

1.2 حواصل جمع



معطى ثلاثة حواصل جمع.

مجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى هو:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

مجموع مربع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى هو:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

مجموع مكعب (أس ثلاث) الأعداد الطبيعية العشرة الأولى هو:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3$$

حاولوا أن تقدروا نتيجة كل حاصل جمع.

نستعمل، في الفعاليّة، وحدة مربع العدد أو مكعب العدد كي نبحت حواصل الجمع، ونجد طريقة قصيرة لحساب حواصل جمع كهذه لعدد مختلف من المضافات.

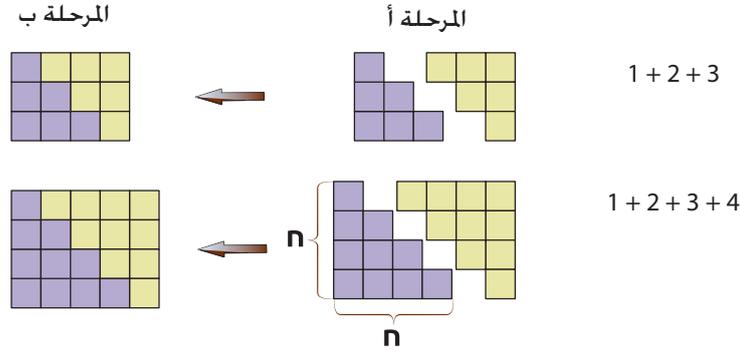


كان في عائلة برنولي السويسرية رياضيون كثيرون. من بينهم كان يعقوب برنولي (Jakob Bernoulli 1705-1654). كان والد يعقوب برنولي مواطناً مهماً في مدينة بازل، وقد أراد أن يتعلم ابنه علم اللاهوت، لكن ابنه اهتم بموضوعي الرياضيات وعلم الفلك منذ نعومة أظافره. أنشأ برنولي سنة 1682 مدرسة فيزياء تجريبية، وفي سنة 1687 عُيّن استاذاً لموضوع الرياضيات في جامعة بازل. وقد عمل في وظيفته حتى مماته. وكان برنولي قد طلب قبل وفاته أن يرسموا على قبره منحني دالة رياضية. كانت مساهمات برنولي كثيرة في موضوعي الفيزياء والرياضيات.

اكتشف برنولي قاعدة رياضية عامّة لحساب مجموع قوى معينة لأعداد طبيعية متتالية ابتداءً من العدد 1.

مجموع الأعداد الطبيعية

1. أمامكم رسومات تعرض الطريقة الحسابية لإيجاد مجموع n أعداد طبيعية متتالية ابتداءً من العدد 1.

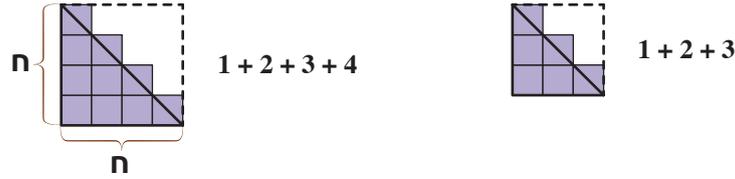


أ. ارسموا، في دفاتركم، رسمة تعرض الطريقة نفسها لإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية الخمسة الأولى.

ب. احسبوا مجموع الأعداد الطبيعية الـ 100 الأولى.

ت. اكتبوا تعبيراً جبرياً لحساب مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى، حسب الطريقة المعروضة.

2. تعرض الرسومات التالية طريقة إضافية لحساب مجموع أعداد طبيعية متتالية ابتداءً من العدد 1.



أ. احسبوا بهذه الطريقة مجموع الأعداد الطبيعية الخمسة الأولى.

ب. اكتبوا تعبيراً جبرياً لحساب مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى، حسب الطريقة المعروضة.

هل يساوي التعبير الذي وجدتموه التعبير الذي حصلتم عليه في المهمة السابقة؟

3. أ. احسبوا مجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى بثلاث طرق مختلفة.

أيّة طريقة حسابية كانت الأسرع؟

ب. أمامكم فكرة لطريقة إضافية لحساب مجموع الأعداد الطبيعية العشرة الأولى.

$$\begin{array}{r}
 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \\
 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\
 \hline
 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11
 \end{array}$$

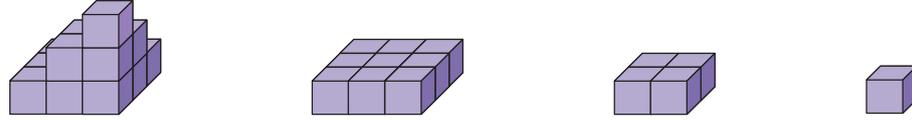
لأيّ مثال هندسيّ هذه الطريقة مناسبة؟

4. أ. كم عددًا طبيعيًا متتاليًا يجب أن نجمع ابتداءً من العدد 1 كي يكون مجموعها 210؟

ب. كم عددًا طبيعيًا متتاليًا يجب أن نجمع ابتداءً من العدد 6 كي يكون مجموعها 105؟

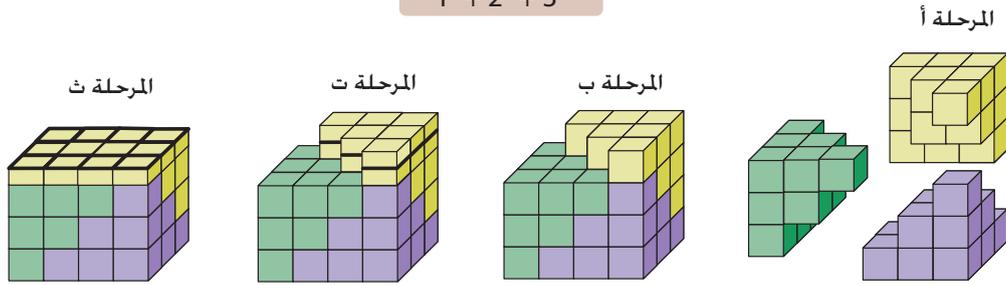
مجموع مربع الأعداد

5. أمامكم مكعبات تعرض مربعات أعداد طبيعية ابتداءً من العدد 1، حيث يعرض المبنى الذي على يسارها مجموع مربعات هذه الأعداد.

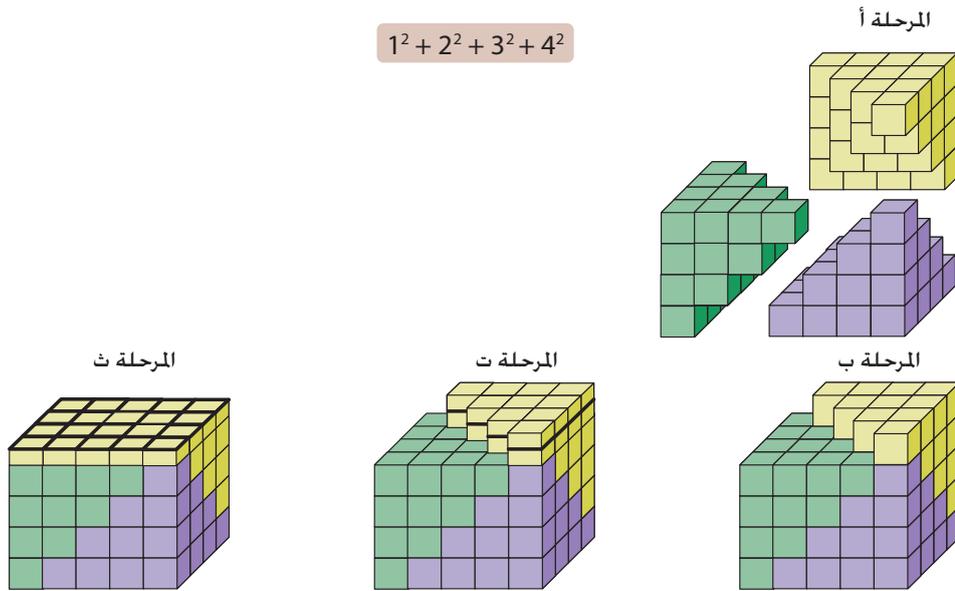


أمامكم طريقة حسابية لحساب مجموع مربعات n أعداد طبيعية متتالية ابتداءً من العدد 1.

$$1^2 + 2^2 + 3^2$$



$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$



أ. استعملوا هذه الطريقة كي تكتبوا كحاصل ضرب، وتحسبوا مجموع $1^2 + 2^2 + 3^2$.

ب. ماذا تكون قياسات الصندوق الناتج بواسطة تركيب ثلاثة "أهرامات" كهذه ارتفاعها 6 وحدات؟

ت. استعملوا هذه الطريقة كي تكتبوا كحاصل ضرب، وتحسبوا مجموع

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2$$

افحصوا بواسطة الآلة الحاسبة.

ث. عمّموا هذه الطريقة لحساب مجموع مربعات n الأعداد الطبيعية الأولى.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2$$

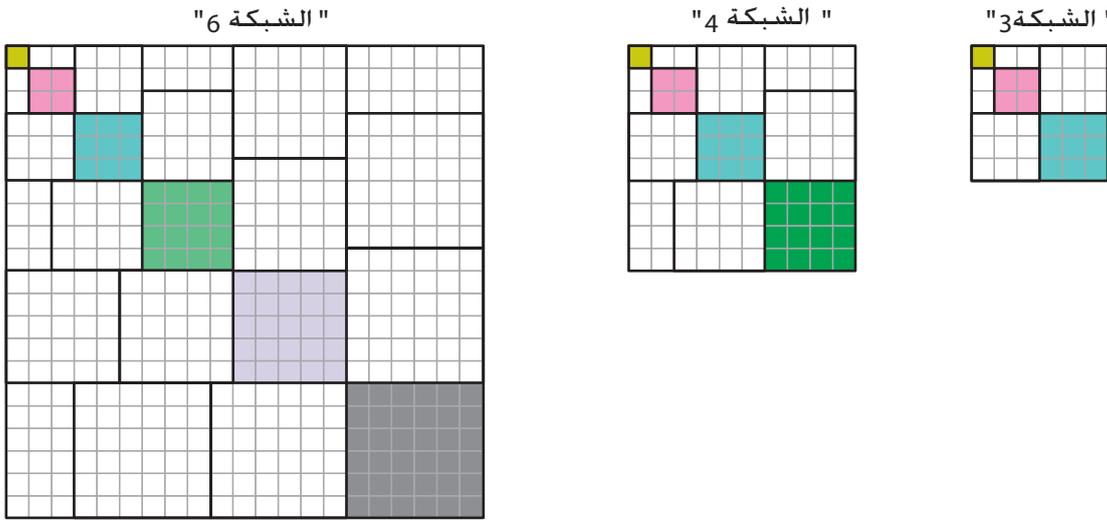


ج. سجّلوا العدد 1240 كمجموع مربع أعداد بواسطة استعمال الآلة الحاسبة وعملياتي الضرب والقسمة فقط.

مجموع مكعب (أس 3) الأعداد الطبيعية

6. معطى متوالية شبكات تربيعات.

أمامكم الشبكة الثالثة، الرابعة والسادسة في المتوالية.



أ. طول ضلع كلّ تربيعة هو وحدة واحدة.

عبروا عن مساحة الشبكة 3 والشبكة 4 بواسطة الطريقتين التاليتين:

- كمجموع مساحات الأقسام.

- كمساحة المربع الناتج بواسطة حدود الشبكة.

افحصوا هل حصلتم على نتائج متساوية في الطريقتين؟

ب. جدوا مساحة الشبكة 6 بطريقتين مختلفتين.

ت. جدوا مساحة الشبكة 10 بطريقتين مختلفتين.

ث. عمّموا وجدوا مساحة الشبكة n بطريقتين مختلفتين.

ج. أمامكم متساويات، أيّ منها صحيحة؟ اشرحوا كيف وجدتم؟

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^2$$

ح. احسبوا $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 20^3$ بواسطة استعمال الآلة الحاسبة وعملياتي الضرب والقسمة فقط.



ح. سجّلوا العدد 14,400 كمجموع مكعب أعداد.



7. استعملوا جدول إلكترونيّ (مثلاً: Excel) كي تفحصوا المتساويات التي وجدتموها لحواصل الجمع المختلفة.

إرشاد: حضّروا جدولاً كالجدول التالي:

	A	B	C	D	E	F
	الأعداد الطبيعية	مجموع الأعداد الطبيعية	مربع الأعداد الطبيعية	مجموع مربع الأعداد الطبيعية	مكعب الأعداد الطبيعية	مجموع مكعب الأعداد الطبيعية
2	1	1	1	1	1	1
3						

• أكملوا الأعمدة A, C و E.

• لإكمال عمود حاصل جمع أعداد طبيعيّة، على سبيل المثال، سجّلوا في الخلية B3 القاعدة $= B2 + A3$

ثمّ جرّوها. يضيف الحاسوب إلى المجموع العدد الطبيعيّ التالي في الدور، حتّى مكان معيّن.

• اعملوا بالطريقة نفسها كي تكملوا سائر أعمدة حواصل الجمع.

• افحصوا الحسابات التي نفذتموها في الفعاليّة.



نحافظ على لياقة رياضيّة

1. تعلّمنا في الفعاليّة أنّ

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)^2 = \frac{(1+n)^2 n^2}{4} = \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right)^2$$

اكتبوا ستة تعابير جبريّة مختلفة إضافية تساوي التعابير المعطاة.



في أيّ رقم تنتهي نتيجة حاصل الجمع التالي؟

$$7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{49}$$

في أيّ رقمين تنتهي نتيجة حاصل الجمع؟