

יחידה 32: חקירת מערכת משוואות

שיעור 1. פותרים חידות

ייצוג גאומטרי של מערכת משוואות

בכיתה של **עמית**, כל זוג תלמידים חיברו יחד חידה.
לפניכם החידה שחיברו **יואב** ו**חגי**.



מהם שני המספרים שבחרו **יואב** ו**חגי**?

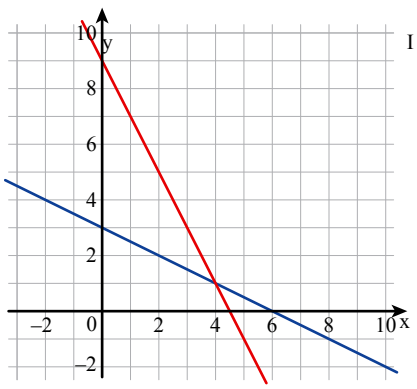
ניעזר במערכת משוואות כדי למצוא, אם אפשר, זוגות מספרים שנבחרו בחידות שונות.

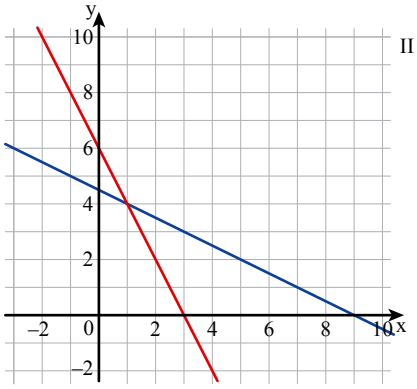
פתרון יחיד

1. נתייחס לחידה שחיברו **יואב** ו**חגי** במשימת הפתיחה.

א. רִשמו מערכת משוואות מתאימה.

ב. באיזו מערכת צירים משורטטים הגרפים המתאימים למערכת המשוואות של החידה? הַסבירו.





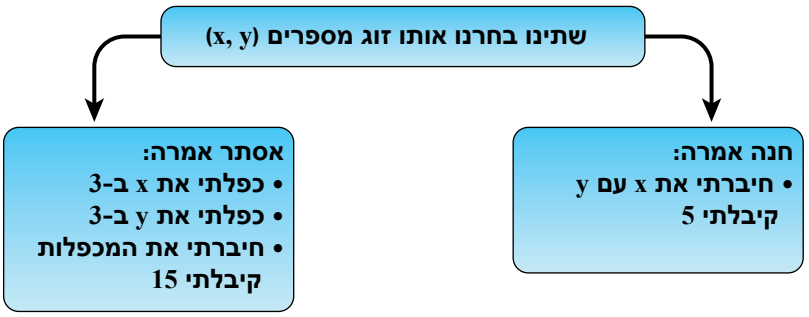
ג. מהם שני המספרים שבחרו **יואב** ו**חגי**?



תזכורת

פתרון גרפי של מערכת משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה) הוא זוג סדור של מספרים המתאים לנקודת החיתוך של הישרים.

2. לפניכם החידה שחיברו **חן** ו**עדי**.



א. לכל זוג מספרים, קִבעו אם הוא יכול להיות פתרון לחידה. הַסבירו.

$(2,\ 3)$ $(7,\ -2)$ $(1.5,\ 3.5)$ $(1,\ -4)$ $(-3,\ 8)$

ב. רִשמו שני פתרונות נוספים לחידה.



3. **תומר** ו**אבי** פתרו את מערכת המשוואות המתאימה לחידה ששחיברו **חן** ו**עדי**.

$$\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

א. **תומר** פתר את המערכת בדרך אלגברית.

$$\begin{array}{l} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \ / \cdot 3 \\ \hline 3x + 3y = 15 \\ -\ \underline{3x + 3y = 15} \\ 0x + 0y = 0 \end{array}$$

בַּחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבל **תומר**.

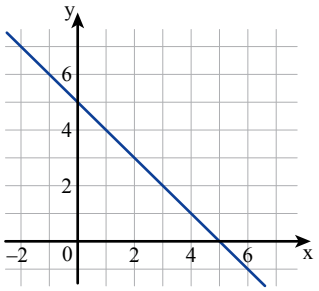
- זוג המספרים $(0,\ 0)$
- אין פתרון
- כל זוג מספרים
- פתרונות רבים אבל לא כל זוג של מספרים

ב. **אבי** פתר את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי.

הוא שִרטט במערכת צירים ישרים המתאימים למערכת המשוואות וקיבל רק ישר אחד.

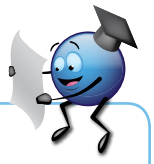
בַּחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבל **אבי**.

- אין פתרון
- כל הנקודות במישור
- רק הנקודות שעל הישר שבגרף



ג. סַכמו את מסקנותיכם:

אילו שני מספרים יכולים להיות תשובה לחידה שחיברו **חן** ו**עדי**?



לפעמים, במערכת משוואות בשני משתנים מהמעלה הראשונה, שתי המשוואות מתארות אותו קשר בין המשתנים.
במקרים אלה:

- אם פותרים את מערכת המשוואות בדרך אלגברית, מתקבלת **זהות** בין שני האגפים.

  פתרון המערכת הוא **כל הזוגות הסדורים** של מספרים המקיימים את הקשר בין שני המשתנים.

- אם פותרים את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי, הישרים המתאימים לשתי המשוואות **מתלכדים** לישר אחד.

  פתרון המערכת הוא **כל זוגות המספרים** המתאימים לנקודות שעל הישר.

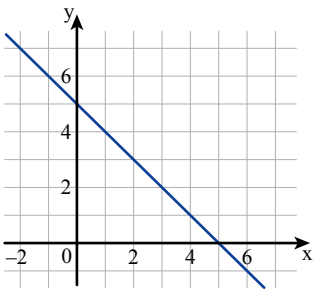
דוגמאות:

במשימה 3א, **תומר** פתר את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

הוא קיבל את **הזהות** $0 = 0$
הפתרון: **כל הזוגות הסדורים** (x, y)
המקיימים $x + y = 5$

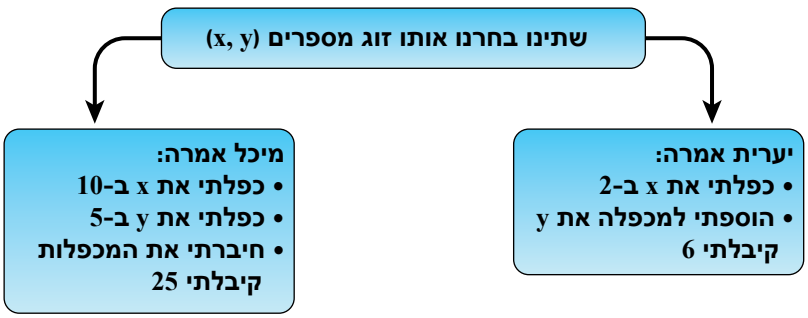
במשימה 3ב, **אבי** שִרטט גרף מתאים למערכת המשוואות.



התקבל **ישר אחד**.
הפתרון: **כל זוגות המספרים** המתאימים לנקודות שעל הישר שבשרטוט.

ללא פתרון

4. לפניכם החידה שחיברו **יערית** ו**לילך**.



א. פִתרו את החידה בדרך אלגברית.

ב. פִתרו את החידה בעזרת הייצוג הגאומטרי (שרטוט הישרים).

5. **יגאל** ו**שחר** פתרו את מערכת המשוואות המתאימה לחידה שחיברו **יערית** ו**לילך**.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 10x + 5y = 25 \end{cases}$$

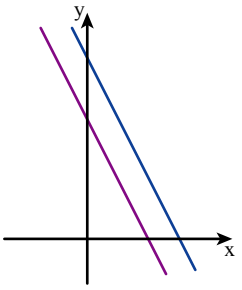
א. **יגאל** פתר את המערכת בדרך אלגברית.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \;/\cdot 5 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \\ 10x + 5y &= 30 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \\ 0x + 0y &= 5 \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

בַּחרו את התשובה המתאימה למשמעות הפתרון שקיבל **יגאל**.

- זוג המספרים $(0,\ 5)$
- אין פתרון
- כל זוג מספרים
- פתרונות רבים אבל לא כל זוג של מספרים

ב. **שחר** פתרה את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי.



היא שרטטה במערכת צירים ישרים המתאימים למערכת המשוואות.

מה משמעות הפתרון של **שחר**?

ג. סַכמו את מסקנותיכם:

אילו שני מספרים יכולים להיות תשובה לחידה שחיברו **יערית** ו**לילך**?



לפעמים, במערכת משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה), כל אחת מהמשוואות מתארת קשר שונה בין המשתנים, ושני הקשרים של שתי המשוואות אינם יכולים להתקיים ביחד.

במקרים אלה:

- אם פותרים את מערכת המשוואות בדרך אלגברית, מקבלים מספרים שונים בשני האגפים.

  למערכת המשוואות **אין פתרון**.

- אם פותרים את המערכת בעזרת הייצוג הגאומטרי, הישרים המתאימים לשתי המשוואות **מקבילים** זה לזה.

  לישרים **אין נקודה משותפת**, ולכן למערכת **אין פתרון**.

דוגמאות:

במשימה 5א, **יגאל** פתר את מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \end{aligned}$$

הוא קיבל $0 = 5$

הפתרון: **אין** זוגות סדורים המתאימים לשתי המשוואות.

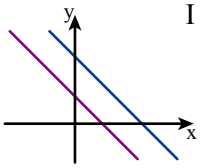
למערכת **אין פתרון**.

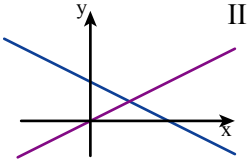
במשימה 5ב, **שחר** שרטטה גרף מתאים למערכת המשוואות. התקבלו שני **ישרים מקבילים**.

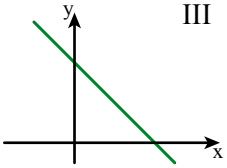
הפתרון: אין זוג מספרים המקיים את שתי המשוואות. למערכת **אין פתרון**.

6. בכל סעיף, פִּתרו את מערכת המשוואות, והַתאימו לה ייצוג גאומטרי.

א. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

I 

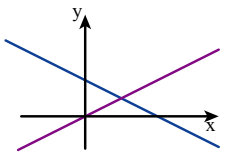
II 

III 



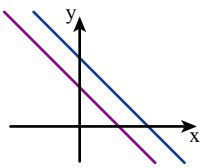
לייצוג הגאומטרי של מערכת משוואות בשני משתנים מהמעלה הראשונה שלושה מצבים אפשריים.

הישרים נחתכים



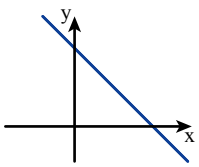
למערכת המשוואות **פתרון יחיד**, והוא הזוג הסדור המתאים לנקודת החיתוך.

הישרים מקבילים



למערכת המשוואות **אין פתרון**. אין לישרים נקודה משותפת.

הישרים מתלכדים לישר אחד



פתרון מערכת המשוואות הוא **אינסוף זוגות המספרים** המתאימים לנקודות שעל הישר.



אוסף משימות



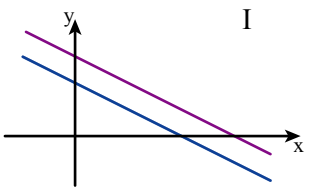
1. לכל סעיף, הַתאימו ייצוג גאומטרי.

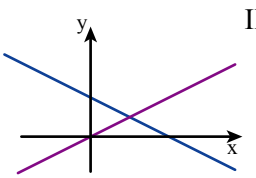
א. למערכת המשוואות פתרון יחיד.

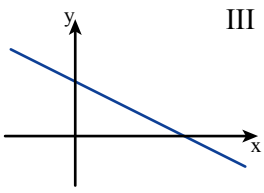
ב. למערכת המשוואות אין פתרון.

ג. למערכת המשוואות אינסוף פתרונות.

ד. הפתרון של מערכת המשוואות הוא זוג סדור.

I 

II 

III 

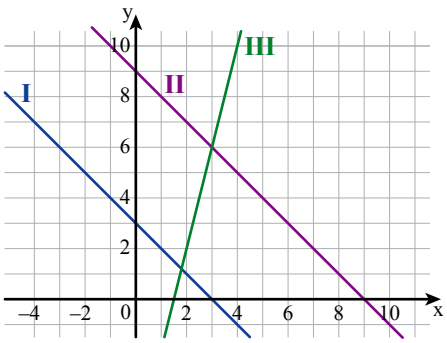
2. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$x + y = 9$ $\quad x + y = 3$ $\quad 4x - y = 6$

א. הַתאימו משוואות לישרים.

ב. הַרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?

ג. הַרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.



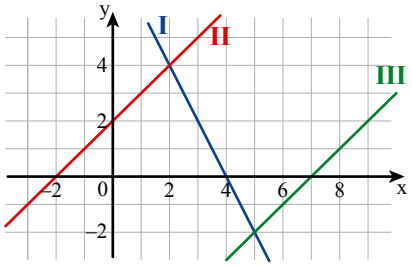
3. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$x - y + 2 = 0$ $\quad x - y = 7$ $\quad 2x + y = 8$

א. הַתאימו משוואות לישרים.

ב. הַרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?

ג. הַרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.



4. הישרים שבשרטוט מתארים את המשוואות:

$x - y + 3 = 0$ $\quad x - y = 2$ $\quad x = 3$

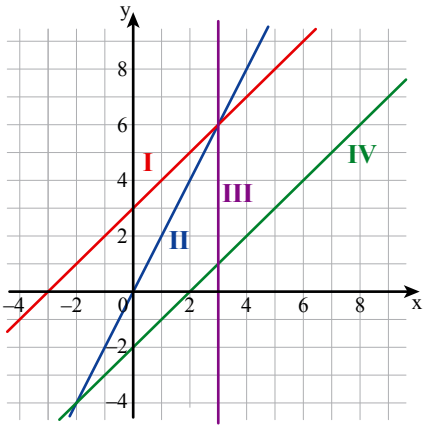
$2x - y = 0$ $\quad 3x - 3y = 6$

א. הַתאימו משוואות לישרים.

ב. הַרכיבו מערכת משוואות שיש לה פתרון יחיד. מהו הפתרון?

ג. הַרכיבו מערכת משוואות שאין לה פתרון.

ד. הַרכיבו מערכת משוואות שיש לה אינסוף פתרונות.



5. בכל סעיף, שַׂרטטו גרפים המתארים את מערכת המשוואות, וקִבעו אם הפתרון הוא זוג סדור, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד או אין פתרון למערכת.

א. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

6. בכל סעיף, שַׂרטטו גרפים המתארים את מערכת המשוואות, וקִבעו אם הפתרון הוא זוג סדור, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד או אין פתרון למערכת.

א. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

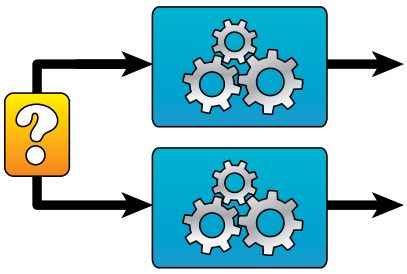
7. פִּתרו.

א. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

8. נתונה המשוואה $x - y = 5$

בכל סעיף, הוסיפו משוואה שנייה כך שהייצוג הגאומטרי של מערכת המשוואות הוא:

א. שני ישרים מקבילים ב. שני ישרים נחתכים ג. שני ישרים מתלכדים



שיעור 2. קשרים בין ייצוגים במערכת משוואות

מספר הפתרונות של מערכת משוואות



לפניכם שלוש מערכות של משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה).

I. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

עמית אמר: אני יכול לקבוע את מספר הפתרונות של כל מערכת, מבלי לפתור.
מהם השיקולים של **עמית**?

נמשיך לחקור את שלושת המצבים האפשריים של מערכות משוואות.

1. נתייחס למערכות המשוואות במשימת הפתיחה.
במערכות אלה כל המשתנים נמצאים באגף אחד, ובאגף השני נמצא מספר.

א. במערכת I:
המשוואה השנייה התקבלה על-ידי כפל אגפי המשוואה הראשונה ב- 3.
האם שתי המשוואות מתארות אותו קשר? הסבירו.
האם למערכת I פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הַסבירו.

ב. במערכת II:
אגף המשתנים **בלבד** של המשוואה השנייה התקבל על-ידי כפל אגף המשתנים של המשוואה הראשונה ב- 3.
האם למערכת II פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הַסבירו.

ג. במערכת III:
אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף המשתנים של המשוואה האחרת.
האם למערכת III פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון? הַסבירו.

2. בכל סעיף, קִבעו את מספר הפתרונות של המערכת (אין פתרון, פתרון יחיד, אינסוף פתרונות).

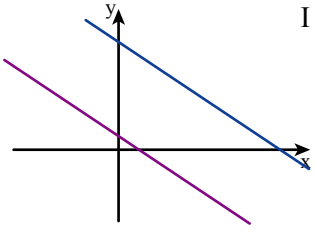
א. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

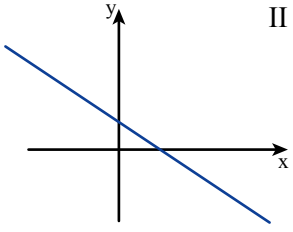
3. לפניכם שלוש מערכות של משוואות ושלושה ייצוגים גאומטריים (בעזרת גרפים).
לכל מערכת, קִבעו את מספר הפתרונות, והַתאימו ייצוג גאומטרי.

א. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$

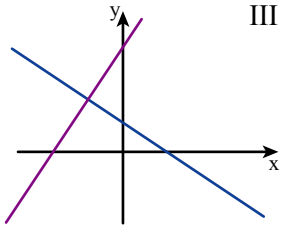
I

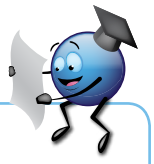


II



III





ראינו כי למערכת של שתי משוואות בשני משתנים (מהמעלה הראשונה) ייתכן שיהיו: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או שלא יהיה פתרון למערכת. כדי להבחין בין המקרים השונים, מסדרים את המשוואות, כך שבאגף אחד נמצאים כל המשתנים ובאגף השני נמצא מספר.

- אם אפשר לקבל משוואה אחת על-ידי כפל האגפים של המשוואה השנייה באותו מספר (שאינו אפס), אז שתי המשוואות מתארות **אותו קשר**. כלומר, המשוואה השנייה אינה נותנת מידע נוסף.
  כל הזוגות הסדורים המקיימים כל אחת משתי המשוואות הם פתרונות אפשריים.
  למערכת **אינסוף פתרונות**.
  הייצוג הגאומטרי הוא שני **ישרים מתלכדים**.

  דוגמאות: במשימה 3,

  במערכת $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$
  המשוואה השנייה מתקבלת מכפל ב- 3 של אגפי המשוואה הראשונה.
  שתי המשוואות מתארות אותו קשר.
  לכן, יש אינסוף פתרונות והם כל הזוגות הסדורים המקיימים $2x + 3y = 4$

- אם אפשר לקבל את אגף המשתנים **בלבד** של משוואה אחת על-ידי כפל אגף המשתנים של המשוואה השנייה באותו מספר (שאינו אפס), אז שתי המשוואות מתארות קשרים שאינם יכולים להתקיים ביחד.
  למערכת **אין פתרון**. הייצוג הגאומטרי הוא שני **ישרים מקבילים**.

  במערכת $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$
  אגף המשתנים (בלבד) במשוואה השנייה מתקבל על-ידי כפל ב- 3 של אגף המשתנים במשוואה הראשונה.
  שתי המשוואות מתארות קשרים שונים שאינם יכולים להתקיים ביחד, עבור אותו זוג מספרים.
  לכן, אין פתרון למערכת.

- אם אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף המשתנים במשוואה השנייה, אז שתי המשוואות מתארות קשרים שונים המתקיימים יחד עבור זוג יחיד של מספרים.
  למערכת **פתרון** יחיד (זוג סדור אחד).
  הייצוג הגאומטרי הוא שני **ישרים נחתכים**.
  פתרון המערכת הוא נקודת החיתוך של הישרים.

  במערכת $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$
  אגף המשתנים של משוואה אחת אינו כפולה של אגף של המשתנים של המשוואה האחרת.
  שתי המשוואות מתארות קשרים שונים המתקיימים ביחד עבור זוג המספרים $(-1, 2)$ בלבד.
  לכן פתרון המערכת הוא $(-1, 2)$.

4. בכל סעיף, קבעו כמה פתרונות למערכת המשוואות (פתרון יחיד, אין פתרון, כל הנקודות הנמצאות על ישר אחד). הַסבירו.

א. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x - 6y = 7.5 \end{cases}$ ו. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 6 = 2y \end{cases}$

5. נתונה מערכת משוואות:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x + \square \cdot y = \square \end{cases}$$

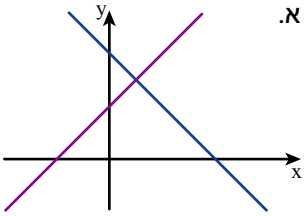
בכל סעיף, הַעתיקו את המערכת ורִשמו, מספרים מתאימים במקומות הריקים.

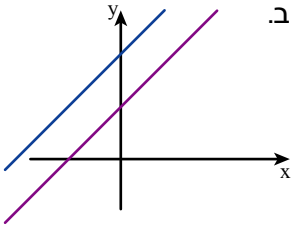
א. למערכת אינסוף פתרונות ב. למערכת אין פתרון ג. למערכת פתרון יחיד

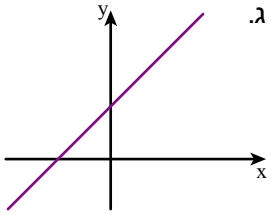
קִבעו כמה אפשרויות יש.



6. בכל סעיף, רִשמו מערכת משוואות מתאימה.

א.


ב.


ג.




אוסף משימות



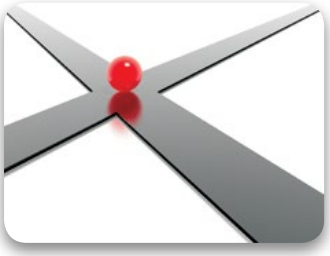
1. בכל סעיף, קִבעו **בלי לפתור** אם למערכת פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון למערכת. הַסבירו.

א. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$



2. בכל סעיף, קִבעו כמה פתרונות למערכת המשוואות (פתרון יחיד, אינסוף נקודות הנמצאות על ישר אחד, או אין פתרון למערכת), ושַרטטו סקיצה מתאימה.

א. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$



3. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+\square \cdot y=\square \end{cases}$

בכל סעיף, הַעתיקו והַשלימו מספרים מתאימים במקומות הריקים.
פִּתרו את המערכת שרשמתם, ובִּדקו תשובתכם.

א. למערכת אינסוף פתרונות המתאימים לישר אחד.

ב. למערכת אין פתרון.

ג. למערכת פתרון יחיד. מהו הפתרון?

4. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 4x+3y=7 \\ 8x+6y=\square \end{cases}$

א. איזה מספר יש לרשום במקום הריק, אם הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.

ב. איזה מספר יש לרשום במקום הריק, אם הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא ישר אחד.

ג. **יובל** אמר: לא ייתכן ששתי המשוואות מתארות שני ישרים הנחתכים בנקודה אחת.
האם **יובל** צודק? הַסבירו.

5. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 5x-3y=4 \\ 10x-6y=\square \end{cases}$

בכל סעיף, הַעתיקו והַשלימו מספר מתאים במקום הריק. אם אי-אפשר, הַסבירו.

א. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.

ב. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא ישר אחד.

ג. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים נחתכים.

6. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-y=3 \\ \square \cdot x-2y=6 \end{cases}$

בכל סעיף, קִבעו כמה אפשרויות שונות יש למילוי המקום הריק. הַסבירו.

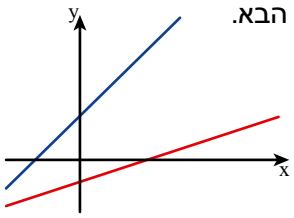
א. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים נחתכים.

ב. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מתלכדים.

ג. הייצוג הגאומטרי של המערכת הוא שני ישרים מקבילים.



7. **אריאל** פתר מערכת משוואות בעזרת הייצוג הגאומטרי. הוא קיבל את השרטוט הבא.



אריאל אמר: למערכת אין פתרון.

האם הוא צודק? הַסבירו.



8. בכל סעיף, פִּתרו את מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ $y < 5\ ,\ x > 0$

ב. $\begin{cases} 2y = 3x - 1 \\ 5x + 4y = 42 \end{cases}$ x ו- y מספרים טבעיים

ג. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4 = y + 9 \end{cases}$ $y > 0\ ,\ x > 0$

ד. $\begin{cases} 5x = y + 10 \\ 6x = 5y - 7 \end{cases}$ $y > 0\ ,\ x > 0$



9. נתונה המשוואה: $2x - 5y = 18$

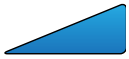
בכל סעיף, בַּחרו משוואה מתאימה מתוך המשוואות הבאות.

$x + 5y = 3$	$4x - 10y = 9$	$5y + 18 = 2x$	$x - 2\frac{1}{2}y = 9$
$4x - 10y = 36$	$2x - 3y = 18$	$x - 2\frac{1}{2}y = 18$	$4x - 10y = 5$
$5y - 2x = 18$	$3y = 18$	$2x - y = 18$	$\frac{2}{5}x - y = 3\frac{3}{5}$

א. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שאין לה פתרון.

ב. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שיש לה אינסוף פתרונות.

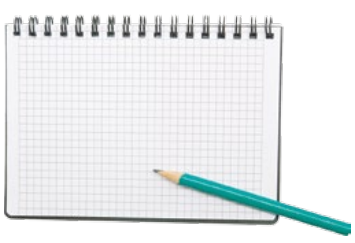
ג. המשוואה שבחרתם והמשוואה הנתונה יוצרות מערכת שיש לה פתרון יחיד.



10. הַעתיקו והַשלימו מספרים חסרים במקומות הריקים כך שתתקבל מערכת שפתרונה $(2,\ 1)$

$$\begin{cases} 2x - \square \cdot y = -6 \\ \square \cdot x + \square \cdot y = 6 \end{cases}$$

כמה אפשרויות יש? הַסבירו.



שיעור 3. כושר, כושר, כושר...

מפשטים ופותרים מערכות משוואות בשני משתנים



פתרון מערכת המשוואות $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ הוא $(1, 2)$. בִּדקו.

באיזה סעיף למערכת אותו פתרון כמו למערכת הנתונה? הַסבירו.

א. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2\frac{1}{2} \\ 9x - 3y = 3 \end{cases}$

נפתור מערכות של משוואות על-ידי פישוט או על-ידי ראייה תבניתית.

1. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ שפתרונה $(4, 1)$

באיזה סעיף למערכת אותו פתרון כמו למערכת הנתונה?

איזו מערכת יש צורך לפתור? הַסבירו.

א. $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 6x - 4y = 20 \end{cases}$

מפשטים ופותרים

2. בכל סעיף, פַּשטו וקִבעו מהו סוג הפתרון של מערכת המשוואות (פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרון).

פתרון:

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \\ 2(x-5) - 2(2y-1) = 2 \end{cases}$$

נפשט את המשוואה הראשונה:

$$\frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \quad /\cdot 10$$

$$4x + 2y - 5x + 15 = 10$$

נקבל: $-x + 2y = -5$

נפשט את המשוואה השנייה:

$$2(x-5) - 2(2y-1) = 2$$

$$2x - 10 - 4y + 2 = 2$$

נקבל: $2x - 4y = 10$

המשוואה השנייה מתקבלת על-ידי כפל ב- (-2) של אגפי המשוואה הראשונה,
למערכת יש אינסוף פתרונות שהם כל הזוגות הסדורים שהם הפתרונות של אחת המשוואות.

א. $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{x+1}{2} = 1 \\ 10 + 3(x+y) = 5(y+5) \end{cases}$ ג. $\begin{cases} (x-5)(y-2) = y(x+2) \\ (x+2)(y-5) = (x-1)(y-1) + 3 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 3(x+y) - 5 = 10 - 4x \\ 3(4x+3y) - 20 = 25 - 9x \end{cases}$ ד. $\begin{cases} (x+4)(y+7) = (x+3)(y+4) \\ (x+5)(y+2) = (x+4)(y-1) - 2 \end{cases}$

3. לפניכם שתי מערכות של משוואות בשני משתנים.

(I) $\begin{cases} 3(x+y)-(y+3)=2(x+2) \\ 2(x-y)+5=4-y \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

א. פַּשטו את המשוואות במערכת I.

ב. מה הפתרון של כל מערכת משוואות?

4. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 3(x-2)+4(y-1)=5-(x+y) \\ 5(y-x)-1=3(4-3x) \end{cases}$



פַּשטו ושַרטטו סקיצה של התיאור הגרפי של המערכת.

ראייה תבניתית

5. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$ שפתרונה $(5,\ 1)$.

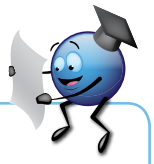
בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ופִתרו.

א. $\begin{cases} 2(x-1)+3(y-1)=13 \\ 3(x-1)-4(y-1)=11 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x+3)+3(y-2)=13 \\ 3(x+3)-4(y-2)=11 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 2(3x-1)+3(5y-4)=13 \\ 3(3x-1)-4(5y-4)=11 \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 2\cdot\dfrac{(x-1)}{3}+3\cdot\dfrac{(y+5)}{2}=13 \\ 3\cdot\dfrac{(x-1)}{3}-4\cdot\dfrac{(y+5)}{5}=11 \end{cases}$



- בדרך כלל, קל יותר לפתור מערכת משוואות לאחר שמפשטים כל אחת מהמשוואות.
כדאי לסדר משוואה כך שכל המשתנים יהיו באגף אחד, ובאגף השני יהיה מספר.

דוגמה: במשימה 4, לאחר פישוט וסידור המשוואות מתקבלת המערכת: $\begin{cases} 4x+5y=15 \\ 4x+5y=13 \end{cases}$

שתי המשוואות מתארות קשרים שאינם יכולים להתקיים ביחד, ולמערכת אין פתרון.

- לפעמים אפשר לזהות מבנה קבוע של כל המערכות, ואז לא כדאי לפשט.

דוגמה: במשימה 5, לכל המערכות מבנה זהה למבנה של המערכת הנתונה: $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$

לכן, אפשר להיעזר בפתרון המערכת הנתונה $(x=5$ ו- $y=1)$
כדי לפתור את המערכות האחרות.

למשל, בפתרון המערכת $\begin{cases} 2(x-1)+3(y-1)=13 \\ 3(x-1)-4(y-1)=11 \end{cases}$

מקבלים: $x-1=5$ ולכן, $x=6$

$y-1=1$ ולכן, $y=2$



אוסף משימות



1. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$ שפתרונה הוא $(7, 1)$. בִּדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומִצאו את הפתרון של המערכת.

א. $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 6x - 2y = 40 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 5x - 15y = 20 \\ 9x - 3y = 60 \end{cases}$



2. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$ שפתרונה הוא $(3, 2)$. בִּדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומִצאו את הפתרון של המערכת.

א. $\begin{cases} 4y - 2x = 2 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 8y - 4x = 4 \\ -10y - 3x = -29 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 5y + 1.5x = 14.5 \end{cases}$



3. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -2x + 5y = -12 \end{cases}$ שפתרונה הוא $(1, -2)$. בִּדקו.

בכל סעיף, היעזרו בפתרון המערכת הנתונה ומִצאו את הפתרון של המערכת.

א. $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 6y - 9x = -21 \\ 10y - 4x = -24 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 1.5x - y = 3.5 \\ x - 2.5y = 6 \end{cases}$



4. כִּתבו מערכת משוואות שיש לה אותו פתרון כמו למערכת: $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$



5. בכל סעיף, פִּתרו את מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y + 1 = 8 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = x + 4 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y - x - 1 = 6 \end{cases}$

6. בכל סעיף, פִּתרו את מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} 3(x+y)+y=7 \\ 2(x-y)+3y=7 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 7(x+3)+3y=27 \\ 5(1-y)-x=8(x+1)+y \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 5-(2x+3)=y+2 \\ 5-2(3x+2)=9y+13 \end{cases}$

7. בכל סעיף, פִּתרו את מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} \frac{3x+y}{2}-x=-4 \\ 2y-3x=9 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} \frac{3x+2y+2}{6}=\frac{2x-y+3}{2} \\ 2x+3y+11=0 \end{cases}$ ג. $\begin{cases} \frac{x-y}{2}+\frac{y+1}{3}=2.5 \\ 2(x-4)-5(y-3)=x+y \end{cases}$

8. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x+5y=12 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$

א. פִּתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופִּתרו את המערכות הבאות.

(i) $\begin{cases} 2(x+1)+5(y+1)=12 \\ 3(x+1)+4(y+1)=11 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(x-1)+5(y-1)=12 \\ 3(x-1)+4(y-1)=11 \end{cases}$

9. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2x-3y=13 \\ 4x+5y=15 \end{cases}$

א. פִּתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופִּתרו את המערכות הבאות.

(i) $\begin{cases} 2(x+1)-3(y+2)=13 \\ 4(x+1)+5(y+2)=15 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(x-3)-3(y+1)=13 \\ 4(x-3)+5(y+1)=15 \end{cases}$

10. נתונה מערכת המשוואות $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 10y + 3x = -10 \end{cases}$

א. פִּתרו את המערכת.

ב. היעזרו בפתרון המערכת הנתונה, ופִתרו את המערכות הבאות.

(i) $\begin{cases} 2(y + 1) - (x + 2) = 6 \\ 10(y + 1) + 3(x + 2) = -10 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(2y - 1) - (x + 3) = 6 \\ 10(2y - 1) + 3(x + 3) = -10 \end{cases}$

11. א. מִצאו את הפתרון של כל מערכת, והַסבירו את המשמעות בייצוג הגאומטרי.

(i) $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 \\ 4x - 3y + 13 = 0 \end{cases}$

ב. היעזרו בפתרון המערכות בסעיף א, ומִצאו **בלי לפתור** את הפתרון של המערכות הבאות.

(i) $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 \\ \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x - 3y + 13 = 0 \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases}$



שיעור 4. מציאת חוקיות במערכת משוואות



מעיין, **הדר**, **יערית** ו**לילך** פָּתרו ארבע מערכות של משוואות.

המערכת של **מעיין**: $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$ המערכת של **יערית**: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 5y = 4 \end{cases}$

המערכת של **הדר**: $\begin{cases} 8x + 9y = 10 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases}$ המערכת של **לילך**: $\begin{cases} 9x + 10y = 11 \\ -2x - 3y = -4 \end{cases}$

נפתור ונגלה חוקיות מעניינת במערכות של משוואות.

במשימות 1 - 4 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

1. א. התבוננו במערכות המשוואות שבמשימת הפתיחה, ונַסו לגלות תכונה משותפת לכל המערכות.

ב. פִּתרו את המערכות.

ג. מה משותף לארבע המערכות?

2. **אילנית** הציצה בפתרונות של חברותיה ורשמה את המערכת $\begin{cases} 99x + 100y = 101 \\ 99x + 98y = 97 \end{cases}$

אילנית אמרה: הפתרון של מערכת המשוואות שלי זהה לפתרון המערכות שלכן.

האם **אילנית** צודקת? הַסבירו.

3. **רועי** אמר: בכל משוואה, שלושה מספרים עוקבים המסודרים בסדר עולה או בסדר יורד.

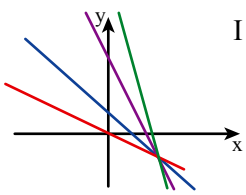
א. האם **רועי** צודק? הַסבירו.

ב. רִשמו מערכת משוואות משלכם המקיימת את התכונה שציין **רועי**.

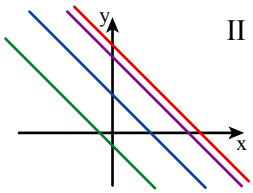
בִּדקו אם פתרון המערכת שרשמתם זהה לפתרון המערכות שבמשימת הפתיחה.

4. באיזה שרטוט הגרפים מתארים משוואות ממשימת הפתיחה? הַסבירו.

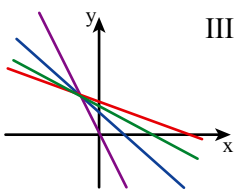
I



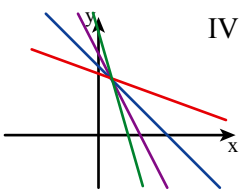
II



III



IV



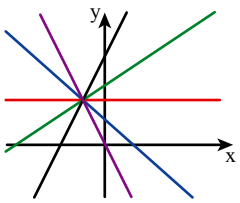


ראינו כי $(-1,\ 2)$ הוא פתרון של כל משוואה מהצורה $ax + by = c$
כאשר $a,\ b,\ c$ הם מספרים עוקבים.

הסבר: נרשום את המשוואה כך: $ax + (a + 1)y = a + 2$

נציב $x = -1,\ y = 2$ במשוואה ונקבל: $-a + 2(a + 1) = a + 2$

לאחר פישוט נקבל זהות $a + 2 = a + 2$





5. המספרים $a,\ b,\ c$ הם מספרים עוקבים.
המספרים $d,\ e,\ f$ הם מספרים עוקבים.
הַסבירו מדוע פתרון המערכת $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ הוא $(-1\ ,\ 2)$

6. א. פִּתרו את המערכות הבאות.

$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

ב. מְצאו בלי לפתור את פתרון המערכת: $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$



7. **עידן** אמר: הנקודה $(-1,\ 2)$ היא פתרון של כל מערכת משוואות שבה מופיעים מספרים שההפרש ביניהם קבוע.
האם **עידן** צודק? הַסבירו.



טענה: אם נתונות שתי משוואות מהצורה $ax + by = c$ כאשר בין המספרים $a\ ,\ b\ ,\ c$ -ו בכל משוואה יש רווח קבוע k, אז כל הישרים עוברים דרך הנקודה $(-1\ ,\ 2)$

הצדקת הטענה: נרשום את המשוואות בצורה $ax + (a + k)y = a + 2k$, a -ו k מספרים כלשהם.

נציב $x = -1,\ y = 2$ במשוואה הכללית

ונקבל $-a + 2(a + k) = a + 2k$

לאחר פישוט נקבל זהות $a + 2k = a + 2k$

אוסף משימות



1. האם פתרון המערכת $\begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ 9x + 10y = 11 \end{cases}$ הוא $(2, -1)$? הַסבירו.



2. רִשמו מערכת משוואות שפתרונה $(2, -1)$.

3. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 6x + 7y = 8 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ 3x + 10y = 17 \end{cases}$

4. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 8x + 7y = 6 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

5. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} 5x + 8y = 11 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 6x - 2y = -10 \\ 2x + 8y = 14 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} 10x + 4y = -2 \\ -3x + 5y = 13 \end{cases}$

6. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases} 3(x + y) - y = 1 \\ 2(x + 3) + 3(y - 1) = 7 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} 2(x + 1) + 3y = 6 \\ 3(x - 2) + 5y = 1 \end{cases}$

7. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases}(x+1)(y-3)=xy+2\\(x-2)(y-1)=xy-1\end{cases}$

ב. $\begin{cases}(x+3)(y-2)=xy+2\\(x-4)(y+1)=xy-13\end{cases}$

8. בכל סעיף, מִצאו את פתרון מערכת המשוואות.

א. $\begin{cases}\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{3}=1\\\frac{3x-1}{4}-\frac{y-2}{3}=-1\end{cases}$

ב. $\begin{cases}\frac{3y-2x}{2}+\frac{y-x}{3}=5\\\frac{2x+5}{3}-\frac{y+2}{4}=0\end{cases}$



9. א. הפתרון של כל מערכת משוואות הוא אחד מן הזוגות הבאים: $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ $\left(-1,\ 1\frac{1}{2}\right)$

הַתאימו פתרון למשוואה

I. $\begin{cases}x+y=\frac{1}{2}\\x-2y=-4\end{cases}$ II. $\begin{cases}x+2y=2\\4x-2y=3\end{cases}$ III. $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+1\\y=x+2\frac{1}{2}\end{cases}$ IV. $\begin{cases}y=-2x-\frac{1}{2}\\y=1\frac{1}{2}\end{cases}$

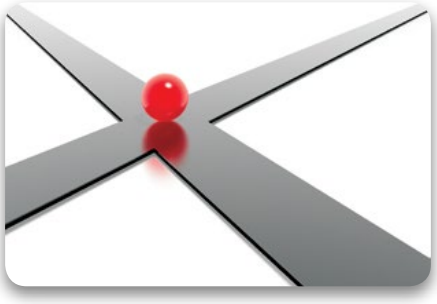
ב. המשוואות הבאות נלקחו מסעיף א, $\begin{cases}y=-2x-\frac{1}{2}\\y=1\frac{1}{2}\end{cases}$ מהו פתרון המערכת? הַסבירו.



10. בכל סעיף, הַעתיקו והַשלימו מספרים מתאימים במקומות הריקים, כך שתתקבל מערכת שפתרונה $(-1,\ 2)$.

א. $\begin{cases}\square\cdot x+2y=5\\3x-5y=\cdot\ \square\end{cases}$

ב. $\begin{cases}2x-\square\cdot y=-6\\\square\cdot x+\square\cdot y=6\end{cases}$

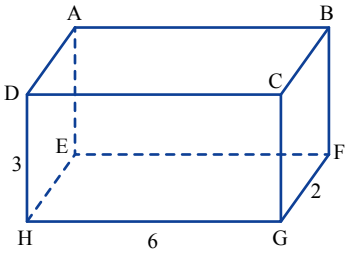




שומרים על כושר

קובייה ותיבה

1. נתונה תיבה. השרטוט הוא להדגמה, ומידות האורך נתונות בס״מ.

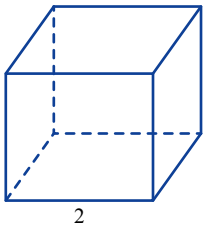


א. רִשמו 3 זוגות של פאות מקבילות.

ב. חַשבו את שטח הפנים של התיבה.

ג. חַשבו את נפח התיבה.
(**תזכורת**: נפח של תיבה שווה למכפלת שטח הבסיס באורך הגובה של התיבה).

2. לפניכם קופסה בצורת קובייה. השרטוט הוא להדגמה, ומידות האורך נתונות במטרים.

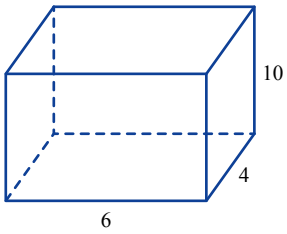


א. חַשבו את נפח הקופסה.

ב. חַשבו את שטח הפנים של הקופסה.

ג. רוצים לצבוע את מעטפת הקופסה.
לכל מ״ר דרוש 0.1 ליטר צבע.
כמה ליטרים צבע דרושים לצביעת כל הקופסה?

3. לפניכם קובייה קטנה ותיבה.
השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס״מ.
כמה קוביות קטנות דרושות כדי למלא את התיבה?
הַסבירו.





4. הַציעו 3 אפשרויות למידות של תיבות (שונות) בעלות נפח של 72 סמ״ק.

5. א. נפח של קובייה הוא 1,000 סמ״ק.
מה אורך צלע הקובייה?
האם אפשר ליצור שלד של קובייה זו ממקל באורך 1 מטר? הַסבירו.
(תזכורת: שלד של קובייה הוא סכום אורכי המקצועות).

ב. נפח קובייה הוא 3,375 מטרים.
מה אורך החוט ממנו אפשר ליצור שלד של קובייה זו? הַסבירו.