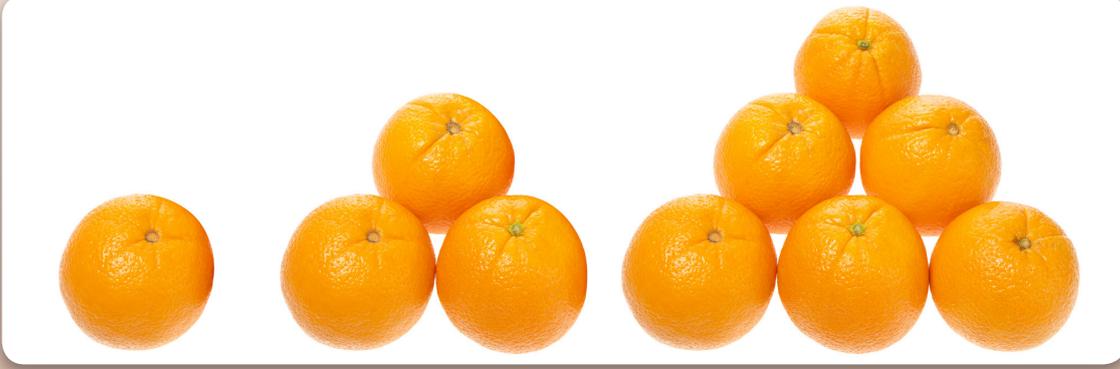


8.4 أعداد مثلثة وأعداد رباعية السطوح

اشترى داوود وأمه برتقالاً من السوق. نظّم بائع الفواكه البرتقال في مبانٍ أشكالها تشبه المثلثات.



أراد داوود أن يعرف كم حبة برتقال تكون في المثلث الرابع؟
ما هو عدد حبات البرتقال في كل "مثلث"؟ سجّلوا متواليّة الأعداد من الصغير إلى الكبير.

إذا استطعنا أن نرتّب كمّيّة معيّنة من الأغراض على شكل مثلث فإننا نسمّي العدد المناسب لهذه الكمّيّة بـ:
"عدد مثلث".

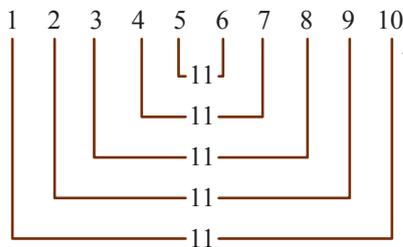
يمكن أن نسجّل ونحسب عدد مثلث كمجموع أعداد متتالية، ابتداءً من العدد 1.

1. سجّلوا الأعداد الثمانية الأولى المثلثة.

2. العدد المثلث الـ 100 هو 5,050.

أ. ما هو العدد المثلث الـ 101؟

ب. كيف يمكن أن نحسب العدد المثلث الـ n ، إذا كان العدد المثلث الـ $(n - 1)$ معلوماً؟



3. أ. إحسبوا حسب "الطريقة" المشار إليها في رسمة الأعداد المثلثة المختلفة.

ب. حاولوا أن تجدوا تعبيراً جبرياً يمثّل العدد المثلث الـ n ، وهذا

يعني مجموع الأعداد الطبيعيّة من 1 حتّى n .



كان كارل فريديخ جاوس (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) رياضياً ألمانياً، وقد اعتبر أحد الرياضيين الكبار في جميع الأجيال. عندما كان جاوس في سن التاسعة، طلب المعلم من تلاميذه أن يجمعوا الأعداد الطبيعية من 1 حتى 100، وقد قدر المعلم أن يحتاج التلاميذ درساً واحداً كاملاً على الأقل. لكن بعد مرور عدة ثوانٍ، عرض جاوس الصغير لمعلمه النتيجة 5,050. وقد شرح لمعلمه المندهش أنه إذا جمعنا بأزواج العدد الأول والأخير، العدد الثاني والعدد قبل الأخير وهكذا دواليك، فإنه يحصل على 50 زوجاً من الأعداد التي مجموع كل زوج منها هو 101 (1 + 100 = 2 + 99 = ... = 50 + 51). وهكذا استنتج أن نتيجة تمرين المعلم هي 5,050 (= 50 · 101).



4. بنى متوالية الأعداد المثلثة بواسطة جدول إلكتروني (مثلاً: Excel).

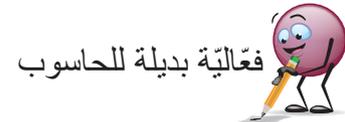
| | A | B | C |
|----|----|----|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 3 | |
| 3 | 3 | 6 | |
| 4 | 4 | 10 | |
| 5 | 5 | | |
| 6 | 6 | | |
| 7 | 7 | | |
| 8 | 8 | | |
| 9 | 9 | | |
| 10 | 10 | | |

أ. أكتبوا في العمود الأول الأعداد الطبيعية من 1 حتى 30.

ب. سجّلوا، في العمود الثاني، أول 30 عدداً مثلثاً من المتوالية: أكتبوا صيغة مناسبة لحساب العدد المثلث (أنظروا المهمة 2ب)، ثم جرّوها.

ت. سجّلوا، في العمود الثالث (بطريقة أخرى)، أول 30 عدداً مثلثاً من المتوالية: أكتبوا صيغة مناسبة أخرى لحساب العدد المثلث (أنظروا المهمة 3ب)، ثم جرّوها.

ث. قارنوا بين المتواليتين اللتين بنيتموهما في البندين ب و ت.

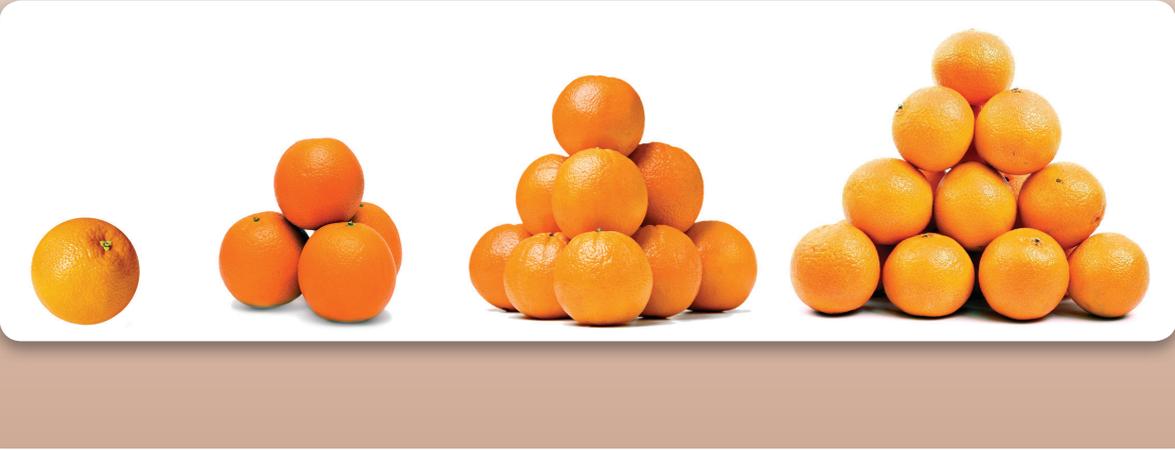


5. أ. سجّلوا متوالية الأعداد المثلثة العشرة الأولى. احسبوا كل واحد من الأعداد بمساعدة العدد المثلث السابق له في المتوالية، حسب القاعدة التي وجدتموها في مهمة 2.

ب. احسبوا الأعداد المثلثة العشرة الأولى بمساعدة الصيغة التي وجدتموها في مهمة 3.

ت. قارنوا بين المتواليتين اللتين بنيتموهما في البندين أ و ب.

قرّر بائع البرتقال في السوق أن يرتّب بضاعته في متواليّة "أهرامات" مثيرة للاهتمام: فقد وضع فوق كلّ مثلث (أنظروا سؤال الافتتاحية) طبقة برتقال مثلثة أصغر، وهذا يعني أنّ كلّ مثلث أصغر من المثلث الذي تحته (أنظروا الصورة). حصل البائع بهذه الطريقة على متواليّة "أبراج" من البرتقال التي تشبه رباعيّ السطوح (أهرامات مثلثة). نسمّي عدد حبّات البرتقال (أو الكرات) التي يمكن ترتيبها في أكوام تشبه رباعيّ السطوح بـ: "أعداد رباعيّة"



6. أ. أكملوا الجدول. إستعينوا بأكوام البرتقال:

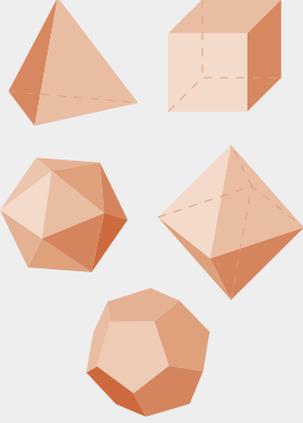
| المكان | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------|---|---|---|---|---|
| عدد مثلث | 1 | 3 | | | |
| عدد رباعيّ | 1 | 4 | | | |

ب. العدد الرباعيّ الـ 15 هو 680. ما هو العدد الرباعيّ الـ 16؟

7. يمكن أن نحسب العدد الرباعيّ الذي يقع في المكان n في المتواليّة كالتالي:

$$\frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{6} \quad (n \geq 1, \text{ عدد طبيعي}).$$

إحسبوا، بواسطة التعبير، "العدد الرباعيّ" الـ 15 والـ 16، وافحصوا إجابتكم للمهمّة السابقة.



رباعي السطوح المنتظم هو جسم سطوحه أربعة مثلثات متساوية الأضلاع. رباعي السطوح المنتظم هو أحد متعدّدات السطوح المنتظمة الخمسة: رباعي السطوح، المكعب، ثماني السطوح، إثنا عشري السطوح وعشروي السطوح (أنظروا الصورة). متعدّد السطوح المنتظم هو جسم محدّب مبني من مضلّعات منتظمة، من نفس النوع، إذ يلتقي نفس عدد المضلّعات في كلّ رأس من رؤوسه. أفلاطون: فيلسوف ورياضي، عاش في اليونان قبل حوالي 2,500 سنة، ادّعى أنّ متعدّدات السطوح المنتظمة هي تجسيد الجمال بسبب كمال تماثلها. آمن أفلاطون أنّ الأجسام المنتظمة ترمز إلى العناصر التي تكوّن العالم.

8. تمعنوا في مثلث باسكال أدناه.

أ. جدوا في مثلث باسكال متوالية الأعداد المثلثة ومتوالية الأعداد الرباعيّة.

ب. جدوا في مثلث باسكال:

- مجموع أوّل عددين مثلثين.
- مجموع أوّل 3 أعداد مثلثة.
- مجموع أوّل 4 أعداد مثلثة.

ت. عمّموا واشرحوا: يقع مجموع أوّل n أعداد مثلثة في مثلث باسكال في المكان الـ $___$ ، في السطر رقم $___$.

| | | | | | | | | |
|---|---|----|----|----|---------|----|---|---|
| 1 | | | | | السطر 0 | | | |
| 1 | 1 | | | | السطر 1 | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | السطر 2 | | | |
| 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 |



نصل رباعيّ سطوح منتظم من زجاج بالطريقة الآتية: نربط بين منتصفات الأضلاع الثلاثة التي تخرج من رأس واحد، ونقص الهرم الناتج. نكرّر هذه العملية في كلّ رأس من رؤوس رباعيّ السطوح. ما هو الجسم الناتج بعد الصقل؟