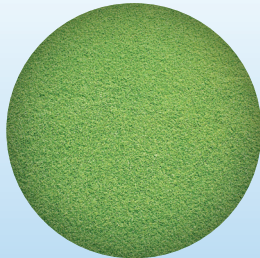




יחידה 23: מעגל

שיעור 1. מעגלים, קשתות וזוויות מרכזיות



במרכז השכונה בנו כיכר עגולה.
על היקף הכיכר רוצים לטעת 8 עצים, במרחקים שווים.
כיצד מחלקים את היקף המעגל ל- 8 קשתות שוות?

נלמד מושגים ומשפטים על מעגל.



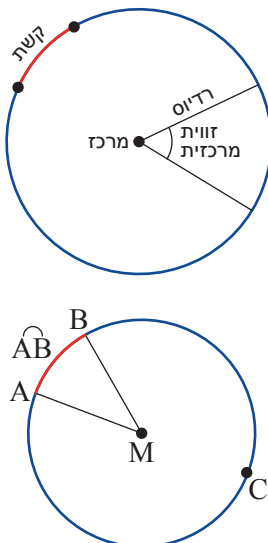
מושגים



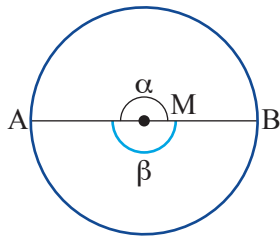
1. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו בנייה הנקראת "מרחק קבוע מנקודה". בפעילות תשרטטו אוסף נקודות שמרחקן מנקודה נתונה קבוע. בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.



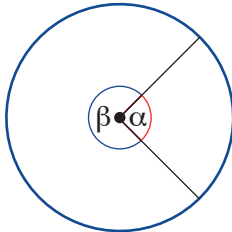
הגדרות



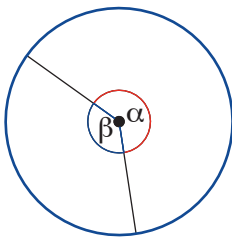
- קבוצת כל הנקודות במישור, הנמצאות באותו מרחק מנקודה מסוימת, נקראת **מעגל**. הנקודה נקראת **מרכז המעגל**.
- קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל נקרא **רדיוס המעגל**.
- חלק מהמעגל המוגבל על ידי שתי נקודות נקרא **קשת**.
- זווית שקודקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים נקראת **זווית מרכזית**.
- מסמנים** קשת AB (הקשת הקטנה יותר בין A ל-B) כך: $\widehat{AB}$ (הקשת הגדולה יותר בין A ל-B תסומן באמצעות אות נוספת: כאן $\widehat{ACB}$).
- אומרים**: הזווית המרכזית - $\angle AMB$, **נשענת** על $\widehat{AB}$, (או זווית AMB מתאימה לקשת AB).



2. הנקודה M מרכז המעגל.
 בת כמה מעלות הזווית המרכזית α ?
 בת כמה מעלות הזווית המרכזית β ?
 בת כמה מעלות הזווית $\alpha + \beta$?



3. א. נתון: $\alpha = 80^\circ$.
 בת כמה מעלות הזווית β ?

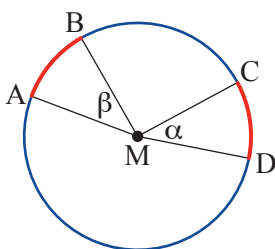


- ב. נתון: $\alpha = 210^\circ$.
 בת כמה מעלות הזווית β ?

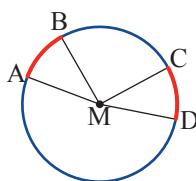
זוויות מרכזיות וקשתות



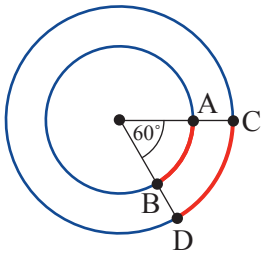
4. א. איזה חלק של המעגל מתאים לזוויות המרכזיות הבאות:
 40° 60° 80° 180° 240°
 ב. מה גודל הזווית המרכזית המתאימה לקשתות הבאות:
 ל- $\frac{1}{4}$ מעגל? ל- $\frac{3}{4}$ מעגל? ל- $\frac{2}{5}$ מעגל? ל- $\frac{1}{12}$ מעגל?



5. א. **נר אמר**: לזוויות מרכזיות שוות במעגל, מתאימים חלקים שווים של המעגל, כלומר, קשתות שוות.
 קשמו בכתיב מתמטי, מה נתון ומהי המסקנה של נר.
 ב. קשמו בכתיב מתמטי, **טענה הפוכה** לטענתו של נר.



משפט: לזוויות מרכזיות שוות במעגל מתאימות קשתות שוות.
משפט הפוך: לקשתות שוות במעגל, מתאימות זוויות מרכזיות שוות.
מסקנה: אפשר למדוד קשתות במעלות. גודל הקשת הוא כגודל הזווית המרכזית הנשענת עליה.



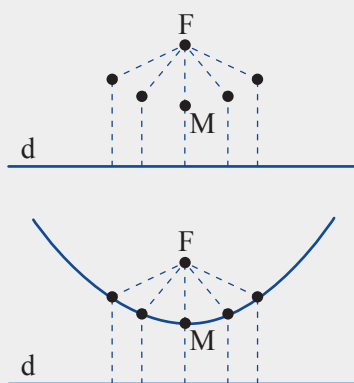
6. א. מה מידת הקשת AB במעלות?
 מה מידת הקשת CD במעלות?
 ב. שרטטו מעגל וסמנו בו קשת שגודלה 90° .
 שרטטו מעגל נוסף, עם אותו מרכז ורדיוס שונה מהקודם,
 וסמנו גם בו קשת שגודלה 90° .
 ג. הסבירו מדוע קשתות השונות באורכן,
 יכולות להיות בעלות אותה מידה הנמדדת במעלות.



7. נחזור לשאלה שהוצגה במשימת הפתיחה של השיעור.
 א. כיצד תחלקו מעגל ל-8 קשתות שוות, באמצעות מד זווית?
 ב. כיצד תחלקו מעגל ל-8 קשתות שוות באמצעות סרגל ומחוגה?
אורי אמר: אחלק תחילה את המעגל לארבע קשתות שוות,
 ואז אחלק כל קשת לשתי קשתות שוות.
 אילו בניות מבצעים לפי הצעתו של אורי? בצעו את הבנייה.



8. אם במקום המלה "מישור" בהגדרת המעגל, נשתמש במלה מרחב, נקבל: "קבוצת כל הנקודות במרחב, הנמצאות באותו מרחק מנקודה מסוימת נקראת..." באיזה גוף מדובר?



ראינו בגיאומטריה, כי המעגל הוא קבוצה של נקודות שהן בעלות תכונה משותפת: כל נקודה שעל המעגל נמצאת באותו מרחק מנקודה נתונה במישור.



במסגרת לימוד האלגברה, הכרתם את הפרבולה כגרף של פונקציה ריבועית. כמו במקרה של המעגל, גם על הפרבולה אפשר להסתכל כקו גאומטרי ולהגדיר אותה כקבוצה של נקודות שהן בעלות תכונה משותפת.

בשרטוט נקודה F וישר d. אם נחפש נקודות שמרחקן מן הנקודה שווה למרחקן מן הישר, נראה כי כל הנקודות האלה נמצאות לאורך קו שצורתו פרבולה (ראו שרטוטים). לכן נוכל להגדיר פרבולה גם כקו המורכב מכל הנקודות במישור הנמצאות במרחקים שווים מישר ומנקודה נתונים.



אוסף משימות



1. א. מה מידתה (במעלות) של קשת שהיא חמישית מעגל?
 ב. מה מידתה (במעלות) של קשת שהיא $\frac{3}{8}$ מעגל?
 ג. חילקו מעגל לשתי קשתות שהיחס ביניהן 1:2. בת כמה מעלות כל אחת מהקשתות?
 ד. חילקו מעגל לשתי קשתות שהיחס ביניהן 2:3. בת כמה מעלות כל אחת מהקשתות?



2. א. שרטטו שלושה מעגלים בעלי רדיוסים שונים, וסמנו בכל אחד מהם קשת בת 45° .
 ב. שרטטו שלושה מעגלים בעלי רדיוסים שונים, וסמנו בכל אחד מהם קשת בת 270° .



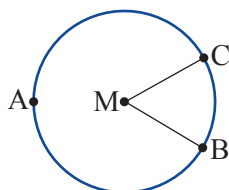
3. שרטטו מעגל וחלקו אותו לשלוש קשתות שוות באמצעות מד זווית.



4. נתון: הקשת BC היא בת 70° .

$$\widehat{AB} = \widehat{AC}$$

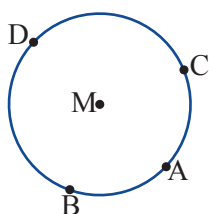
מצאו את גודל הקשתות AB ו- AC במעלות.



5. נתון: המיתר AD עובר דרך המרכז.

$$\widehat{AB} = \widehat{AC}$$

$$\widehat{DB} = \widehat{DC} \quad \text{הוכיחו:}$$



6. מה גודל הזווית המרכזית בין מחוגי השעון

בשעה 4:00? בשעה 7:00? בשעה 1:00? בשעה 12:30? בשעה 3:30?



7. מה גודל הקשת במעלות, שעובר מחוג השעות: משעה 12:00 עד שעה 5:00?

משעה 12:00 עד שעה 7:00? משעה 2:00 עד שעה 11:00? משעה 3:00 עד שעה 6:30?

שיעור 2. מיתרים במעגל



נהלל הוקמה בשנת 1921 בצפון עמק יזרעאל והיא מושב העובדים הראשון בארץ.

נהלל נבנתה בצורת עיגול*. תכנון זה שיקף את הרצון להקים מושב שיושגת על עקרונות השוויון: צריפיהם של החקלאים נבנו על היקף המעגל (ראו בתמונה), כך שמרחק כל צריף משפחתי מן המרכז שווה. בנוסף, בטבעת החיצונית

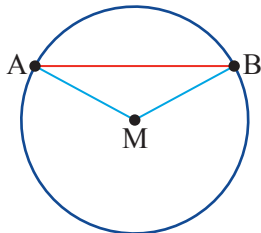
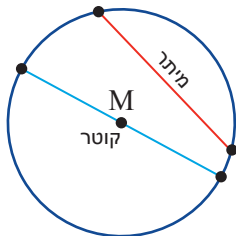
של העיגול הוכשרו החלקות החקלאיות, וכך היה גודל כל החלקות שווה. בחלק הפנימי של העיגול נבנו מוסדות הציבור וצריפיהם של עובדי הציבור.

נעסוק במיתרים, בזוויות המרכזיות ובקשתות המתאימות.



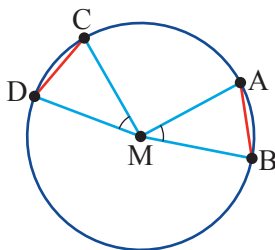
הגדרות

- קטע המחבר שתי נקודות על מעגל נקרא **מיתר**.
- מיתר העובר דרך מרכז המעגל נקרא **קוטר**.



- המיתר AB מתאים לזווית המרכזית $\angle AMB$ ולקשת $\widehat{AB}$.

מיתרים, זוויות מרכזיות וקשתות



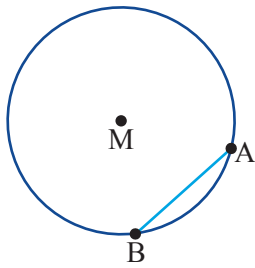
- א. משפט: אם במעגל זוויות מרכזיות שוות, אז הן מתאימות למיתרים שווים. קשמו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו.
- ב. קשמו משפט הפוך לזה שהוכחתם בסעיף א, והוכיחו אותו.



- הסבירו את שני המשפטים הבאים:

- למיתרים שווים במעגל מתאימות קשתות שוות.
- לקשתות שוות במעגל מתאימים מיתרים שווים.

* התמונה לקוחה מן האתר Google Maps Israel

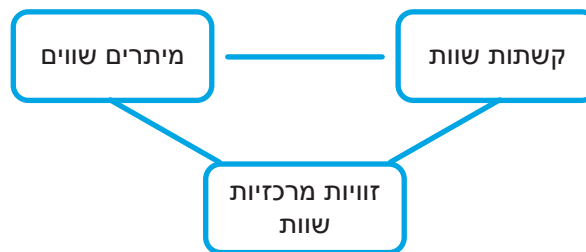


3. המיתר AB שווה באורכו לרדיוס המעגל.

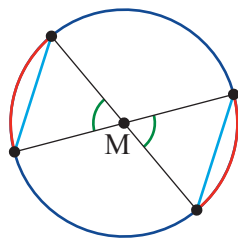
- א. מה גודל הזווית המרכזית והקשת המתאימות למיתר זה? הוכיחו.
 ב. שרטטו מעגל וחלקו אותו, באמצעות מחוגה, לשש קשתות שוות.



ראינו קשרים במעגל בין זוויות מרכזיות שוות, קשתות שוות ומיתרים שווים.



4. נסחו את הקשרים הרשומים למעלה כמשפטים.

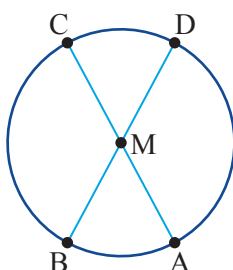
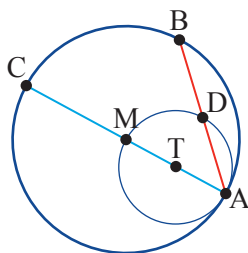


אוסף משימות



1. בכל סעיף, ציינו אם הקטע הנתון הוא רדיוס, קוטר או מיתר שאינו קוטר.

- | | |
|--------------------|--------------------|
| א. הקטע MA במעגל M | ד. הקטע MA במעגל T |
| ב. הקטע AB במעגל M | ה. הקטע AD במעגל T |
| ג. הקטע AC במעגל M | ו. הקטע TA במעגל T |



2. AC ו-BD הם שני קטרים במעגל שמרכזו M.

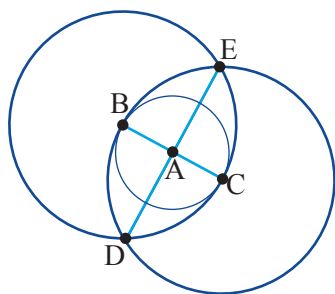
מהו סוג המרובע ABCD?
 שרטטו את המרובע והוכיחו את טענתכם.



3. א. שרטטו מעגל שמרכזו M, ובו שני קטרים AC ו-BD מאונכים זה לזה.
 שרטטו את המרובע ABCD.
 ב. מהו סוג המרובע הזה? הוכיחו את טענתכם.



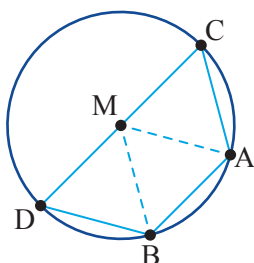
4. בשרטוט שלושה מעגלים שמרכזיהם A, B, ו-C.
 בכל סעיף, ציינו מהו הקטע: רדיוס, קוטר, או מיתר שאינו קוטר.



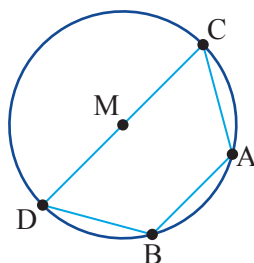
- א. הקטע BC במעגל A
 ב. הקטע BC במעגל B
 ג. הקטע BC במעגל C
 ד. הקטע AC במעגל A
 ה. הקטע DE במעגל B
 ו. הקטע DE במעגל C



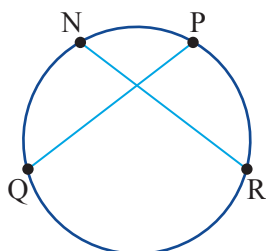
5. CD קוטר במעגל שמרכזו M.
 חילקו את הזווית השטוחה DMC לשלוש זוויות שוות.
 א. חשבו את זוויות המרובע ABDC.
 ב. הוכיחו כי: $CA = AB = BD$
 ג. הוכיחו כי המרובע ABDC הוא טרפז שווה שוקיים.



6. CD קוטר במעגל M.
 AB, AC, ו-BD הם שלושה מיתרים שווים במעגל.
 א. חשבו את זוויות המרובע ABDC.
 ב. הוכיחו כי המרובע ABDC הוא טרפז שווה שוקיים.

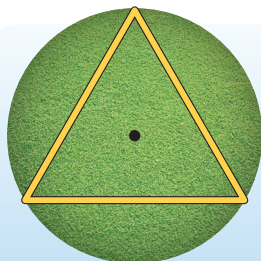


7. NR ו-PQ הם שני מיתרים שווים הנחתכים בתוך מעגל.
 הוכיחו כי: $PR = NQ$
 (רמז: היעזרו בשוויון קשתות.)



8. מהו המיתר הארוך ביותר במעגל? הוכיחו את טענתכם.

שיעור 3. מעגל וישר



אורך הקוטר של כיכר העיר 200 מטר.
המתכנן הציע בניית מסלול צעידה שצורתו משולש שווה צלעות כבתמונה.
כיצד יחשב המתכנן את אורך המסלול?

נעסוק בנקודות משותפות למעגל ולישר, ובקשרים בין מיתר במעגל לרדיוס המאונך לו.

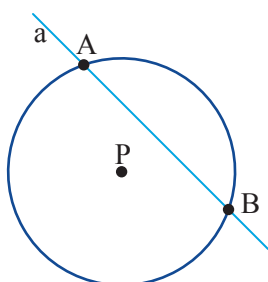
מספר נקודות חיתוך של מעגל ושל ישר



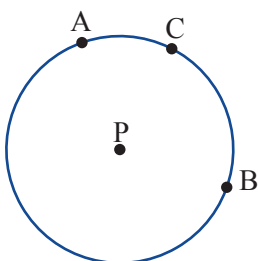
1. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו בנייה הנקראת "ישר ומעגל". בפעילות חוקרים כמה נקודות חיתוך יכולות להיות למעגל וישר.
בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.



2. כמה נקודות משותפות יכולות להיות למעגל ולישר?
שרטטו את כל האפשרויות.



3. א. ישר a חותך את המעגל שמרכזו P בשתי נקודות A ו- B .
הוכיחו כי $\angle PAB < 90^\circ$ היא זווית חדה.
(רמז: חברו את הנקודות A ו- B עם P .)

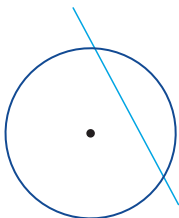


ב. A, B, C הן שלוש נקודות על המעגל.
הוכיחו כי שלוש הנקודות אינן יכולות להיות על ישר אחד. (היעזרו בסעיף א.)

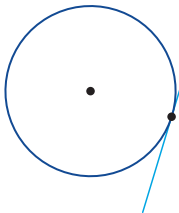
ג. **מסקנה:** למעגל ולישר יש לכל היותר שתי נקודות משותפות.
הסבירו.



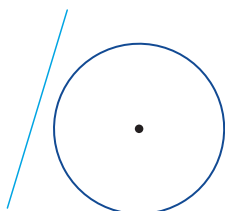
ישר שיש לו **שתי נקודות משותפות** עם המעגל נקרא **ישר החותך את המעגל**.



ישר שיש לו **נקודה משותפת יחידה** עם המעגל נקרא **משיק למעגל**.



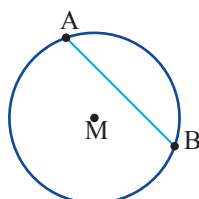
ישר **שאינו** לו **נקודות משותפות** עם המעגל נקרא **ישר חיצוני למעגל**.



מיתר ורדיוס למיתר

4. רדיוס מאונך למיתר:

- חוצה את המיתר,
 - חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר,
 - חוצה את הקשת המתאימה למיתר.
- א. העתיקו את השרטוט והשלימו אותו.
ב. קשמו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו.



5. הוכיחו: אם רדיוס **חוצה מיתר** במעגל, אז הרדיוס מאונך למיתר.

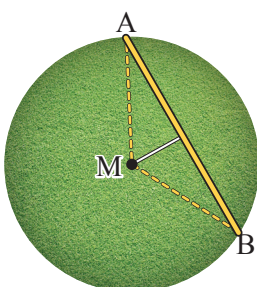


6. נחזור לשאלה בפתיחת השיעור.

קוטר הכיכר 200 מטר.

כיצד יחשב המתכנן את אורך צלע המשולש שווה הצלעות שקודקודיו על הכיכר? נשרטט על תכנית הכיכר צלע של המשולש, אנך מהמרכז לצלע, ורדיוסים לקצות הצלע.

(מצאו תחילה את גודל הזווית המרכזית, אחר כך את אורך האנך, ולבסוף את אורך המיתר).





כיכר היא חלל עירוני ציבורי פתוח המשמש למטרות ציבוריות שונות: למפגש, לבילוי, לפעולות ספורט ותרבות, ואף לפעילות פוליטית (כגון הפגנות). במקרים רבים כיכר היא בצורת מעגל.

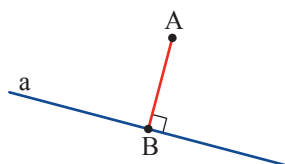


כיכרות משמשות גם כמעגלי תנועה והם בטוחים יותר מצמתים. אולם, כאשר נוצר עומס במעגל התנועה, הוא מתפשט ויוצר עומס גם בכבישים המסתעפים ממנו.

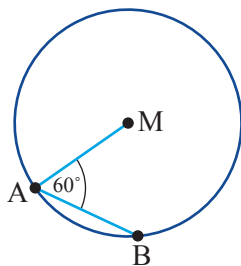
שימו לב! במדינות כמו ישראל, בהן התנועה מתנהלת בצד ימין, התנועה בכיכרות מתנהלת נגד כיוון השעון.



תזכורת



מרחק של נקודה מישר הוא אורך האנך מהנקודה אל הישר.



7. נתון: המיתר AB יוצר זווית של 60° עם הרדיוס. אורך הרדיוס 5 ס"מ.

א. מה אורך המיתר AB?

ב. שרטטו את **מרחק** המיתר מהמרכז וחשבו אותו.

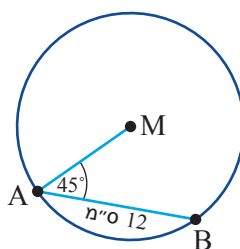


רדיוס המאונך למיתר:

- חוצה את המיתר,
- חוצה את הזווית המתאימה למיתר,
- חוצה את הקשת המתאימה לו.

אם הרדיוס **חוצה מיתר**,
אז הרדיוס **מאונך למיתר**.

אוסף משימות

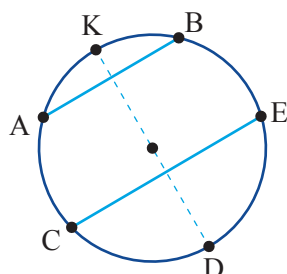


1. במעגל שמרכזו M נתון: $AB = 12$ ס"מ ו- $\angle MAB = 45^\circ$.
א. שרטטו את מרחק המיתר AB ממרכז המעגל וחשבו אותו.
ב. חשבו את אורך הרדיוס במעגל.



2. במעגל, אורך הרדיוס 6 ס"מ.

- שרטטו מיתר AB היוצר זווית בת 45° עם רדיוס המעגל.
- חשבו את אורך המיתר ואת מרחקו מהמרכז.



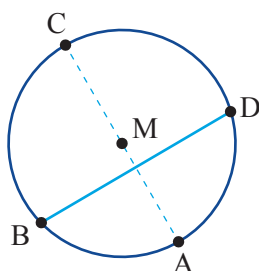
3. הקוטר DK חוצה את המיתרים AB ו-CE.

- חשבו את הנתונים.
- הוכיחו כי המיתרים מקבילים.



4. המיתר BD מאונך לקוטר AC.

- הוכיחו כי $BC = DC$.
- נתון גם שהקשת $\widehat{BA}$ היא בת 50° . מצאו את גודל הקשתות $\widehat{CD}$ ו- $\widehat{BD}$, במעלות.

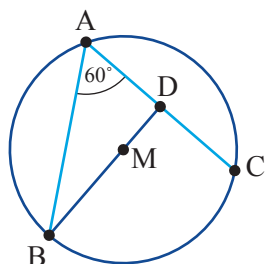


5. הוכיחו כי רדיוס החוצה זווית מרכזית במעגל, מאונך למיתר המתאים לזווית, וחוצה אותו.



6. גודל הזווית בין שני המיתרים AB ו-AC במעגל, שווה ל- 60° .

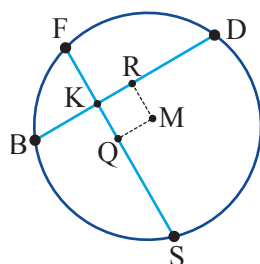
- המשך הרדיוס מ-B מאונך למיתר AC.
- הוכיחו כי המיתרים AB ו-AC שווים זה לזה.



7. במעגל שמרכזו M, המיתרים BD ו-FS הם מיתרים שווים ומאונכים.

מרחקי המיתרים מהמרכז הם MR ו-MQ.

- הוכיחו כי MRKQ ריבוע.
- אורך כל מיתר 20 ס"מ. אורך רדיוס המעגל 13 ס"מ. חשבו את היקף הריבוע MRKQ.



8. שרטטו מעגל ובו קוטר AB.

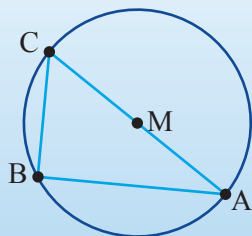
- הקוטר AB חוצה את המיתרים CD ו-EK. (שרטטו את המיתרים).
- הוכיחו כי המרובע שיוצרים קצות המיתרים הוא טרפז שווה שוקיים או מלבן.



שיעור 4. מרחק מיתרים ממרכז המעגל

משפט: אם המיתר AC הוא קוטר במעגל M, ו-B נקודה על המעגל, אז $\angle CBA \sphericalangle$ היא זווית ישרה.

אפשר להוכיח את המשפט בדרכים שונות. בשיעור נוכיח את המשפט בשתי דרכים שונות, הוכחה אחת מבוססת על משפט שהוכחתם בשיעור הקודם, והוכחה השנייה מבוססת על שוויון זוויות. הוכחה שלישית לאותו משפט תכירו ביחידה הבאה.

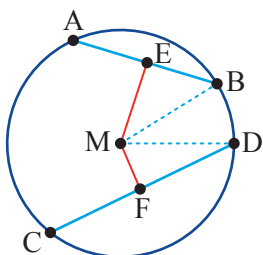


נעסוק גם בקשר בין מיתרים למרחקם מהמרכז.



1. א. העתיקו את השרטוט משאלת הפתיחה, ושרטטו את המרחק של AB ממרכז המעגל (קו עזר).
היעזרו בקו העזר והוכיחו את המשפט.
ב. העתיקו שוב את השרטוט ושרטטו את הרדיוס MB, (קו עזר).
היעזרו בקו העזר והוכיחו שוב את המשפט.

מיתרים שווים ומרחקם מהמרכז

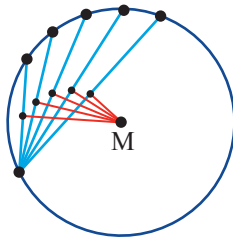


2. א. הוכיחו כי מיתרים שווים במעגל, נמצאים במרחק שווה מהמרכז.
(תזכורת: משולשים ישרי זווית השווים בניצב וביתר חופפים).
ב. נסחו משפט הפוך למשפט שהוכחתם בסעיף א, והוכיחו גם אותו.

מיתרים שונים ומרחקם מהמרכז

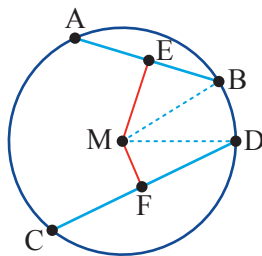


3. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו בנייה הנקראת "מיתרים ומרחקם מהמרכז". בפעילות זו חוקרים את הקשר בין אורך מיתר למרחקו מהמרכז.
בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.

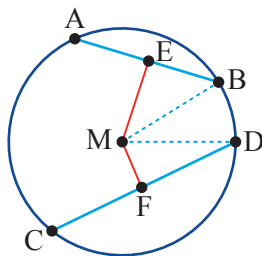


4. בשרטוט מיתרים ומרחקיהם מהמרכז.

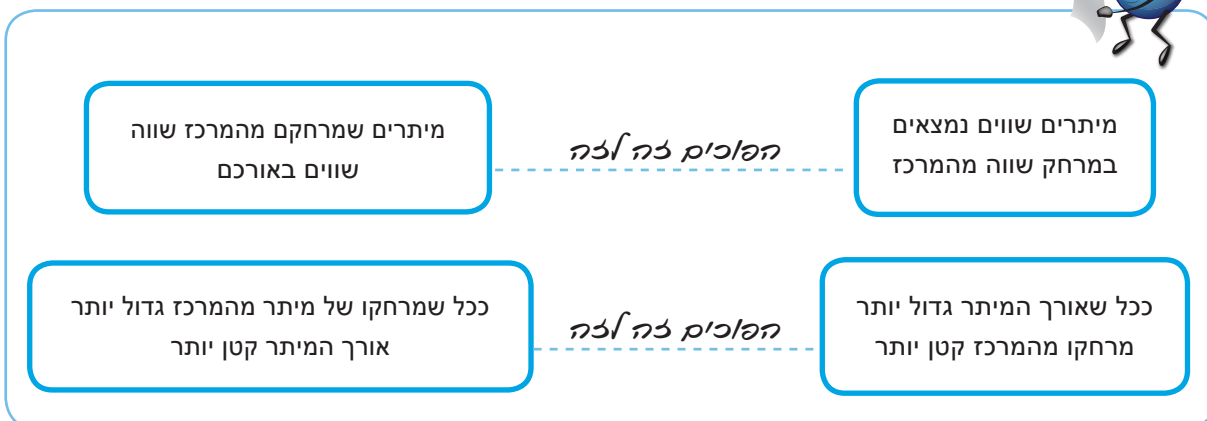
- השלימו את הטענה: "ככל שאורך מיתר גדול יותר, מרחקו מהמרכז....."
- נסחו משפט הפוך למשפט שבסעיף א.
- מיהו המיתר הארוך ביותר במעגל, ומה מרחקו מהמרכז?



5. במעגל שמרכזו M ואורך הרדיוס שלו 10 ס"מ, שרטטו מיתרים AB ו-CD. $AB = 12$ ס"מ, $CD = 16$ ס"מ. חשבו את המרחקים של כל אחד מהמיתרים מהמרכז. האם התוצאות מתאימות למשפט שניסחתם במשימה הקודמת?

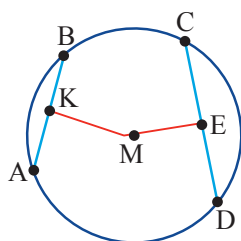


6. במעגל שמרכזו M והרדיוס שלו באורך r ס"מ, שרטטו שני מיתרים AB ו-CD. מרחקיהם מהמרכז ME ו-MF. $AE = a$ ס"מ, $CF = b$ ס"מ. א. בטאו את המרחקים של כל אחד מהמיתרים מהמרכז באמצעות r, a ו-b. ב. היעזרו בביטויים שרשמתם בסעיף א, והסבירו מדוע ככל שאורך המיתר גדול יותר מרחקו מהמרכז קטן יותר. ג. נסחו את המשפט ההפוך למשפט בסעיף ב. ד. הסבירו בעזרת הביטויים שרשמתם בסעיף א, גם את המשפט ההפוך.





אוסף משימות



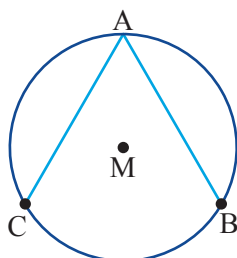
1. CD מיתר שאורכו 8 ס"מ ומרחקו מהמרכז 3 ס"מ.
מרחק המיתר AB מהמרכז 4 ס"מ.
חשבו את אורכו.
(רמז: חשבו תחילה את רדיוס המעגל.)



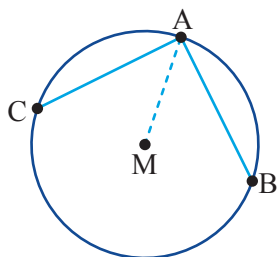
2. ST ו-ER הם שני מיתרים במעגל.
 $ST = 20$ ס"מ ומרחקו מהמרכז 8 ס"מ.
מרחק המיתר ER מהמרכז 12 ס"מ.
שרטטו אורך המיתר ER וחשבו את אורכו.



3. משולש ABC הוא משולש שקודקדיו על מעגל וצלעותיו נמצאות במרחקים שווים מהמרכז.
א. שרטטו והוכיחו כי המשולש שווה צלעות.
ב. היקף המשולש 24 ס"מ, ומרחק כל צלע מהמרכז 3 ס"מ. חשבו את רדיוס המעגל.



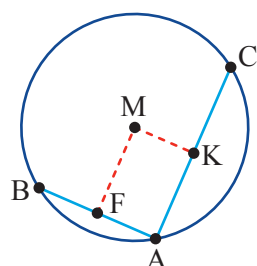
4. המיתרים AB ו-AC הם מיתרים שווים במעגל שמרכזו M.
העתיקו ושרטטו אנכים מהמרכז אל המיתרים.
מהו סוג המרובע שנוצר? הוכיחו.



5. המיתרים AB ו-AC הם מיתרים מאונכים במעגל שמרכזו M.
הרדיוס MA חוצה את הזווית A.
שרטטו והוכיחו כי המיתרים שווים.
(רמז: שרטטו את מרחקי המיתרים מהמרכז.)



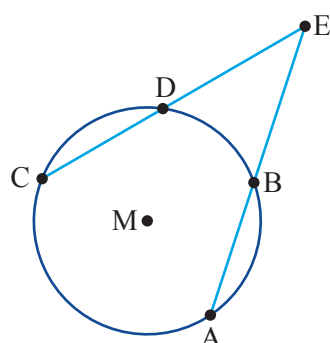
6. שני מיתרים נחתכים בנקודה A בתוך מעגל שמרכזו M.
הקטע MA חוצה את הזווית שבין המיתרים.
שרטטו, והוכיחו כי המיתרים שווים.



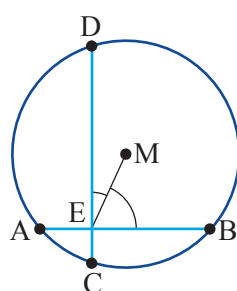
7. המיתרים AB ו-AC מאונכים זה לזה.
מרחקי המיתרים מהמרכז הם MK ו-MF.
א. הוכיחו MFAK מלבן.
ב. נתון כי אורך רדיוס המעגל 17 ס"מ, אורך המיתר AC הוא 30 ס"מ.
מצאו את אורך המיתר AB.



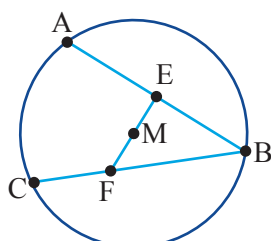
8. נתון מעגל שאורך רדיוסו 41 ס"מ.
סמנו נקודה A על המעגל ושרטטו שני מיתרים AB ו-AC המאונכים זה לזה.
אורך אחד המיתרים 80 ס"מ.
מצאו את אורך המיתר השני.



9. המיתרים AB ו-CD הם מיתרים שווים במעגל.
המיתרים נפגשים מחוץ למעגל בנקודה E.
הוכיחו: $AE = CE$

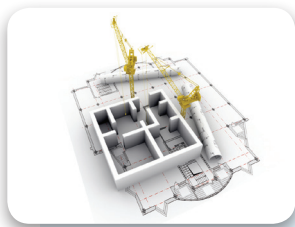


10. במעגל שמרכזו M משורטטים שני מיתרים מאונכים, הנחתכים בנקודה E.
נתון גם: $\angle DEM < \angle BEM$
הוכיחו: $AB < CD$



11. AB ו-BC הם מיתרים במעגל שמרכזו M.
הנקודה E היא אמצע המיתר AB.
נתון גם: $ME = MF$
אורכו של איזה משני המיתרים גדול מהשני? הוכיחו.





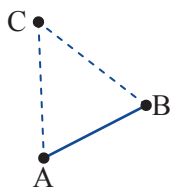
שיעור 5. כמה נקודות קובעות מעגל?

עירייה רוצה להקים צֶהָרֹן כך שהבניין יימצא במרחקים שווים משלושה גני ילדים. **יותם** אמר: צריך לסמן במפה את מקום שלושת הגנים ולחפש היכן יהיה מרכז של מעגל שקודקודיו הגנים המסומנים. הצהרון צריך להיות במרכז הזה. הסבירו את טענתו.



נחקור אם אפשר לשרטט מעגל כזה, ואם כן, כיצד.

1. א. הוכיחו כי אם נקודה נמצאת על אנך העובר דרך אמצע קטע, אז היא נמצאת במרחק שווה מקצות הקטע.
 ב. נסחו משפט הפוך לזה שבסעיף א, וְרְשְׁמוּ מה נתון ומה צריך להוכיח.
 ג. כדי להוכיח את המשפט שניסחתם בסעיף ב, שרטטו קטע מ- C לאמצע AB, והוכיחו.



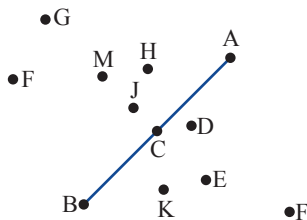
מעגל דרך שתי נקודות



2. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב" תמצאו בנייה הנקראת "מעגל דרך שתי נקודות". בפעילות תבדקו כמה מעגלים אפשר להעביר דרך שתי נקודות. בצעו בהתאם להוראות.



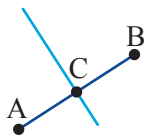
3. א. בשרטוט קטע AB ונקודות נוספות. בדקו וציינו אלו מהנקודות המסומנות יכולות להיות מרכז של מעגל העובר דרך A ו- B.



- ב. היכן נמצאות כל הנקודות היכולות להיות מרכז של מעגל העובר דרך A ו- B?
- ג. סמנו במחברתכם שתי נקודות, שרטטו קטע המחבר אותן, ומעגל העובר דרך שתי הנקודות. שרטטו עוד שני מעגלים העוברים דרך שתי נקודות אלה.



4. הסבירו את המסקנה: כל הנקודות על אנך באמצע הקטע AB, הן מרכזים של מעגלים העוברים דרך A ו- B.



הגדרה: אנך דרך אמצע קטע נקרא **אנך אמצעי** לקטע.
משפט: מרכזי מעגלים העוברים דרך שתי הנקודות A ו-B נמצאים על האנך האמצעי לקטע AB, ולהיפך.

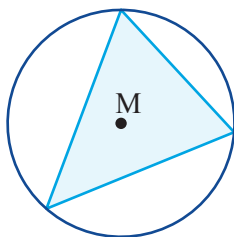
מעגל דרך שלוש נקודות



4. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו בנייה הנקראת "האם קיים מעגל העובר דרך 3 נקודות?". בפעילות זו תבדקו אם אפשר לשרטט מעגל העובר דרך שלוש נקודות. בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.

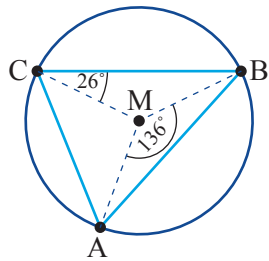


5. א. סמנו שלוש נקודות: A, B, ו-C.
 שרטטו אנך אמצעי לקטע AB ואנך אמצעי לקטע AC.
 היכן ימצא מרכז של מעגל העובר דרך שלוש הנקודות? הסבירו.
 האם אפשר להעביר מעגל שני דרך אותן שלוש נקודות? הסבירו.
- B
 • C
 • A



משפט: דרך שלוש נקודות שאינן על ישר אחד אפשר לשרטט מעגל אחד ויחיד.
הגדרה: מעגל העובר דרך שלושת הקודקודים של משולש נקרא **מעגל החוסם** את המשולש.

6. נחזור לשאלת הצהרון מתחילת השיעור.
 העתיקו את מפת הגנים ושרטטו מעגל דרך 3 הנקודות.
 סמנו את מקום הצהרון.
- גן א
 גן ב
 גן ג



7. M מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. חשבו את זוויות המשולש, לפי הנתונים הרשומים בשרטוט.



אוסף משימות

באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות מחשב", תמצאו משימות חלופיות לחלק מהמשימות באוסף זה. משימות אלה מסומנות ב-*. תחת משימות אלה רשום שם משימת התחליף שבאתר.



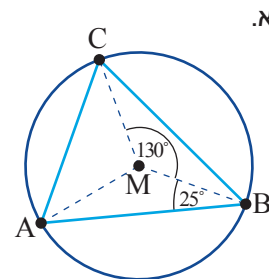
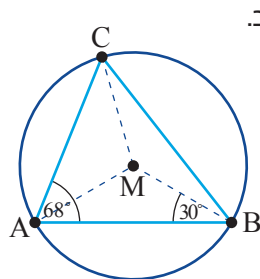
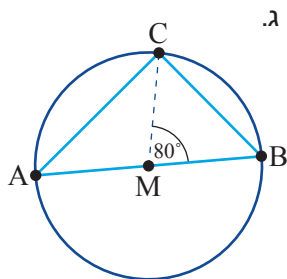
1*. שרטטו שלושה מעגלים.

במעגל אחד שרטטו משולש חד זוויות שהמעגל חוסם אותו.
במעגל שני שרטטו משולש ישר זווית שהמעגל חוסם אותו.
במעגל שלישי שרטטו משולש קהה זווית שהמעגל חוסם אותו.
היכן נמצא מרכז המעגל החוסם בכל אחד מהמשולשים ששרטטתם?

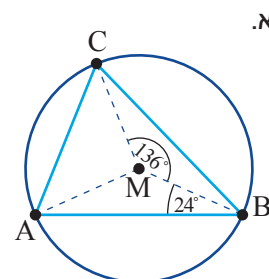
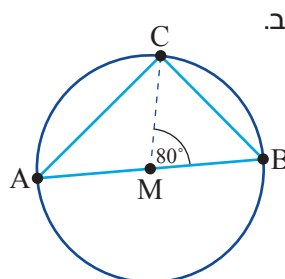
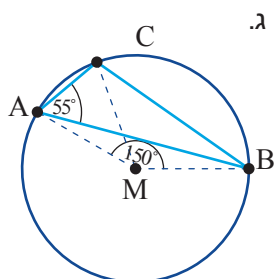
שם המשימה החלופית באתר: "מעגל חוסם משולש".

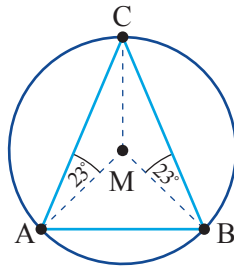


2. בכל סעיף, M מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. חשבו את זוויות משולש ABC לפי הנתונים שבשרטוטים. (חפשו בשרטוטים משולשים שווים שוקיים).

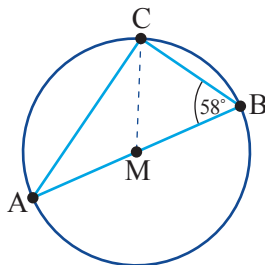


3. בכל סעיף, M מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC. חשבו את זוויות משולש ABC.

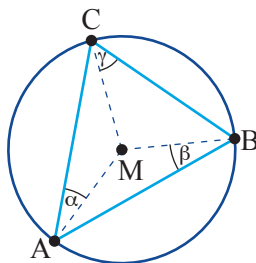




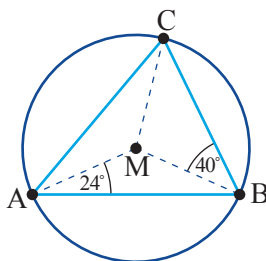
4. M מרכז המעגל החוסם את משולש ABC.
- א. חשבו את זוויות המשולשים AMC, CMB, ו-AMB.
- ב. הוכיחו כי משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.



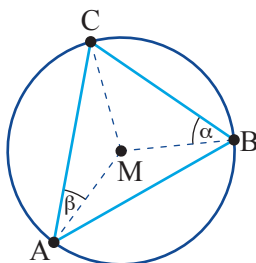
5. המעגל שמרכזו M חוסם את משולש ABC.
- א. חשבו את זוויות המשולשים CMB ו-AMC.
- ב. הוכיחו כי משולש ABC הוא משולש ישר זווית.



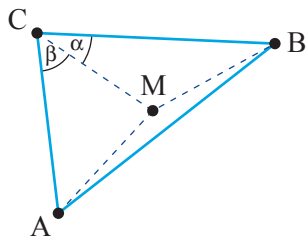
6. מעגל שמרכזו M חוסם את משולש ABC.
- מהו סכום הזוויות: $\gamma + \beta + \alpha$? הסבירו.



7. א. מעגל שמרכזו M חוסם את משולש ABC.
- חשבו זוויות לפי הנתונים בשרטוט, והראו כי $\angle AMB = 2 \angle ACB$



- ב. מעגל שמרכזו M חוסם את משולש ABC.
- בטאו זוויות באמצעות α ו- β , והראו כי $\angle AMB = 2 \angle ACB$



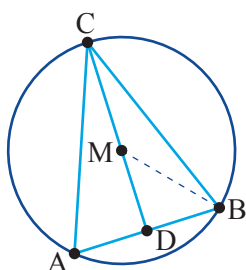
8. הנקודה M היא מרכז המעגל החוסם את משולש ABC.

א. סמנו ב- x את זווית $\angle MBA$ /
בטאו את x באמצעות α ו- β .

ב. היכן נמצא מרכז המעגל אם $\angle ACB$ ישרה? הוכיחו.

ג. היכן נמצא מרכז המעגל אם כל זוויות המשולש $\triangle ACB$ חדות? הוכיחו.

ד. היכן נמצא מרכז המעגל אם $\angle ACB$ קהה? הוכיחו.



9. מעגל שמרכזו M חוסם את משולש ABC.

נתון: $AB = 10$ ס"מ $AC = BC = 13$ ס"מ
חשבו את אורכו של רדיוס המעגל.



10. א. האם אפשר לחסום כל מלבן במעגל? אם כן, הוכיחו, אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

שימו לב! כדי להוכיח שאפשר לחסום מצולע במעגל יש להראות שקיימת נקודה הנמצאת במרחק שווה מהקודקודים, או שכל האנכים האמצעיים לצלעות נפגשים בנקודה אחת.

ב. האם אפשר לחסום כל מקבילית במעגל? אם כן, הוכיחו, אם לא, הביאו דוגמה נגדית.
(רמז: שרטטו אנכים אמצעיים לשתי צלעות נגדיות של המקבילית).



11. הציעו בנייה באמצעותה אפשר למצוא מרכז של מעגל נתון. הסבירו.



12. א. הוכיחו כי כל מחומש משוכלל אפשר לחסום במעגל.

ב. הוכיחו כי כל משושה משוכלל אפשר לחסום במעגל.

ג. הוכיחו כי כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.



13. הנקודה M היא אמצע היתר במשולש ישר זווית.

הוכיחו כי M היא מרכז המעגל החוסם את המשולש.



שומרים על כושר

חזקות

1. בטאו כחזקה.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & 2^{12} \cdot 2^2 & \text{ג.} & 7^{12} \cdot 7^5 \cdot 7^3 \\ \text{ב.} & 3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^2 & \text{ד.} & a^7 \cdot a \\ \text{ה.} & 8^n \cdot 8^3 \cdot 8^4 & \text{ו.} & 12^n \cdot 12^k \end{array}$$

2. חשבו או כתבו ביטויים שווי ערך בעזרת חוקי חזקות. **נזכר:** $\frac{3^5}{3^7} = 3^{5-7} = 3^{-2}$ או $\frac{1}{3^2}$

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{2^{-3}}{2^4} & \text{ד.} & \frac{7^{30}}{7^2} \\ \text{ב.} & a \neq 0, \frac{a^{-3}}{a^2} & \text{ה.} & \frac{7^2}{7^{30}} \\ \text{ג.} & a \neq 0, \frac{a^{-5}}{a^{-2}} & \text{ו.} & \frac{7^{30}}{7^{30}} \\ \text{ז.} & x \neq 0, \frac{x^7}{x^6} & \text{ח.} & b \neq 0, \frac{b^7}{b^{10}} \\ \text{ט.} & b \neq 0, \frac{b}{b^{10}} \end{array}$$

3. חשבו בעזרת חוקי החזקות.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{4^{-5} \cdot 4^{-5}}{4^{-3} \cdot 4^3} & \text{ג.} & \frac{2^5 \cdot 2^2 \cdot 3}{3^2 \cdot 2^7} \\ \text{ב.} & \frac{10^3 \cdot 10^{-4}}{10^2} & \text{ד.} & \frac{2^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot 6}{6^{-3} \cdot 7^{-2}} \\ \text{ה.} & b \neq 0, x \neq 0, \frac{12x^4 \cdot b \cdot b^3 \cdot x}{2x^5 \cdot 6b^2} & \text{ו.} & x \neq 0, y \neq 0, \frac{9x \cdot x^2 \cdot y^3}{3y^2 \cdot x^3 \cdot y} \end{array}$$

4. פשטו.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \frac{(3a^2)^3 \cdot b}{(3a)^4 \cdot b^3} & \text{ב.} & \left(\frac{3b^3}{5b}\right)^4 \\ \text{ג.} & a \neq 0, b \neq 0, \left(\frac{a}{b^2}\right) \cdot \left(\frac{b^3}{a}\right)^2 \end{array}$$

5. הראו כי השוויונות הבאים נכונים. היעזרו בפירוק לגורמים ובחוקי חזקות.

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & 2^{100} = 4^{50} \\ \text{ב.} & 12^5 = 2^{10} \cdot 3^5 \end{array}$$

6. נוגה ועופר רכשו מבנה למפעל.

מחיר המבנה ביום המכירה הוא 4.8×10^7 שקלים.

התשלום מבוצע בשלושה תשלומים שווים באופן הבא:

התשלום הראשון: מיד - ללא ריבית,

התשלום השני, לאחר חודשיים, בתוספת ריבית של 30%,

התשלום השלישי, לאחר 4 חודשים, בתוספת ריבית של 70%.

קבעו מהו הסכום שישלמו נוגה ועופר בכל אחד מהתשלומים?