات إذا كان عدد البنين في الصفّ التاسع 15؟
ب. ما عدد البنين إذا كان عدد البنات في الصفّ التاسع 15؟
ت. يوجد في الصف التاسع 32 تلميذًا. ما عدد البنين وما عدد البنات؟

2. النسبة بين عدد التلاميذ الذين نجحوا في الامتحان إلى عدد التلاميذ الذين فشلوا هي 4:3.
نجح 36 تلميذًا في الامتحان.
ما عدد التلاميذ الذين نفّذوا الامتحان؟

3. يوجد في الصندوق 24 حبّة برتقال وكريبفروت.
أ. هل يمكن أن تكون النسبة بين عدد حبّات البرتقال إلى عدد حبّات الكريبفروت 6:5؟ اشرحوا.
ب. سجّلوا نسبة ممكنة بين عدد حبّات البرتقال إلى عدد حبّات الكريبفروت في الصندوق.
ما عدد حبّات البرتقال إلى عدد حبّات الكريبفروت حسب النسبة التي سجّلتموها؟ بيّنوا الحسابات.

4. اشترى **عمر** و**عدنان** بطاقة يانصيب سعرها 70 شاقلا.
دفع **عمر** 20 شاقلًا ودفع **عمر** 50 شاقلًا.
كيف يتقاسما الجائزة إذا فازا بمبلغ 1,400 شاقل؟

5. يوجد في جرّة 16 كرة سوداء وَ 12 كرة زرقاء.
أ. ما النسبة بين عدد الكرات السوداء إلى عدد الكرات البيضاء في الجرّة؟
ب. نختار كرة دون أن ننظر في الجرّة:
- ما احتمال أن نختار كرة بيضاء؟
- ما احتمال أن نختار كرة سوداء؟

6. النسبة بين مقدار الزوايا في المثلّث هي 3:2:1. احسبوا مقدار كلّ زاوية في المثلّث.

7. النسبة بين زوج مِنَ الزوايا المتجاورة في متوازي الأضلاع هي 5:4. احسبوا مقدار الزوايا في متوازي الأضلاع.

8. النسبة في مثلّث قائم الزاوية بين طولِي القائمين هي 12:5، وطول القائم الصغير هي 2.5 سم.
ما النسبة بين طول القائم الكبير وطول الوتر؟

9. محيط مستطيل هو 70 سم. النسبة بين أطوال أضلاع المستطيل هي 3:2.
احسبوا مساحة المستطيل.