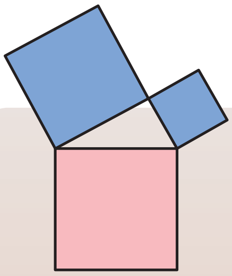
7.2 أبراج فيثاغوروس - بواسطة الحاسوب

صيغة بديلة للفعّاليّة 7.1



بيّنت نظريّة فيثاغوروس أنّ مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيّين على قائمَيْ مثلّث قائم الزاوية يساوي مساحة المربّع المبنيّ على وتر المثلّث قائم الزاوية.

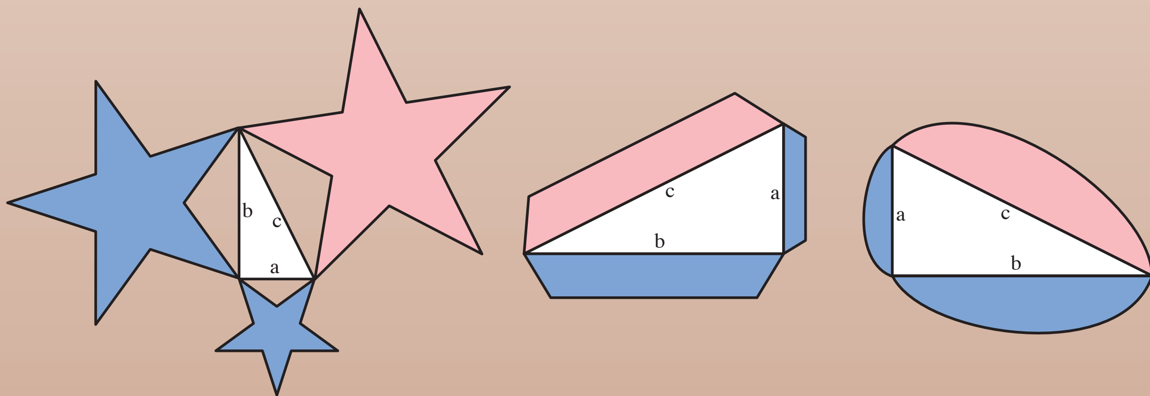
بصياغة أخرى: إذا كان طولا القائمين في مثلّث قائم الزاوية هما a وَ b، وطول الوتر هو c، فإنّ: $a^2 + b^2 = c^2$.

منذ مئات السنين قبل فترة فيثاغورس، أي زمن البالبليين، والمصريين القدماء، والصينيين كانت العلاقة بين وحدات معيّنة في المثلّثات القائمة الزاوية معروفة. لكن الرياضيّين اليونانيّين كانوا أوّل من عمّموا الصيغة الرياضيّة لنظريّة فيثاغوروس، وقد عملوا لإيجاد برهان عام. ظهرت نظريّة فيثاغورس وبرهانها في كتاب أقليدس المعروف **الأُسس**.

وقد وُجد في نفس الكتاب **توسّع لنظريّة فيثاغوروس:**

إذا كان هناك شكلان متشابهان على ضلعيْ مثلث قائم الزاوية فإنّ مجموع المساحتين الصغيرتين يساوي المساحة الكبيرة.

توجد عدّة أمثلة لهذا التعميم في الرسومات الآتية:

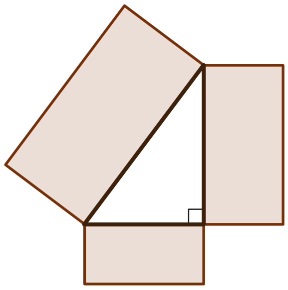


نفحص ما إذا كانت نظريّة فيثاغوروس الموسّعة صحيحة للأشكال المختلفة المبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.

بُنيّت أشكال على أضلاع المثلّث قائم الزاوية في المهمّتين 1 وَ 2 . في كلّ مهمّة:

- اِفتحوا التطبيق المناسب في موقع الرياضيّات المدمجة "قسم تفوّق رحوبوت" **(מדור מצוינות רחובות).**
- غيّروا قياسات المثلّث (بواسطة جرّ النقاط الحمراء)، وقيسوا أطوال ومساحات.
- اِفحصوا هل نظريّة فيثاغوروس الموسّعة صحيحة في هذه الحالة؟

مستطيلات



1. بُنيت **مستطيلات متشابهة** على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.

أ. اِفتحوا التطبيق: "مستطيلات 1" "**מלבנים 1**".

- ما هي النسبة بين الأضلاع في كلّ مستطيل؟
- اِستمرّوا حسب التعليمات الّتي تظهر في بداية الفعّاليّة.

ب. اِفتحوا التطبيق: "مستطيلات 2" "**מלבנים 2**".

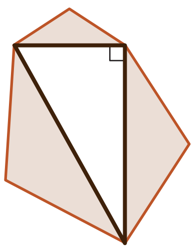
- ما هي النسبة بين الأضلاع في كلّ مستطيل؟
- اِستمرّوا حسب التعليمات الّتي تظهر في بداية الفعّاليّة.

ت. هل نظريّة فيثاغوروس الموسّعة صحيحة لكلّ ثلاثة مستطيلات متشابهة مبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية؟

برهنوا ادعاءكم بطريقة جبريّة. يمكن استعمال نظريّة فيثاغورس الأصليّة.

اِنتبهوا! النسبة في المستطيلات المتشابهة بين ضلعين متجاورين في كلّ مستطيل هي نسبة ثابتة.

مثلثات

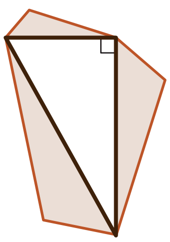


2. أ. بُنيت **مثلّثات متساوية السّاقين متشابهة** على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.

- اِفتحوا التطبيق: "مثلّثات متساوية السّاقين" "**משולשים שווי-שוקיים**".
- اِستمرّوا حسب التعليمات الّتي تظهر في بداية الفعّاليّة.

ب. بُنيت **مثلّثات متشابهة** على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.

- اِفتحوا التطبيق: "مثلّثات معيّنة" "**משולשים כלשהם**".
- اِستمرّوا حسب التعليمات الّتي تظهر في بداية الفعّاليّة.



ت. هل نظريّة فيثاغوروس الموسّعة صحيحة لكلّ ثلاثة مثلّثات متشابهة مبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية؟ برهنوا ادعاءكم.

يمكن إكمال المثلّثات إلى مستطيلات (أُنظروا الرسمة)، والاعتماد على المهمّة 1ت.

ث. استمرّوا في التطبيق "مثلّثات معيّنة". غيّروا قياسات المثلّث قائم الزاوية، بحيث تكون مساحة أحد المثلّثات الثلاثة (المبنيّة على الأضلاع) حوالي رُبع مساحة المثلّث الثاني.

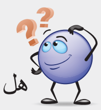
ما هي النسبة بين مساحة المثلّث الأول ومساحة المثلّث الثالث؟

اِشرحوا لماذا تتحقّق هذه المساواة؟ ميِّزوا بين إمكانيّتين مختلفتين.

3. في مركز الاستجمام "بركة الدولفين"، توجد قطعة أرض مغطاة بالعشب الأخضر، شكلها مثلّث قائم الزاوية. أرادوا أن يبنوا حول هذه القطعة ثلاث برك لها نفس الشكل والعمق، لكن بأحجام مختلفة. ستعمل بركتان في فصل الصيف فقط، والبركة الثالثة ستعمل في فصل الشتاء فقط. لتوفير المياه، تتدفّق المياه في نهاية الصيف من بركتي الصيف إلى بركة الشتاء، وتعود في نهاية الشتاء إلى نفس الارتفاع الّذي كان في بركتي الصيف.

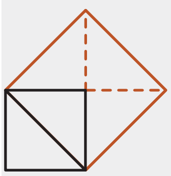
أ. أُرسموا اقتراحًا لتصميم شكل البرك الثلاث حسب الشروط المطلوبة. سجِّلوا قياسات مناسبة لاقتراحكم.

ب. نفّذوا مسابقة للاقتراح الأفضل.



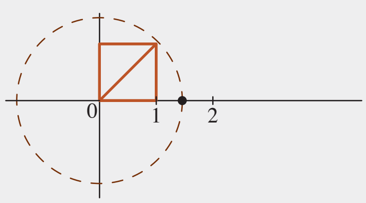
هل تعلمون؟

يعتقد كثيرون أنّ نظريّة فيثاغورس هي نظريّة تتطرّق إلى العلاقة بين ثلاثة أعداد تمثِّل أطوال أضلاع مثلّث قائم الزاوية. تطرّق الرياضيّون اليونانيّون إلى نظرية فيثاغوروس كنظريّة حول العلاقة بين المساحات فقط، ولم يتطرّقوا إلى القيم العدديّة للمساحات. لقد عرفوا المقارنة بين مساحات وإيجاد المساحة الّتي تساوي مجموع أو فرق مساحات معروفة، لكن لم يعرفوا جميع الأعداد. تناولوا أعدادًا صحيحة فقط وأعدادًا نسبية (الأعداد الّتي تساوي خارج القسمة بين عددين صحيحين)، مثلًا: عرفوا أن مساحة المربّع المبني على قُطر مربّع الوحدة (مربّع قياساته 1×1) هي وحدتان مربّعتين، لكن لم يعرفوا كيفيّة التّطرق إلى طول ضلع هذا المربّع، وتمثيله.



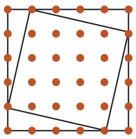
يمكن إيجاد مكان هذا العدد على محور الأعداد بواسطة رسم دائرة مركزها في أحد رؤوس مربّع الوحدة، ونِصف قطرها كطول قُطر المربّع (أُنظروا الرسمة).

نبعت صعوبة اليونانيّين من أن طول هذا الضلع (الّذي يساوي أقلّ بقليل من $1\frac{1}{2}$ وحدة طول) لا يمكن التّعبير عنه كجزء (وهذا يعني ككسر) معيّن من وحدة الطّول (الّتي هي طول ضلع مربّع الوحدة).



نحافظ على لياقة رياضيّة

1. اِحسبوا مساحة المربّع الداخليّ بطريقتين:



- بواسطة نظريّة فيثاغوروس.
- دون استعمال نظريّة فيثاغوروس.

أي طريقة - حسب رأيكم - هي الطريقة الأنجع؟

2. طولا قائمَيْ مثلّث قائم الزاوية هما 15 سم وَ 20 سم. طول الارتفاع على الوتر هو 12 سم. جدوا محيط المثلّث ومساحته.

3. **للتذكير:** القطران في المعين متعامدان.
طولا القطرين في المعيّن هما 10 سم وَ 24 سم. جدوا محيط المعين ومساحته.

لعبة

4. " **أكملوا إلى مربّع**" لعبة لمشتركين.

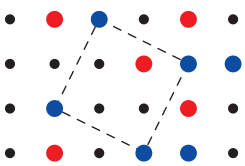
محتويات اللّعبة: شبكة من النقاط (صوروا الورقة الّتي تظهر في نهاية الفعّاليّة أو ضعوا عليها ورقة شفّافة).

هدف اللّعبة: بناء مربّعات.

سير اللّعبة: يختار كلّ مشترك، بدوره، نقطة واحدة على الشّبكة، ويلوّنها باللّون الّذي يختاره.

الفائز: المشترك الأوّل الّذي يكوّن أربع نقاط تشكّل مربّعًا. قد يكون المربّع في حالة دوران، ومن كلّ كبر.

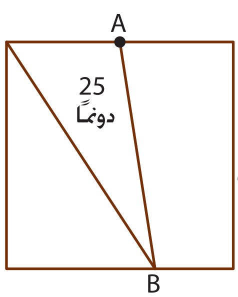
مثال لفوز اللّاعب الأزرق



أحجية

أُحجية هنديّة قديمة*

كان لمزارع هندي يهوى الرياضيّات ثلاثة أبناء. الولدان الكبيران توأمان.
أراد المزارع أن يقسّم قطعة الأرض مربّعة الشكل على أبنائه الثلاثة، بحيث تكون مساحة قسمي التوأمين متساوية. رمز المزارع إلى نقطة منتصف أحد أضلاع قطعة الأرض بالحرف A، ورسم خطًّا حتّى نقطة معيّنة (B) على الضلع المقابل.
حصل الابن الصغير على قسم داخليّ شكله مثلّث ومساحته 25 دونمًا،
أما القسمان المتبقيان اللّذان تتساوى مساحتاهما فقد وزّعهما على التوأمين.
أين تقع النّقطة B الّتي اختارها المزارع؟



* تعتمد على أُحجية من موقع مركز معلّمي الرياضيّات القطريّ للمرحلة فوق الابتدائيّة.

شِبّاك للّعبة: أكملوا إلى مربّع