

יחידה 30: על משפטים והוכחות

שיעור 1. מהו משפט במתמטיקה?

במהלך לימוד גיאומטריה ניסחנו משפטים (משפטי חפיפה, משפט דמיון, ועוד).

בשיעור זה נדון מהו משפט במתמטיקה, ונבחין בין משפט במתמטיקה

ומשפט בשפה המדוברת.



האם אפשר לשאול לגבי הביטויים הבאים "נכון" או "לא נכון"?

א. אם יורד שלג, הטמפרטורה נמוכה מ-2 מעלות.

ב. מה הסכום של 24 ו-76?

1. בכל סעיף, קבעו אם הביטוי הוא טענה שאפשר לשאול לגביה אם היא "נכונה" או "אינה נכונה".

א. אם יורד גשם יש עננים בשמים. ד. מתמטיקה משולבת כיתה ח חלק ב.

ב. מה סכום הזוויות במרובע? ה. במשולש כל הזוויות שוות זו לזו.

ג. במחומש יש 5 אלכסונים. ו. משולש ישר זווית ושווה שוקיים.



משפט במתמטיקה בנוי **מנתונים ומסקנה**, לכן אפשר לשאול לגביו: "נכון" או "לא נכון".

כלומר, אפשר לקבוע אם המסקנה נובעת מהנתונים או לא.

כל משפט במתמטיקה אפשר לנסח באמצעות "אם" ו"אז" המפרידים בין הנתונים למסקנה.

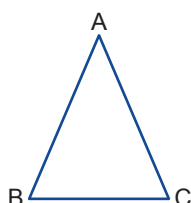
דוגמה: אם יורד שלג אז הטמפרטורה נמוכה מ-2 מעלות.

2. נסחו בעזרת "אם" ו"אז" את המשפטים ממשימה 1, המתאימים להגדרה של משפט במתמטיקה.



במקרים רבים נהוג לרשום את הנתונים, ואת המסקנות בכתיב מתמטי.

דוגמה: אם המשולש שווה שוקיים, אז זוויות הבסיס שוות.



נתון: $AB = AC$

מסקנה: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$

3. שרטטו וְרשמו את הנתונים והמסקנה בכתיב מתמטי.
- א. אם במשולש ABC הזווית A קהה, אז שתי הזוויות האחרות חדות.
 ב. אם במשולש שלוש הזוויות שוות זו לזו, אז המשולש שווה צלעות.
4. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים. הסבירו.
- א. נתון דינה נמוכה מרחל. ב. נתון יוסי נמוך מדני. ג. נתון ישר a חותך את ישר b.
 ונועם נמוך מדינה. ורחל נמוכה מדני. ישר b חותך את ישר c.
מסקנה: נועם נמוך מרחל. **מסקנה:** רחל נמוכה מיוסי. **מסקנה:** ישר c חותך את ישר a.
5. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים. אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה המראה שהמשפט אינו נכון.
- א. אם מחלקים זווית חדה לשתי זוויות שוות, אז כל אחת מהן קטנה מ- 45° .
 ב. אם שתי זוויות במשולש חדות, אז הזווית השלישית קהה.
 ג. זווית צמודה לזווית חדה היא זווית קהה.



אוקלידס, המכונה "אבי הגיאומטריה", היה מתמטיקאי יווני שחי לפני כ-2,300 שנה (365-275 לפנה"ס) וחיבר סדרה בת 13 ספרים בשם "יסודות".

בספרים אלה, אוקלידס סיכם, ערך וסידר את הידע המתמטי שנצבר עד לאותה תקופה בתחומים הקשורים לגיאומטריה ולתכונות של מספרים.

תרומתו הגדולה של אוקלידס הייתה בביסוס המבנה הדדוקטיבי במתמטיקה.

מבנה זה מבוסס על מערכת של הגדרות, הנחות יסודיות ואקסיומות.

הרחבת המבנה מתבצעת על-ידי ניסוח טענות (משפטים), שנכונותם חייבת להיקבע על-ידי הסתמכות על המערכת הבסיסית ועל משפטים שהוכחו קודם.

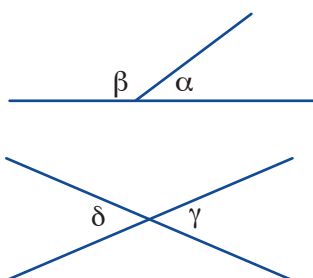
לימים נקראה הגיאומטריה המבוססת על עקרונות דדוקטיביים **גיאומטריה אוקלידית**.



1. נסחו את המשפטים הבאים באמצעות "אם" ו"אז".
- א. כשחם צריך לשתות הרבה. ד. כל ילד מעל גיל 6 חייב ללכת לבית הספר.
 ב. כלב נובח איננו נושך. ה. תלמיד שאינו מכין שיעורי בית במתמטיקה נכשל במבחן.
 ג. בחורף יורד גשם. ו. משולש שבו שתי זוויות חדות, הוא משולש חד זווית.

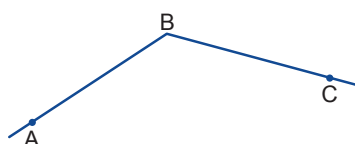
במשימות 2 ו-3 היעזרו בתזכורת שלפניכם.

תזכורת:



• **זוויות צמודות** נוצרות כאשר משרטטים קרן מנקודה על ישר. זוויות צמודות יוצרות יחד זווית שטוחה. (למשל, α ו- β בשרטוט.)

• **זוויות קודקדיות** נוצרות בין שני ישרים נחתכים ואינן זוויות צמודות. (למשל, γ ו- δ בשרטוט.)



2. א. העתיקו את זווית ABC ושרטטו זווית צמודה לזווית ABC.

ב. שרטטו זווית קודקדית לזווית ABC.



3. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.

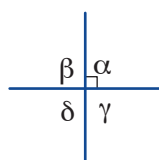
אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה המראה שהמשפט אינו נכון.

א. אם סכומן של שתי זוויות 180° , אז הן זוויות צמודות.

ב. אם זוויות בעלות קודקוד משותף שוות, אז הן זוויות קודקדיות.

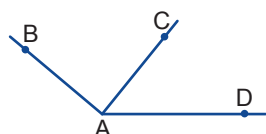
ג. אם מחלקים זווית קהה לשלוש זוויות שוות, אז כל אחת מהן קטנה מ- 60° וגדולה מ- 30° .

ד. אם זוויות בעלות קודקוד משותף שונות זו מזו, אז הן אינן זוויות קודקדיות.



4. רשמו את הנתונים והמסקנה בכתב מתמטי.

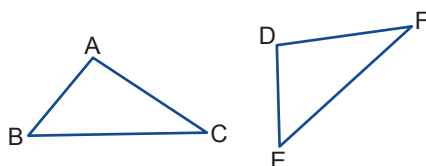
א. אם אחת הזוויות בין שני ישרים נחתכים היא ישרה, אז גם שלוש הזוויות האחרות ישרות.



ב. אם AC חוצה את הזווית הקהה BAD,

אז זווית CAD גדולה מ- 45° .

ג. משולשים חופפים שווים בשטחם.

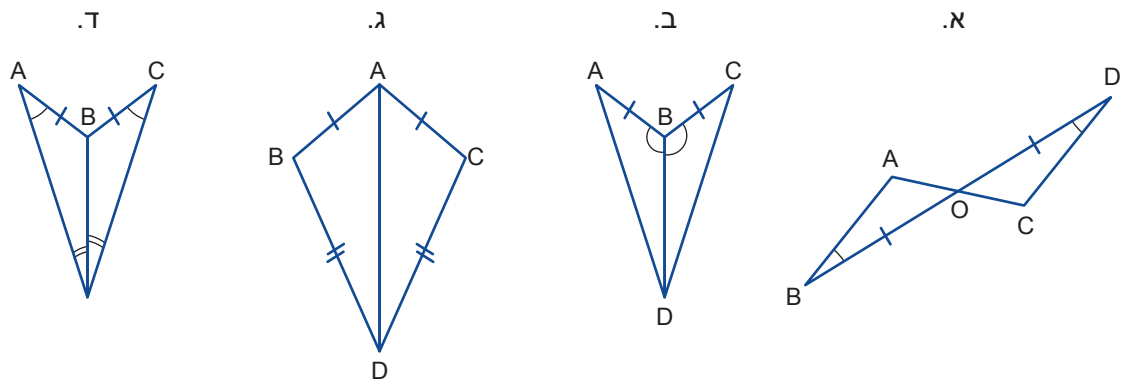




5. הסבירו מדוע המשפטים הרשומים בסעיפים א ו- במשימה 4, הם משפטים נכונים.



6. בכל סעיף אפשר להסיק מהנתונים כי יש זוג משולשים חופפים.
 קשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי וציינו על סמך איזה משפט אפשר להסיק את החפיפה.



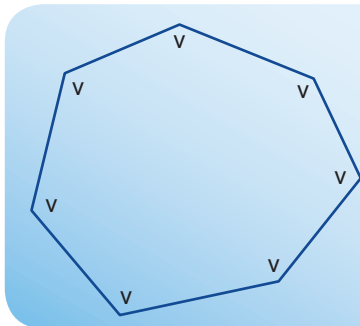
7. א. נתון כי כל החתולים ששמן "שחורי" הם שחורים. החתול של נחמה איננו שחור.
 האם אפשר להסיק מהנתונים ששמו של החתול של נחמה איננו שחורי?
 ב. נתון כי כלב נובח אינו נושך. כמו כן נתון כי כלב רעב נובח.
 האם על פי הנתונים אפשר להסיק כי כלב רעב נושך או שכלב רעב אינו נושך?



8. בתמונה 7 כוכבים.
 העתיקו למחברתכם ושרטטו ישרים שיחלקו את התמונה,
 כך שכל כוכב יהיה בחלק אחר.
 מצאו מהו המספר הקטן ביותר של ישרים.



שיעור 2: זוויות פנימיות במצולע



בשרטוט מצולע בעל שבע צלעות.

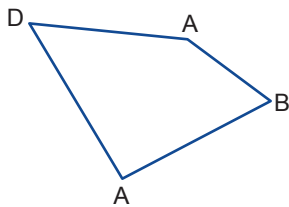
האם אפשר למצוא ללא מדידה את סכום הזוויות הפנימיות, המסומנות ב- $\checkmark$ בשרטוט?

נבדוק מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולעים שונים, שמספר צלעותיהם הולך וגדל.

הוכחתם בעבר שסכום הזוויות במשולש הוא 180° .

1. מהו סכום הזוויות במרובע?

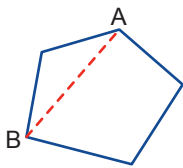
שרטטו אלכסון והסבירו על סמך סכום הזוויות במשולש.



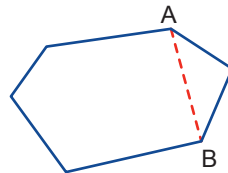
2. מהו סכום הזוויות במחומש?

א. **יורם** טען: מצאתי שסכום הזוויות במחומש גדול ב- 180° מסכום הזוויות במרובע.

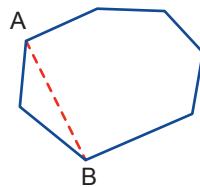
הסבירו את טענתו בעזרת השרטוט. מה סכום הזוויות במחומש?



ב. מהו סכום הזוויות במשושה?



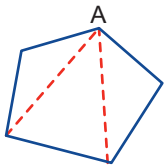
ג. מהו סכום הזוויות במצולע בעל שבע צלעות?



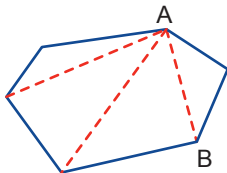
3. א. **יעל** אמרה: אני מצאתי את סכום הזוויות במצולעים השונים בדרך אחרת.

העברתי את שני האלכסונים מהקודקוד A ומצאתי שהסכום הוא 540° .

הסבירו את טענתה.



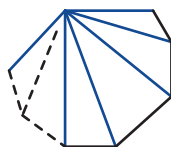
ב. הסבירו בעזרת השרטוט מדוע סכום הזוויות במשושה הוא 720° .



ג. בדקו מה יהיה סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות.

הסבירו מדוע מספר המשולשים הנוצרים הוא: $n - 2$.

מה סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות?

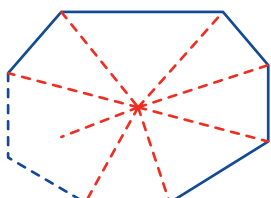


ד. **יורם** אמר: סכום הזוויות במחומש גדול ב- 180° מסכום הזוויות במרובע.

הסבירו בעזרת הביטוי שקיבלתם בסעיף ג את המסקנה של יורם.



סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא $180^\circ(n - 2)$.



4. א. **יונית** אמרה: אני מצאתי נוסחה שונה: סימנתי נקודה בתוך המצולע

וחיברתי אותה עם הקודקודים. הנוסחה שלי היא:

$$180^\circ n - 360^\circ$$

הסבירו כיצד מצאה יונית את הנוסחה.

ב. הביטוי של יונית שווה ערך לביטוי $180^\circ(n - 2)$ שהתקבל במשימה 3. הסבירו.

5. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. אם כן, נמקו.

אם לא, שרטטו דוגמה נגדית ורשמו גדלים של זוויות המראים כי הטענה אינה נכונה.

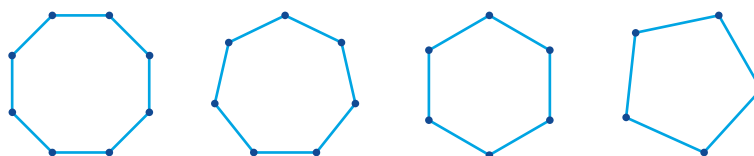
א. במשושה כל הזוויות קהות.

ב. אין מחומש עם 3 זוויות ישרות.

ג. אין מחומש עם 4 זוויות ישרות.



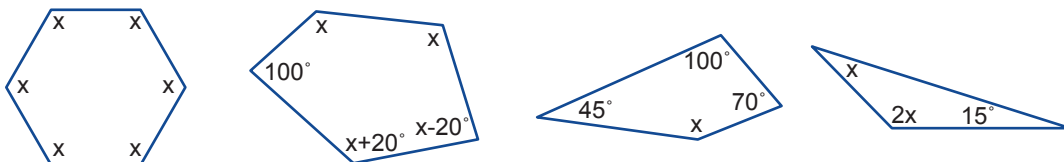
מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו, וכל זוויותיו שוות זו לזו.



6. א. מה שמו של משולש משוכלל? מה גודל כל זווית במשולש משוכלל?

ב. מה שמו של מרובע משוכלל? מה גודל כל זווית במרובע משוכלל?

1. במצולעים המשורטטים חשבו את הזוויות שאינן נתונות.



2. א. מה סכום הזוויות במצולע בעל 14 צלעות?

ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 20 צלעות?

ג. האם קיים מצולע שסכום זוויותיו 1000° ? אם קיים מצולע כזה, מה מספר צלעותיו? אם לא, הסבירו.

ד. האם קיים מצולע שסכום זוויותיו 2340° ? אם קיים מצולע כזה, מה מספר צלעותיו? אם לא, הסבירו.



3. א. מה סכום הזוויות במצולע בעל 10 צלעות?

מה גודל כל זווית במצולע משוכלל שיש בו 10 צלעות?

ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 12 צלעות?

מה גודל כל זווית במצולע משוכלל שיש בו 12 צלעות?



4. מה מספר צלעותיו של מצולע משוכלל אם גודל כל זווית בו 135° ?



5. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. אם כן, נמקו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית המראה כי הטענה אינה נכונה.

א. לא קיים משולש בעל זווית קהה וזווית ישרה.

ב. לא קיים משולש שיש בו יותר משתי זוויות חדות.

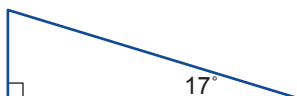
ג. בכל משולש יש לפחות שתי זוויות חדות.



6. חשבו את גודל הזוויות בכל אחד מהמשולשים הבאים.

א. גודל אחת מזוויות המשולש 48° ושתי הזוויות האחרות שוות זו לזו.

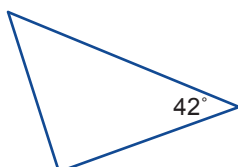
ב. המשולש ישר זווית וגודל אחת הזוויות בת 17° .



ג. המשולש קהה זווית. יש בו שתי זוויות שוות. גודל אחת הזוויות במשולש 22° .



ד. אחת מזוויות המשולש היא בת 42° וזווית אחרת במשולש גדולה ממנה פי 2.



7. חשבו את גודל הזוויות בכל אחד מהמשולשים הבאים.

א. גודל אחת מזוויות המשולש 52° ושתי הזוויות האחרות שוות זו לזו.

ב. המשולש ישר זווית וגודל אחת הזוויות בת 27° .

ג. המשולש קהה זווית. יש בו שתי זוויות שוות. גודל אחת הזוויות במשולש 31° .

ד. אחת מזוויות המשולש היא בת 42° וזווית נוספת במשולש גדולה פי 2 מהזווית השלישית.

ה. גודל אחת מזוויות המשולש 26° ויש במשולש שתי זוויות שוות.

מצאו זוויות של שני משולשים המתאימים לנתונים.



8. תנו דוגמה המראה כי כל אחד מהמשפטים הבאים הוא משפט נכון. (שרטטו ורשמו דוגמה מספרית).

א. **קיים** משולש חד זווית בו אחת הזוויות היא בת 5° .

ב. **קיים** משולש חד זווית בו אחת הזוויות היא בת 85° .

ג. **קיים** משולש ישר זווית בו אחת הזוויות היא בת 85° .

ד. **קיים** משולש קהה זווית בו אחת הזוויות היא בת 85° .



9. בדקו אם הטענות הבאות נכונות.

אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה נגדית. (דוגמה המראה כי הטענה אינה נכונה).

א. במשולש יש לכל היותר זווית קהה אחת.

ב. במרובע יש לכל היותר שלוש זוויות קהות.

ג. לפחות זווית אחת במרובע חייבת להיות קהה.

ד. לפחות זווית אחת במרובע, שאינו מלבן, חייבת להיות חדה.

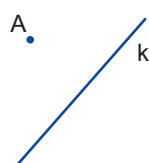


10. בדקו אם הטענות הבאות נכונות.

- אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה נגדית (דוגמה המראה כי הטענה אינה נכונה).
- א. במרובע יש לכל היותר שתי זוויות קהות.
 - ב. במחומש יש לכל היותר שלוש זוויות קהות.
 - ג. במחומש יש לכל היותר שלוש זוויות ישרות.
 - ד. לפחות זווית אחת במרובע, שאינו מלבן, חייבת להיות חדה.



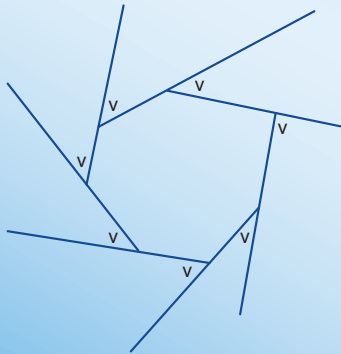
11. נתון ישר k ונקודה A מחוץ לישר. מדוע לא נוכל להעביר שני ישרים מאונכים העוברים דרך הנקודה A ומאונכים לישר k ?



במדינות שונות השתמשו ומשתמשים עד היום במטבעות בצורת מצולעים:

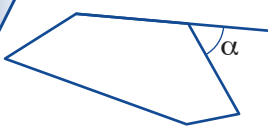
- א. לכל מטבע, קשמו את שם המצולע המתאים לצורתו.
- ב. אילו מהמצולעים הם מצולעים משוכללים?
- ג. לאיזה מטבע בישראל צורת מצולע? מה שם המצולע?
- ד. מה היתרונות והחסרונות בשימוש במטבעות מצולעים?

שיעור 3: בשביל מה צריך הוכחות?



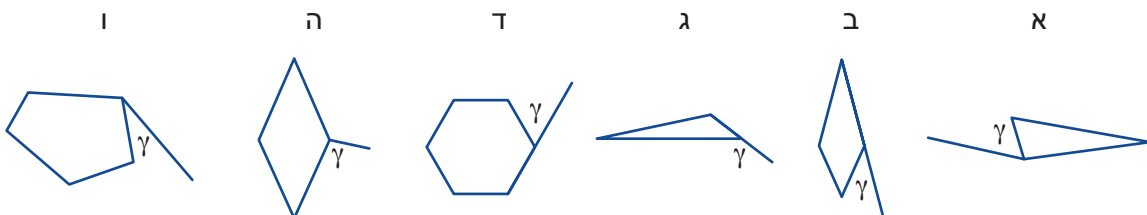
במצולע שבשרטוט 7 צלעות.
האם אפשר למצוא ללא מדידה, את סכום הזוויות המסומנות ב- $\checkmark$
שבשרטוט?

נבדוק מהו סכום הזוויות החיצוניות במוצלים שונים.

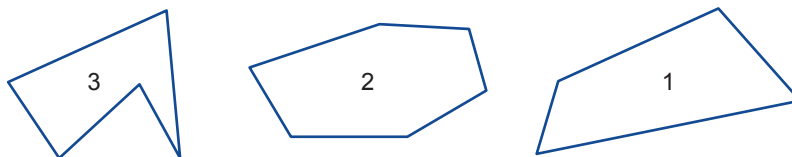


זווית הצמודה לאחת מזוויות המצולע נקראת **זווית חיצונית למצולע**.
למשל, זווית α בשרטוט.

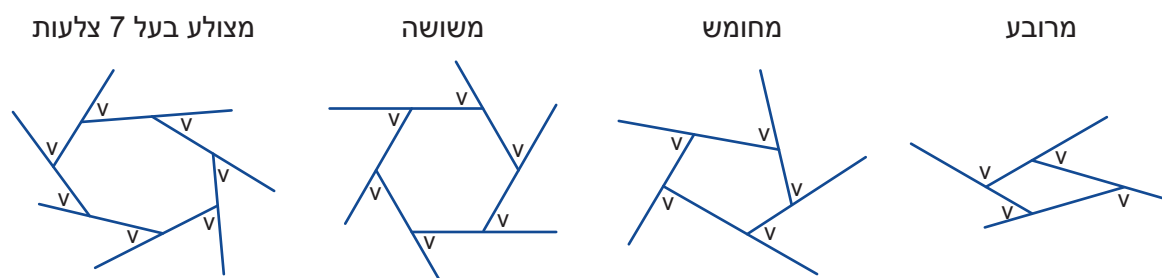
1. באילו שרטוטים הזווית γ היא זווית חיצונית למצולע?



תזכורת: מצולע קמור הוא מצולע שכל אחת מזוויותיו קטנה מזווית שטוחה.
מצולע קעור הוא מצולע שלפחות אחת מזוויותיו גדולה מזווית שטוחה.
מצולעים 1, 2 הם מצולעים קמורים ואילו מצולע 3 הוא מצולע קעור.



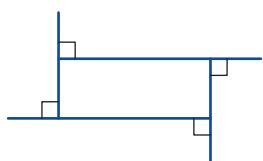
2. לפניכם שרטוטים של מצולעים קמורים שזוויותיהם החיצוניות מסומנות ב- $\vee$.



שערו כיצד משתנה סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור (אחת ליד כל קודקוד) כשמספר הצלעות של המצולע גדל ב-1.



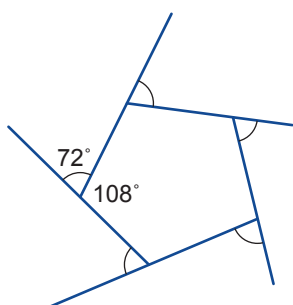
3. א. דני אמר: ראיתי שבמלבן סכום הזוויות החיצוניות 360° . כך זה ודאי בכל מרובע.



לכן, אני חושב שסכום הזוויות החיצוניות בכל מצולע, שווה לסכום הזוויות הפנימיות של אותו מצולע: במחומש 540° , במשושה 720° וכו'.

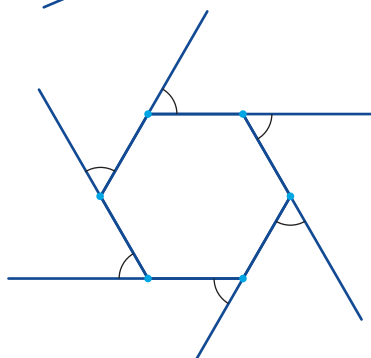
מיכל אמרה: דני צודק, ראינו שכאשר מספר הצלעות של המצולע גדל ב-1, סכום הזוויות הפנימיות גדל ב- 180° , נראה לי שגם סכום הזוויות החיצוניות גדל כך: במחומש $540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$ במשושה $720^\circ = 540^\circ + 180^\circ$ וכו'.

מה דעתכם?



ב. רועי אמר: בשיעור שעבר מצאנו שסכום הזוויות במחומש 540° וגודל כל זווית פנימית במחומש משוכלל הוא $108^\circ = \frac{540}{5}$. לכן, גודל כל אחת מהזוויות החיצוניות הצמודות לפנימיות, 72° , והסכום הוא $72 \cdot 5 = 360^\circ$

האם טענתו של רועי מתאימה לטענה של דני ומיכל?



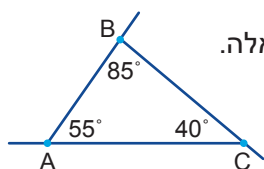
4. א. מצאו את את סכום הזוויות הפנימיות במשושה.

ב. מצאו גודל של כל זווית במשושה משוכלל.

ג. מצאו גודל של כל זווית חיצונית במשושה משוכלל.

ד. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

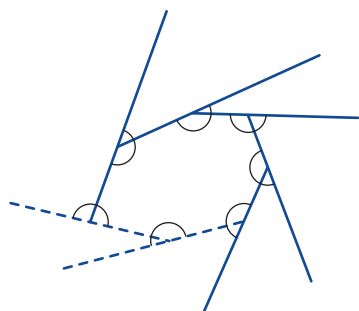
5. מצאו את הגודל של כל זווית חיצונית במשולש המשושט, ואת סכום הזוויות האלה.





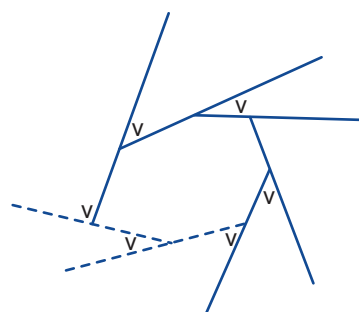
במשימה 3 ראינו כי השערות של דני ומיכל אינן נכונות.
האם ייתכן שסכום הזוויות החיצוניות (אחת ליד כל קודקוד) במצולע משוכלל הוא 360° ?
אולי בכל מצולע הסכום תמיד 360° ?
כדי לבדוק ולהשתכנע יש להוכיח את הטענות באמצעות משפטים קודמים שהוכחנו.

6. **משפט:** סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור (אחת ליד כל קודקוד) הוא 360° .

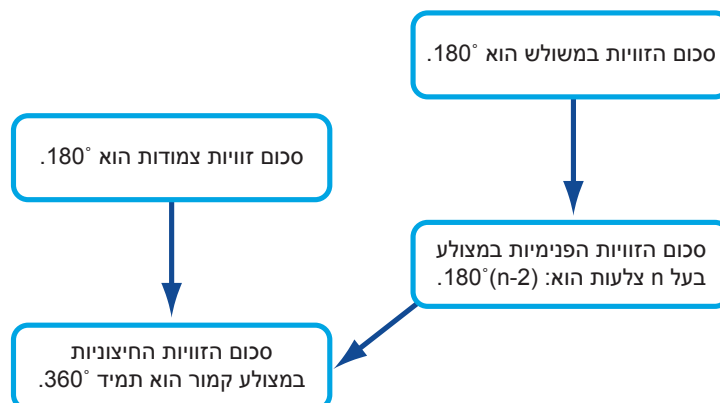


- רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.
- בשיעור שעבר הוכחנו כי סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא: $180(n - 2)$.
מהו סכום הזוויות הצמודות שליד כל קודקוד, במצולע בעל n צלעות?

מהו סכום הזוויות החיצוניות (אחת ליד כל קודקוד) במצולע בעל n צלעות?



לעיתים רק הוכחה משכנעת בנכונות של משפט ומסבירה מדוע הוא נכון.
הוכחה מבוססת על הנתונים ומשפטים קודמים שנלמדו.
בהוכחת המשפט, בדבר סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור, השתמשנו במשפטים הבאים:



7. קבעו אם אפשר להסיק את המסקנה. אם כן, נמקו.
 אם לא, שרטטו דוגמה נגדית (שרטוט המדגים כי המסקנה אינה נובעת מהנתונים).
 א. אם במשולש יש זווית חיצונית ישרה, אז המשולש הוא ישר זווית.
 ב. אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות, אז המשולש הוא חד זווית.
 ג. אם במרובע יש 3 זוויות חיצוניות קהות, אז הזווית החיצונית הרביעית חדה.



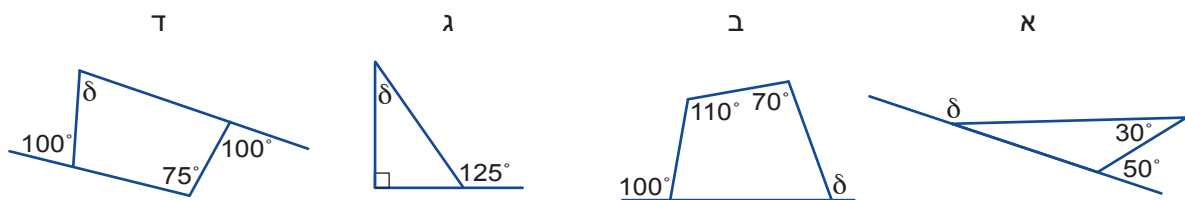
1. א. שרטטו מרובע קעור.
 ב. שרטטו משושה קעור שיש בו שתי זוויות חדות.
 ג. הסבירו מדוע לא קיים משולש קעור.



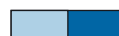
2. א. שרטטו משולש בעל זווית חיצונית חדה. איזה משולש שרטטתם?
 מאיזה סוג הזוויות החיצוניות האחרות של המשולש?
 ב. שרטטו משולש בעל זווית חיצונית ישרה. איזה משולש שרטטתם?
 מאיזה סוג הזוויות החיצוניות האחרות של המשולש?



3. חשבו את הזווית δ . הסבירו את שלבי החישוב.



4. חשבו את זוויות המשולש לפי הנתונים הבאים. (היעזרו בשרטוט המשולשים).
 א. זווית פנימית של 42° וזווית חיצונית של 80° .
 ב. זווית חיצונית של 95° וזווית חיצונית של 112° .
 ג. זווית פנימית של 130° וזווית חיצונית של 150° .



5. אם אפשר, חשבו את זוויות המשולש. אם לא, הסבירו מדוע לא קיים משולש המתאים לנתונים.

- זווית חיצונית של 90° וזווית חיצונית של 50° .
- זווית פנימית של 120° וזווית חיצונית הצמודה לקודקוד אחר של 60° .
- זווית פנימית של 130° וזווית חיצונית של 50° .
- למשולש שתי זוויות חיצוניות, הצמודות לקודקודים שונים, וגודל כל אחת מהן 116° .
- למשולש שתי זוויות חיצוניות, הצמודות לקודקודים שונים, וגודל כל אחת מהן 56° .



6. אם אפשר, שרטטו משולש מתאים. אם לא, הסבירו.

- זווית חיצונית אחת ישרה וזווית חיצונית אחת קהה.
- שתי זוויות חיצוניות חדות.
- שלוש זוויות חיצוניות קהות.



7. אם אפשר, שרטטו מצולע מתאים. אם לא, הסבירו.

- מרובע בו 3 זוויות חיצוניות ישרות.
- מחומש בו 3 זוויות חיצוניות ישרות.
- משושה בו 4 זוויות חיצוניות ישרות.



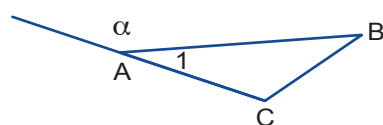
8. קבעו אם הטענות הבאות נכונות.

- אם כן, נמקו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית ורשמו בה גדלים של זוויות המראים כי הטענה אינה נכונה.
- אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות אז הזווית החיצונית השלישית חדה.
- בכל משולש יש לפחות שתי זוויות חיצוניות קהות.
- אם במשולש יש זווית חיצונית ישרה, אז שתי הזוויות החיצוניות האחרות קהות.
- אם במרובע יש שלוש זוויות חיצוניות ישרות, (הצמודות לקודקודים שונים) אז גם הזווית החיצונית הרביעית ישרה.



9. α זווית חיצונית למשולש CBA הצמודה לזווית A_1 .

קבעו אם הטענות הבאות נכונות. אם כן, נמקו, אם לא תנו דוגמה נגדית.



- $\alpha + \sphericalangle A_1 = 180^\circ$
- $\alpha = \sphericalangle B + \sphericalangle C$
- α גדולה מזווית C
- $\alpha = \sphericalangle A_1 + \sphericalangle C$