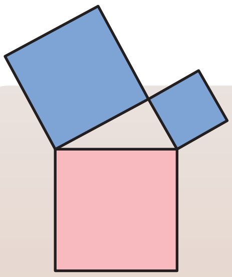
الوحدة السابعة: نظرية فيثاغورس

7.1 أبراج فيثاغورس - دون استعمال الحاسوب

صيغة بديلة للفعّاليّة 7.2

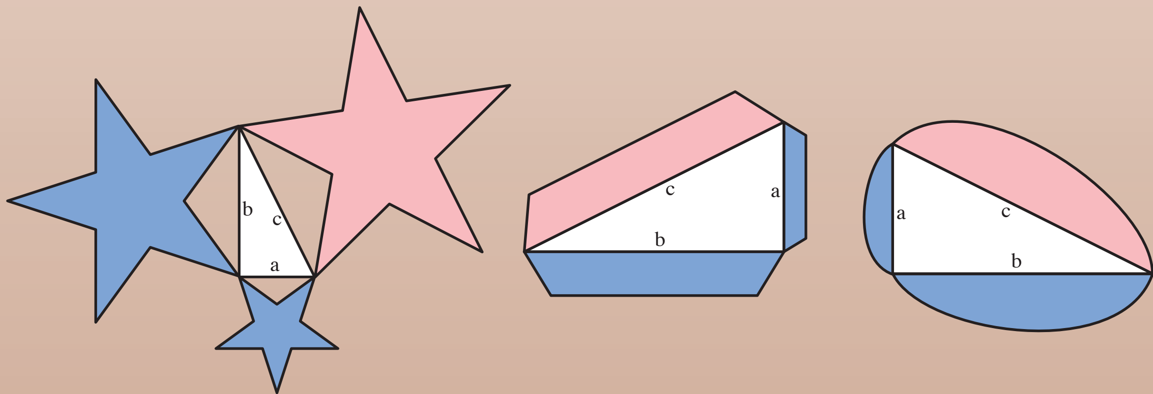


بيّنت نظريّة فيثاغورس أنّ مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيّين على قائميْ مثلّث قائم الزاوية يساوي مساحة المربّع المبني على وتر المثلّث قائم الزاوية.
بصياغة أخرى: إذا كان طولا القائمين في مثلّث قائم الزاوية هما a وَ b، وطول الوتر هو c، فإنّ: $a^2 + b^2 = c^2$.

منذ مئات السنين قبل فترة فيثاغورس، أي زمن البالبليين، والمصريين القدماء والصينيّين، كانت العلاقة بين وحدات معيّنة في المثلّثات قائمة الزاوية معروفة، لكنّ الرياضيّين اليونانيّين كانوا أول من عمّموا الصيغة الرياضيّة لنظريّة فيثاغورس، وقد عملوا لإيجاد برهان عامّ. ظهرت نظريّة فيثاغورس وبرهانها في كتاب أقليدس المعروف **الأُسس**.

وقد وُجد في نفس الكتاب **توسّع لنظريّة فيثاغورس**:

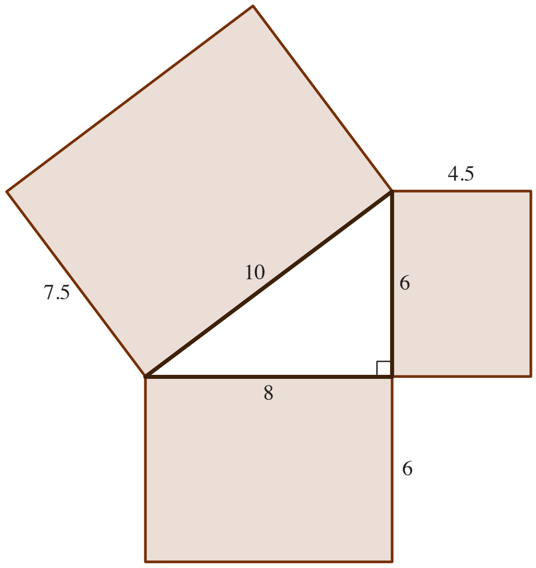
إذا كان هنالك شكلان متشابهان على ضلعيْ مثلّث قائم الزاوية فإنّ مجموع المساحتين الصغيرتين يساوي المساحة الكبيرة.
توجد عدّة أمثلة لهذا التعميم في الرسومات الآتية:

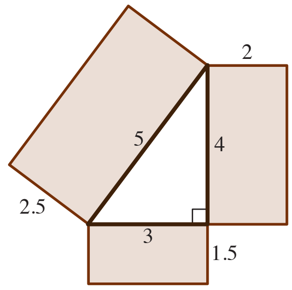


نفحص ما إذا كانت نظريّة فيثاغورس الموسّعة صحيحة للأشكال المختلفة المبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.

مستطيلات

1. بُني **مستطيل** على كلّ ضلع من أضلاع مثلّث قائم الزاوية.
أجيبوا عن كلّ حالة من الحالتين الآتيتين:





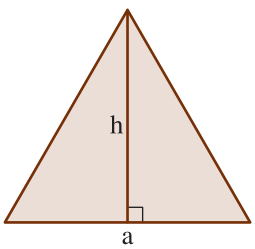
أ. هل المستطيلات متشابهة؟ علّلوا.

ب. هل نظريّة فيثاغورس الموسّعة صحيحة في الحالتين؟

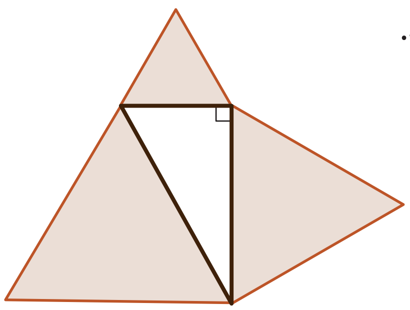
ت. هل نظريّة فيثاغورس الموسّعة صحيحة لكلّ ثلاثة مستطيلات متشابهة مبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية؟
برهنوا ادعاءكم بطريقة جبريّة. يمكن استعمال نظريّة فيثاغورس الأصليّة.
اِنتبهوا، النسبة في المستطيلات المتشابهة بين ضلعين متجاورين في كلّ مستطيل هي نسبة ثابتة.

مثلّثات متساوية الأضلاع

2. أمامكم مثلّث متساوي الأضلاع.



أ. عبّروا عن ارتفاع المثلّث h بواسطة ضلعه a.
اِنتبهوا! الارتفاع في المثلّث المتساوي الأضلاع هو متوسط أيضًا.

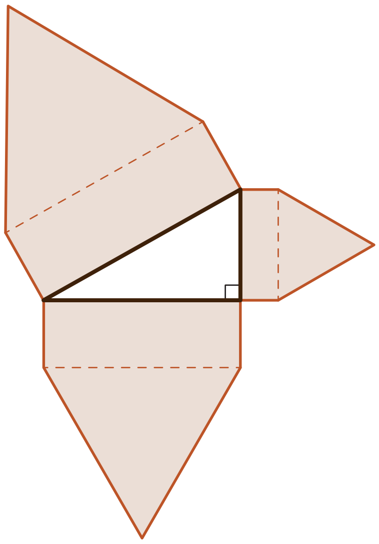


ب. بُني **مثلّث متساوي الأضلاع** على كلّ ضلع من أضلاع المثلّث قائم الزاوية.
هل المثلّثات متشابهة؟ علّلوا.

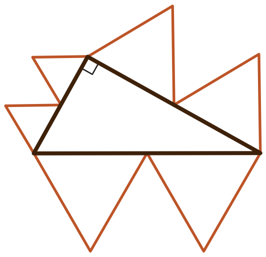
ت. هل نظريّة فيثاغورس الموسّعة صحيحة لكلّ المثلّثات المتساوية الأضلاع المبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية؟
برهنوا ادعاءكم بطريقة جبريّة. يمكن استعمال نظريّة فيثاغورس الأصليّة.

أشكال إضافيّة

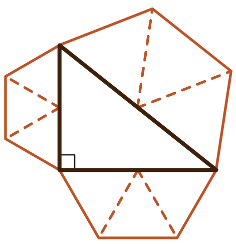
3. أ. بُنيت أشكال متشابهة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية. كلّ شكل مكوَّن من مستطيل ومثلّث متساوي الأضلاع. جميع المستطيلات متشابهة.
برهنوا، بطريقة جبريّة، أنّ نظريّة فيثاغوروس الموسَّعة صحيحة في هذه الحالة أيضًا.



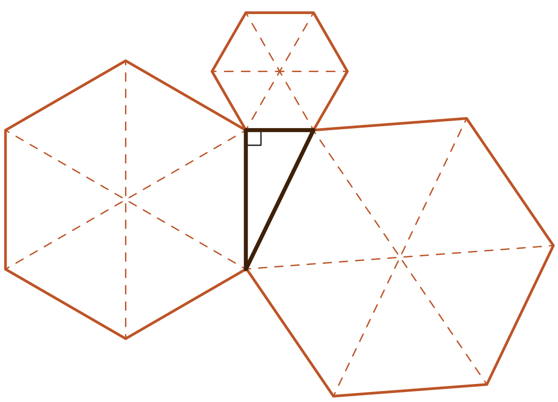
ب. بُنيت أشكال على أضلاع مثلّث قائم الزاوية. كلّ شكل مكوَّن من مثلّثين متساويي الأضلاع متطابقين.
برهنوا، بطريقة جبريّة، أنّ نظريّة فيثاغوروس الموسَّعة صحيحة في هذه الحالة أيضًا.



ت. بُنيت أشباه منحرف متساوية الساقين على أضلاع مثلّث قائم الزاوية، يمكن تقسيمها إلى مثلّثات متساوية الأضلاع متطابقة.
برهنوا، بطريقة جبريّة، أنّ نظريّة فيثاغوروس الموسَّعة صحيحة في هذه الحالة أيضًا.



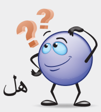
ث. بُنيت مسدّسات منتظمة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.
برهنوا، بطريقة جبريّة، أنّ نظرية فيثاغوروس الموسَّعة صحيحة في هذه الحالة أيضًا.



4. في مركز الاستجمام "بركة الدولفين"، توجد قطعة أرض مغطاة بالعشب الأخضر، شكلها مثلّث قائم الزاوية. أرادوا أن يبنوا حول هذه القطعة ثلاث برك لها نفس الشكل والعمق، لكن بأحجام مختلفة. ستعمل بركتان في فصل الصّيف فقط، والبركة الثّالثة ستعمل في فصل الشتاء فقط. لتوفير المياه، تتدفّق المياه في نهاية الصيف من بركتي الصيف إلى بركة الشتاء، وتعود في نهاية الشتاء إلى نفس الارتفاع الذي كان في بركتيِ الصيف.

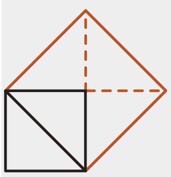
أ. أُرسموا اقتراحًا لتصميم شكل البرك الثلاث حسب الشروط المطلوبة. سجِّلوا قياسات مناسبة لاقتراحكم.

ب. نفّذوا مسابقة للاقتراح الأفضل.

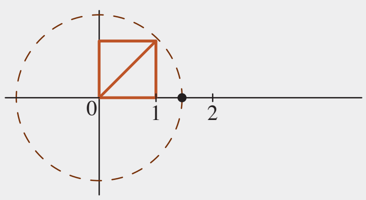


هل تعلمون؟

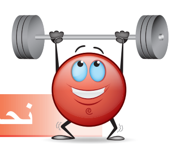
يعتقد كثيرون أنّ نظريّة فيثاغورس هي نظريّة تتطرّق إلى العلاقة بين ثلاثة أعداد تمثِّل أطوال أضلاع مثلّث قائم الزاوية. تطرّق الرياضيّون اليونانيّون إلى نظريّة فيثاغوروس كنظريّة حول العلاقة بين المساحات فقط، ولم يتطرّقوا إلى القيم العدديّة للمساحات. لقد عرفوا المقارنة بين مساحات وإيجاد المساحة الّتي تساوي مجموع أو فرق مساحات معروفة، لكن لم يعرفوا جميع الأعداد. تناولوا أعدادًا صحيحة فقط وأعدادًا نسبية (الأعداد الّتي تساوي خارج القسمة بين عددين صحيحين)، مثلًا: عرفوا أنّ مساحة المربّع المبنيّ على قُطر مربّع الوحدة (مربّع قياساته 1×1) هي وحدتان مربّعة، لكن لم يعرفوا كيفيّة التطرّق إلى طول ضلع هذا المربّع، وتمثيله.



يمكن إيجاد مكان هذا العدد على محور الأعداد بواسطة رسم دائرة مركزها في أحد رؤوس مربّع الوحدة، ونِصف قطرها كطول قُطر المربّع (أُنظروا الرسمة).



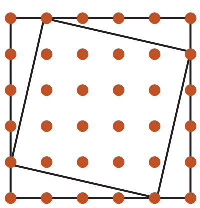
نبعت صعوبة اليونانيّين من أنّ طول هذا الضلع (الّذي يساوي أقلّ بقليل من $1\frac{1}{2}$ وحدة طول) لا يمكن التّعبير عنه كجزء (وهذا يعني ككسر) معيّن من وحدة الطول (الّتي هي طول ضلع مربّع الوحدة).



نحافظ على لياقة رياضيّة

1. اِحسبوا مساحة المربّع الداخلّي بطريقتين:
   - بواسطة نظريّة فيثاغوروس.
   - دون استعمال نظريّة فيثاغوروس.

   أيّ طريقة - حسب رأيكم - هي الطّريقة الأنجع؟



2. طولا قائمَيْ مثلّث قائم الزاوية هما 15 سم وَ 20 سم.

أ. جدوا محيط المثلّث ومساحته.

ب. ما هو طول الارتفاع على الوتر في هذا المثلّث؟

3. **للتذكير:** القطران في المعيّن متعامدان.

طولا القطرين في المعين هما 10 سم وَ 24 سم. جدوا محيط المعين ومساحته.

لعبة

4. " **أكملوا إلى مربّع**" لعبة لمشتركين.

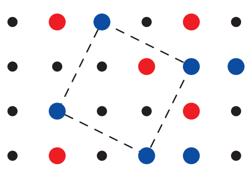
محتويات اللّعبة: شبكة من النقاط (صوّروا الورقة الّتي تظهر في نهاية الفعّاليّة أو ضعوا عليها ورقة شفّافة).

هدف اللّعبة: بناء مربّعات.

سير اللّعبة: يختار كلّ مشترك بدوره، نقطة واحدة على الشبكة، ويلوّنوها باللون الّذي يختاره.

الفائز: المشترك الأوّل الّذي يكوّن أربع نقاط تشكّل مربّعًا. قد يكون المربّع في حالة دوران، ومن كلّ كبر.

مثال لفوز اللّاعب الأزرق



أحجية

أُحجية هنديّة قديمة*

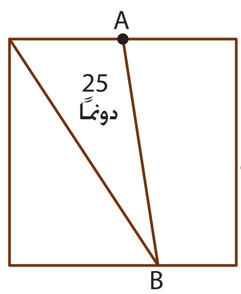
كان لمزارع هنديّ يهوى الرياضيّات ثلاثة أبناء. الولدان الكبيران توأمان.

أراد المزارع أن يقسّم قطعة الأرض مربّعة الشكل على أبنائه الثلاثة بحيث تكون مساحة قسمي التوأمين متساوية. رمز المزارع إلى نقطة منتصف أحد أضلاع قطعة الأرض بالحرف A، ورسم خطًّا حتّى نقطة معيّنة (B) على الضّلع المقابل.

حصل الابن الصّغير على قسم داخلي شكله مثلّث ومساحته 25 دونمًا،

أمّا القسمان المتبقّيان اللّذان تتساوى مساحتاهما فقد وزّعهما على التوأمين.

أين تقع النقطة B الّتي اختارها المزارع؟



* تعتمد على أُحجية من موقع مركز معلّمي الرياضيّات القطريّ للمرحلة فوق الابتدائيّة.

شِباك للّعبة: أكملوا إلى مربّع