

## 8.2 على خطوط الارتفاع

يُنتج صاحب مصنع نوعين من الخزائن كما هو موصوف في الجدول.

نوع الخزانة	كمية الخشب المطلوبة للخزانة	عدد ساعات العمل للخزانة
للمطبخ	5 أمتار مربعة	10
للملابس	4 أمتار مربعة	20

كمية الخشب المتوفرة في المصنع كل شهر 120 مترًا مربعًا، وعدد ساعات العمل 480 على الأكثر.

نرمز بـ  $x$  إلى عدد خزائن المطبخ وبـ  $y$  إلى عدد خزائن الملابس التي يُنتجها المصنع في الشهر. سجّلوا اضطرارات (محدوديات) المصنع بواسطة متباينات.

نبحث عدد الخزائن، من كل نوع، التي من الأفضل أن ينتجها المصنع في حالات ربح مختلفة.

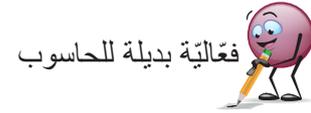
### المجال الممكن



زاوية الحاسوب

1. استعملوا برمجية بيانية (مثلًا: جيوجبرا).

ارسموا المجال الممكن بواسطة الحاسوب حسب الاضطرارات التي سجّلتموها في الافتتاحية. ارسموا في هيئة محاور مقسّمة إلى تربيقات. (في الجيوجبرا، اضغطوا على الطرف الأيمن في الفأر ← Graphics ← Grid).



فعالية بديلة للحاسوب

2. أ. رُسمت مستقيمات، في هيئة المحاور في نهاية الفعالية، لتحديد المجال الممكن. لأموا كل مستقيم لأحد الاضطرارات التي سجّلتموها في الافتتاحية.

ب. انسخوا الرسم في دفاتركم، أو صوّروا الورقة الأخيرة في الفعالية، وأشيروا إلى المجال الممكن.

3. أمامكم ادّعاءات، أي منها ليست صحيحة؟ إذا كان الادّعاء ليس صحيحًا فاشرحوا الاضطرار الذي لا يتحقّق.

أ. يستطيع المصنع أن يُنتج في الشهر 15 خزانة للمطبخ و 15 خزانة للملابس.

ب. يستطيع المصنع أن يُنتج في الشهر 15 خزانة للمطبخ و 10 خزائن للملابس.

ت. يستطيع المصنع أن يُنتج في الشهر 10 خزائن للمطبخ و 20 خزانة للملابس.

ث. يستطيع المصنع أن يُنتج في الشهر 12 خزانة للمطبخ و 15 خزانة للملابس.

ج. يستطيع المصنع أن يُنتج في الشهر 5 خزائن للمطبخ و 22 خزانة للملابس.

## دالة الربح

الربح الصافي لخزانة المطبخ هو 900 شافل، ولخزانة الملابس 600 شافل.

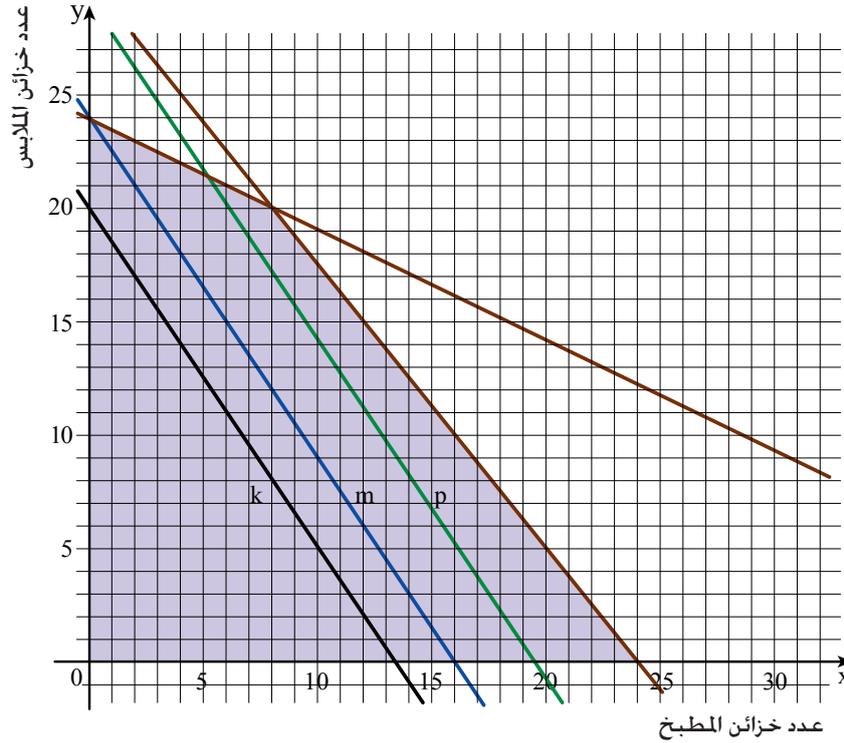
4. أ. سجّلوا معادلة تصف الربح 14,400 شافل.  
ب. أعطوا مثالين لعدد الخزائن، من كلّ نوع، التي يجب على المصنع أن ينتجها كي يكون الربح 14,400 شافل تقريبًا.  
ت. ارسموا في الحاسوب أو في هيئة المحاور، من المهمّة 2، المستقيم الذي يصف الربح 14,400 شافل. أعطوا مثالين لعدد الخزائن، من كلّ نوع، التي يجب على المصنع أن ينتجها كي يكون ربحه الصافي 14,400 شافل بالضبط.
5. أ. سجّلوا معادلة مناسبة لربح آخر. ارسموا خطّها البيانيّ في الحاسوب، أو في هيئة المحاور من المهمّة 2. انتبهوا، يجب أن يمرّ قسم من المستقيم في المجال الممكن.  
ب. اشرحوا لماذا الخطوط البيانيّة التي تمثّل الأرباح المختلفة متوازية؟



التعبير الجبريّ  $900x + 600y$  يمثّل الربح. في هذه الحالة هو دالة لعدد الخزائن، من كلّ نوع، التي ينتجها المصنع. نرمز إلى دالة الربح كالتالي:  $f(x, y) = 900x + 600y$ . هذه الدالة فيها متغيّران. يعطينا تعويض زوج من الأعداد  $(x, y)$  الذي يحقق اضطرابات المصنع نتيجة وحيدة مناسبة لربح معيّن للمصنع.



6. أمامكم ثلاثة خطوط بيانية لثلاث معادلات تمثل أرباحًا مختلفة للمصنع.



أ. ما المشترك لجميع المستقيمات؟ لماذا؟

ب. أيّ مستقيم يمثل، حسب رأيكم، الربح الأكبر من بين الأرباح الثلاثة؟

ت. ما هو الربح المخمّن الذي يمثله كلّ مستقيم؟ اشرحوا كيف وجدتم؟

ث. ارسموا في الحاسوب أو في هيئة المحاور، من المهمة 2، الخطّ البيانيّ الذي يصف المعادلة

$$.900x + 600y = 25,000$$

اشرحوا لماذا لا يمثّل المستقيم ربح المصنع؟

### الربح الأقصى

7. أ. ارسموا المستقيم الذي يمثّل الربح الأقصى.

في الحاسوب: يمكنكم تنفيذ ذلك بواسطة إزاحة المستقيم الذي رسمتموه في مهمة 5.

(أشيروا إلى المستقيم في الجيوبجرا، ثمّ أزيحوه).

تابعوا تغيّرات دالة الربح.

في هيئة المحاور على الورقة: يمكنكم تنفيذ ذلك بواسطة إزاحة مسطرة بالموازاة للمستقيم الذي سجّلتموه في مهمة 5.

ب. كم خزانة، من كلّ نوع، يجب على صاحب المصنع أن يُنتج للحصول على الربح الأكبر الممكن، وما هذا الربح؟ اشرحوا

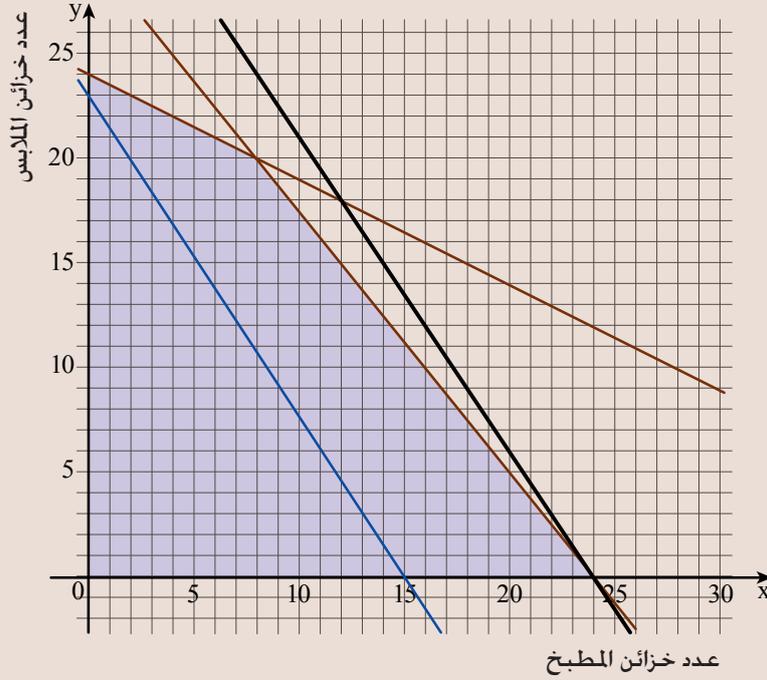
كيف وجدتم؟

ت. هل هنالك أكثر من إمكانية واحدة للحصول على الربح الأكبر؟

إذا كانت الإجابة نعم، كم إمكانية كهذه يوجد؟

رأينا أنه كلما أزحنا المستقيم إلى الأيمن (أو إلى أعلى)، فإنّ الربح الذي يمثله أكبر. وذلك بشرط أن تكون نقطة واحدة للمستقيم في المجال الممكن.

إذا لم يكن الأمر كذلك، فإنّ اضطرابات المصنع لا تتحقّق، وهذه الإمكانيّة غير مناسبة للمصنع.



إحدى الطرق المناسبة لإيجاد الربح الأقصى هي إزاحة أحد المستقيمتين الذي يمثّل الربح الممكن للمصنع في اتجاه ازدياد الربح، حتّى المكان الأخير الذي يحتوي على نقاط من المجال الممكن. تمثّل معادلة المستقيم هذا (انظروا إلى المستقيم البارز في الرسمة) الربح الأقصى. كلّ نقاط هذا المستقيم التي تقع في المجال الممكن تمثّل عدد الخزائن، من كلّ نوع، التي يجب إنتاجها للحصول على الربح الأقصى. في حالتنا النقطة  $(24, 0)$  هي النقطة الوحيدة على المستقيم التي تقع في المجال الممكن. يمثّل هذا المستقيم الربح 21,600 شافل، وهذا الربح الأقصى الذي يستطيع المصنع أن يحققه.

8. في شهر معيّن، وجد صاحب المصنع طريقة لتقليل تكاليف إنتاج خزائن الملابس، ونتيجة لذلك ارتفع الربح الصافي لخزانة الملابس إلى 800 شافل. بقيت الاضطرابات كما كانت.

أ. سجّلوا دالة الربح الجديدة.

ب. كان ربح المصنع 20,000 شافل. ارسموا مستقيماً مناسباً لهذا الربح.

ت. أزيحوا المستقيم كي يمثّل الربح الأقصى.

كم خزانة من كلّ نوع يجب على صاحب المصنع أن يُنتج للحصول على الربح الأقصى؟

ث. ما هذا الربح؟ اشرحوا كيف وجدتم؟

ج. هل هنالك أكثر من إمكانيّة واحدة للحصول على الربح الأكبر؟ إذا كانت الإجابة نعم، فكم إمكانيّة كهذه توجد؟

9. بعد مرور سنة، وجد صاحب المصنع طريقة لتخفيض تكاليف خزائن المطابخ، ونتيجة لذلك ارتفع الربح الصافي لخزانة المطبخ إلى 1000 شاقل. بقيت الاضطرابات كما كانت.

أ. كم خزانة، من كل نوع، يجب على صاحب المصنع أن يُنتج كي يحقق الربح الأقصى؟ اشرحوا كيف وجدتم؟

ب. ما هو هذا الربح؟

ت. هل هنالك أكثر من إمكانية للحصول على الربح الأكبر الممكن؟ إذا كانت الإجابة نعم، كم إمكانية كهذه توجد؟



10. أ. في شهر معين، تغيّرت دالة الربح مرة أخرى. نتيجة لذلك كان من الأفضل لصاحب المصنع أن يُنتج خزائن ملابس فقط.

ب. كم دالة كهذه يمكنكم أن تجدوا؟



يرغب صاحب المصنع في الحصول على الربح الأكبر الممكن، من خلال الأخذ بعين الاعتبار اضطرابات المصنع.

دالة الربح، في حالتنا، هي دالة الهدف.

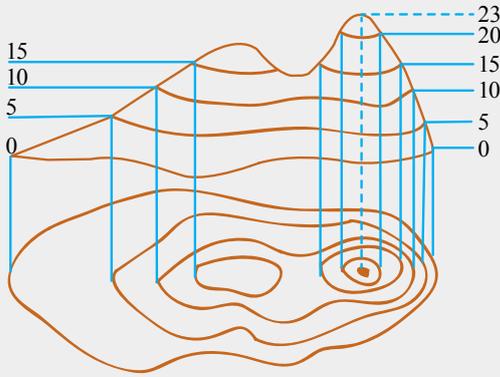
لإيجاد الربح الأقصى رسمتم مستقيماً وأزحتموه. يمثل كل مستقيم من هذه المستقيمات ربحاً معيناً، وهو ينتج نتيجة

لتعويض نقاط المستقيم في دالة الهدف.

نسَمي هذه المستقيمات "خطوط الارتفاع".



هل تعلمون؟



الخريطة الطبوغرافية هي خريطة تصف تشكيلات ثلاثية الأبعاد على ورقة ثنائية الأبعاد، حيث يتم التعبير عن البعد الثالث - الارتفاع بواسطة خطوط الارتفاع. خط الارتفاع هو الخط الذي يوصل كل النقاط التي تقع في الارتفاع نفسه فوق سطح البحر. لإنتاج خريطة كهذه "ننشر" المساحة إلى قطع ذات ارتفاع متساوٍ (انظروا الرسم). تُستعمل خطوط الارتفاع لتمثيل ثنائي الأبعاد لجبال ووديان. تصف الخريطة الطبوغرافية ارتفاعات مختلفة وتشكيلة المساحة: كلما كانت الخطوط أكثر كثافة كان الميل أكثر انحدارًا.

11. اشرحوا معنى المصطلح "خطوط الارتفاع" في سياق فعاليتنا.



نحافظ على لياقة رياضية

1. ما العلاقة المتبادلة بين أزواج المستقيمات التالية، متوازية، متحدة أم متقاطعة؟

ث.  $x - 2y = 7$

أ.  $6x + 9y = 36$

ج.  $x - 2y = 6$

ب.  $18x + 27y = 108$

د.  $x - 2y = 5$

هـ.  $6x + 9y = 36$

و.  $y - 2x = 5$

ز.  $18x + 27y = 72$

ح.  $x - 2y = 7$

ط.  $6x + 9y = 36$

ي.  $2y - x = -7$

ق.  $27x + 18y = 108$

2. حدّدوا، دون استعمال رسومات دقيقة، عدد نقاط التقاء المستقيمات الستة التالية:

ث.  $4y - 3x = -1$

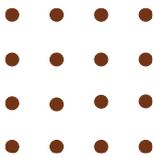
أ.  $3x - 4y = 1$

ج.  $12x - 16y = 4$

ب.  $4x - 3y = 5$

د.  $12x - 9y = 18$

ت.  $12x - 16y = 8$



صلوا بين كل الـ 16 دائرة التي تظهر في الرسم بواسطة خط منكسر متواصل، غير مغلق ومكوّن من ست قطع.



أحجية

