

יחידה 20: הסתברות

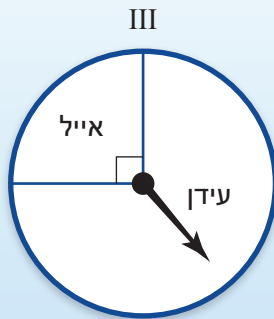
שיעור 1. נזכרים בחישובי הסתברויות



אייל ועידן משחקים בשעונים.

כל אחד בתורו מסובב מחוג של אחד השעונים לפי בחירתו.

מנצח מי שהמחוג עוצר בשטח שעליו רשום שמו.



באיזה שעון כדאי לכל אחד מהמשתתפים לבחור?

כל ילד מסובב את השעון שבחר 120 פעמים.

שערו כמה פעמים בערך, צפוי שהמחוג יעצור על כל שם בכל שעון.

ניזכר איך לחשב הסתברויות כדי לשער תוצאות צפויות.

1. א. איזה שעון הוגן?

ב. **אייל ועידן** רוצים לסובב פעם אחת את המחוג בשעון (I).

האם נוכל לדעת מראש מי יזכה? הסבירו.



ההסתברות עוסקת בחיזוי של סיכויי תוצאות.

אי אפשר לחזות מראש תוצאה של ניסוי יחיד.

אם מבצעים מספר רב של ניסויים, אפשר לחזות תוצאות בסבירות גבוהה (אך עדיין לא בוודאות).

• שכיחות יחסית היא החלק שמהווה שכיחותה של תוצאה מסוימת מתוך מספר כל הניסויים.

$$\text{השכיחות של התוצאה} = \frac{\text{השכיחות היחסית}}{\text{מספר הניסויים בסה"כ}}$$

• **ההסתברות של מאורע** הוא המספר אליו מתקרבת **השכיחות היחסית** כשמספר הניסויים גדל.

דוגמה: במשימה 1, אם נסובב את המחוג של שעון (I) 120 פעמים סביר להניח כי המחוג יעצור על השם עידן בערך ב- $\frac{1}{3}$ מהמקרים, כלומר **בערך** כ- 40 פעמים.

2. שני אחים ערכו תצפית על תנועת כלי הרכב ליד ביתם, בין השעות 8:00-9:00 בבוקר.

הדיאגרמה הבאה מציגה את תוצאות התצפית ביום הראשון.

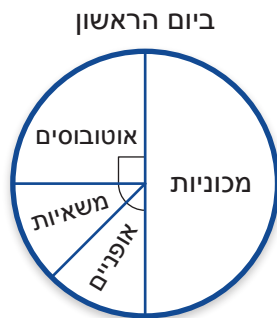
בתצפית ביום השני, ספר אחד האחים 18 אוטובוסים.

בהסתמך על הדיאגרמה של היום הראשון, כמה כלי רכב מכל סוג סביר

להניח שעברו ליד ביתם בין השעות 8:00-9:00 בבוקר?

העתיקו למחברת והשלימו את המספרים בטבלה:

ביום השני



סוג כלי הרכב	מספר כלי הרכב
מכוניות	
אוטובוסים	18
משאיות	
אופניים	

מההסתברות לנתונים

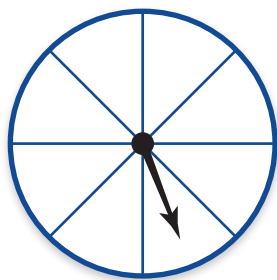
3. לפניכם שעון המחולק ל-8 גזרות שוות.

כל גזרה הייתה צבועה באחד הצבעים: כחול, אדום או ירוק.

במסגרת ניסוי, סובבו את המחוג 1000 פעמים.

רשמו את צבע הגזרה עליה עצר המחוג בכל פעם,

וריכוז את הנתונים בטבלה.



צבע	מספר הפעמים
כחול	121
אדום	630
ירוק	249

קבעו איך, סביר להניח, שצבועות הגזרות של השעון? הסבירו כיצד קבעתם.

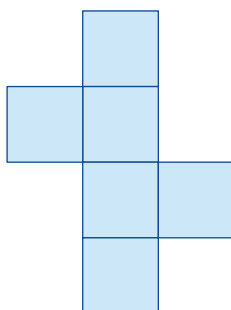
4. קובייה שעל פאותיה רשומים המספרים 1, 2, 3, הוטלה 600 פעמים.

התוצאה 3 התקבלה 206 פעמים, התוצאה 1 התקבלה 107 פעמים.

על כמה פאות, סביר להניח, שמופיע המספר 1?

על כמה פאות, סביר להניח, שמופיע המספר 2?

ועל כמה פאות, סביר להניח, שמופיע המספר 3? הסבירו.

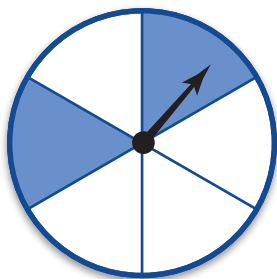


כדי למצוא כמה פעמים מופיע נתון מסוים, מוצאים את השכיחות היחסית של הנתון.

במשימה 4, התוצאה 3 התקבלה 206 פעמים מתוך 600. לכן, השכיחות היחסית היא $\frac{206}{600} \approx \frac{2}{6}$

מכאן הסקנו כי, המספר 3 מופיע על 2 מתוך 6 פאות הקובייה.

5. מסובבים מחוג בשעון שצבוע בארבעה צבעים: צהוב, אדום, כחול או ירוק. ההסתברות לעצור על צהוב שווה להסתברות לעצור על ירוק. ההסתברות לעצור על כחול גדולה פי 2 מההסתברות לעצור על ירוק. ההסתברות לעצור על אדום היא $\frac{1}{3}$. מצאו את ההסתברות לעצור על כל צבע.

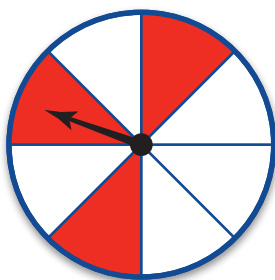


6. לפניכם שעון המחולק ל-6 גזרות שוות. מסובבים את המחוג של השעון.
- מה ההסתברות שהמחוג יעצור על החלק הכחול?
 - מסובבים את המחוג 120 פעמים. האם ייתכן כי:
 - המחוג יעצור 120 פעמים על החלק הכחול?
 - לא יעצור אף פעם על החלק הכחול?
 - כמה פעמים בערך, סביר להניח שהמחוג יעצור על החלק הכחול?

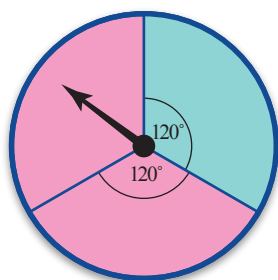
בתחילת דרכה, תורת ההסתברות (probability) התפתחה בעיקר מתוך רצון להבין עקרונות הקשורים במשחקי מזל, ולא דווקא מתוך ניסיון לפתור בעיות סטטיסטיות. במאה ה-17, המתמטיקאים בלאז פסקל (Blaise Pascal) ופייר דה פרמה (Pierre de Fermat) פיתחו תאוריה של סבירות שבה הם מגדירים באופן מדויק את כל התוצאות האפשריות של ניסוי, ומייחסים הסתברות מסוימת לכל תוצאה. כיום, עקרונות ההסתברות מהווים בסיס לתחומי מדע רבים ומגוונים - כמו למשל: פיזיקה (מכניקה סטטיסטית, תרמודינמיקה, תורת הקוונטים), כלכלה (ניהול כספים, ניהול סיכונים), ורפואה (קביעת סיכונים, אבחונים). מצאו באינטרנט דוגמה לשימוש בהסתברות באחד התחומים המדעיים.



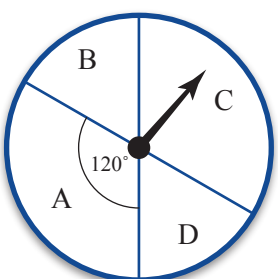
אוסף משימות



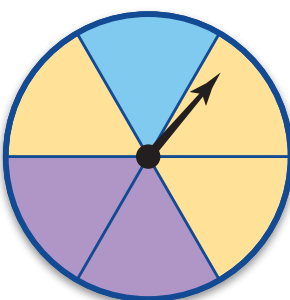
1. לפניכם שעון המחולק ל-8 גזרות שוות. מסובבים את המחוג של השעון.
- מה ההסתברות שהוא יעצור על החלק האדום?
 - מסובבים את המחוג 160 פעמים. כמה פעמים בערך, נצפה שהמחוג יעצור על החלק האדום?



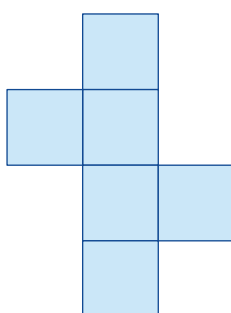
2. מסובבים את המחוג של השעון בשרטוט.
- מהי ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח הוורוד?
 - טלי מסובבת את המחוג 180 פעמים. כמה פעמים, בערך, נצפה שהמחוג יעצור בשטח התכלת?
 - אם המחוג עוצר בשטח התכלת, מקבלים 10 נקודות. אם המחוג עוצר בשטח הוורוד, מורידים 3 נקודות. כמה נקודות, בערך, אתם מצפים שטלי תצבור אם היא תסובב את המחוג 90 פעמים?



3. מסובבים את המחוג של השעון בשרטוט.
- מה ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח A?
 - מה ההסתברות שהמחוג יעצור בשטח B או C?
 - מה ההסתברות שהמחוג **לא** יעצור בשטח D?
 - מסובבים את המחוג 90 פעמים. כמה פעמים, בערך, אתם מצפים שהמחוג יעצור בשטחים A או C?



4. לפניכם שעון המחולק ל-6 גזרות שוות.
- סובבו את המחוג מספר פעמים.
- גלי** ספרה שהמחוג עצר על הצבע הצהוב 66 פעמים.
- כמה פעמים, בערך, עצר המחוג בשטח התכלת?
 - כמה פעמים, בערך, עצר המחוג בשטח הסגול?



5. על קוביית משחק מופיעים רק שני מספרים 1 ו-2.
- הטילו את הקובייה 100 פעמים.
- המספר 1 התקבל 63 פעמים, והמספר 2 התקבל 37 פעמים.
- על כמה מפאות הקובייה, סביר להניח כי, רשום המספר 1?
- ועל כמה פאות המספר 2?



6. חלקו שעון לגזרות וצבעו כך שהסתברות לקבל צהוב היא $\frac{2}{5}$, אדום $\frac{1}{10}$, ירוק $\frac{1}{5}$ וכחול $\frac{3}{10}$.



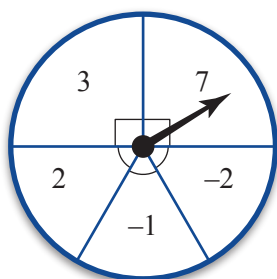
7. מסובבים את המחוג של השעון בשרטוט 300 פעמים.

בכל שטח בו עוצר המחוג מקבלים את מספר הנקודות הרשום בשטח זה. **שאלה:** אם המחוג עוצר בשטח עליו רשום המספר 7, מקבלים 7 נקודות.

א. חשבו את ההסתברות לקבל כל אחד מהמספרים בשעון.

ב. כמה פעמים בערך צפוי שיופיע כל מספר, אם מסובבים את המחוג 300 פעמים?

ג. חשבו כמה נקודות אתם מצפים לצבור.

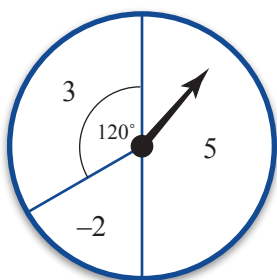


8. מסובבים את המחוג של השעון בשרטוט.

בכל שטח בו עוצר המחוג מקבלים את מספר הנקודות הרשום בשטח זה.

עומר סובב את המחוג וצבר 209 נקודות.

כמה פעמים בערך, סובב עומר את המחוג?



שיעור 2. מן הטבלה אל ההסתברות



ליאור וענת משחקות במשחק "זוג או פרט".
כל אחת מהן מראה בבת אחת מספר אצבעות ביד ימין.

ליאור מנצחת אם סכום האצבעות ששתיהן מראות הוא מספר זוגי.
ענת מנצחת אם סכום האצבעות הוא מספר אי-זוגי.
האם המשחק נראה לכם הוגן? אם לא, במקום מי הייתם בוחרים לשחק?

נלמד לחשב הסתברויות של מאורעות דו שלביים.

ליאור \ ענת	1	2	3	4	5
1					
2				6	
3		5			
4					
5					

- התלמידים בכיתה התקשו לקבוע אם המשחק הוגן, ולכן **גלי** הציעה לרשום בטבלה את כל התוצאות עבור סכום האצבעות.
 - העתיקו את הטבלה למחברת ורשמו בטבלה את כל התוצאות האפשריות לקבלת סכום אצבעות.
 - מהי ההסתברות לניצחון של ליאור? לניצחון של ענת? הסבירו כיצד מצאתם.
 - גלי** אמרה: בטבלה 25 תוצאות. ברור שהמשחק אינו הוגן. למה התכוונה גלי?



משחק הוגן מהו?
משחק הוגן הוא משחק בו לאף אחד מהמשתתפים אין יתרון על מתחרהו, ולכל המשתתפים יש סיכוי שווה לנצח.



+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3				7		
4						
5						
6					11	

- עומרי ואייל** מטילים שתי קוביות משחק רגילות, ומחברים את המספרים שהן מראות.

עומרי ינצח אם הסכום זוגי. אייל ינצח אם הסכום אי-זוגי.

 - האם המשחק הוגן? אם כן, נמקו. אם לא, למי סיכוי טוב יותר לנצח?
 - לאיזה סכום הסתברות גבוהה יותר: לסכום 5 או לסכום 8?
 - העתיקו את הטבלה והשלימו בה את התוצאות. האם המשחק הוגן? הסבירו.

+	1	3	5	2	4	6
1	2	4	6	3	5	7
3	4	6	8	5	7	9
5	6	8	10	7	9	11
2	3	5	7	4	6	8
4	5	7	9	6	8	10
6	7	9	11	8	10	12

ד. **עומר** הציע לסדר את המספרים שבטבלה בדרך אחרת (ראו טבלה חדשה).
מהו, לדעתכם, היתרון בהצעה של עומר? הסבירו.



במאורעות דו-שלביים, כאשר מדובר בזוגות של תוצאות וכשמספר הזוגות גדול, נוח ויעיל לייצג את התוצאות בטבלה.
בטבלה אפשר גם לכתוב את התוצאות הנדרשות בצורה מרוכזת, ולסמן משבצות המתאימות למאורעות המבוקשים.

+	1	3	5	2	4	6
1	זוגי			אי זוגי		
3						
5						
2	אי זוגי			זוגי		
4						
6						

דוגמה: במשימה 2 סעיף ד, הן הסכומים הזוגיים והן הסכומים האי-זוגיים מופיעים במרוכז בשני ריבועים בקצוות מנוגדים של הטבלה.
בצורה זו נוח וקל יותר לספור את מספר הסכומים לפי זוגיות ולחשב את ההסתברויות המתאימות.



3. מטילים שתי קוביות משחק רגילות, האחת לבנה והאחרת שחורה. מחסרים מהמספר שעל הקובייה השחורה את המספר שעל הקובייה הלבנה.

(i) הכינו טבלה מתאימה לרישום כל התוצאות האפשריות.

(ii) חשבו את ההסתברות של המאורעות הבאים, וציינו אם המאורע הוא אפשרי, בלתי אפשרי או וודאי.

- | | |
|--------------------|------------------------|
| א. לקבל מספר חיובי | ה. לקבל הפרש שווה ל- 0 |
| ב. לקבל מספר שלילי | ו. לקבל הפרש קטן מ- 4 |
| ג. לקבל הפרש 7 | ז. לקבל הפרש גדול מ- 2 |
| ד. לקבל הפרש 5 | ח. לקבל הפרש קטן מ- 10 |

(iii) חשבו דוגמה לשני מאורעות בעלות אותה ההסתברות.



תזכורת

מאורע ודאי הוא מאורע שחייב לקרות (למשל, קבלת מספר חיובי בהטלת קובייה רגילה).
מאורע בלתי אפשרי הוא מאורע שלא יכול לקרות (למשל, קבלת המספר 8 בהטלת קובייה רגילה).
מאורע אפשרי הוא מאורע שייתכן שיקרה (למשל, קבלת מספר גדול מ-2 בהטלת קובייה רגילה).



אוסף משימות



1. מטילים שתי קוביות משחק רגילות ורושמים את מכפלת המספרים המתקבלים על שתייהן.

×	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

(i) העתיקו את הטבלה והשלימו בה את התוצאות.

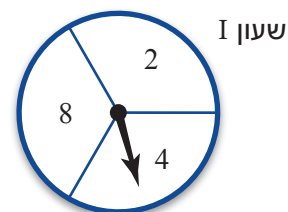
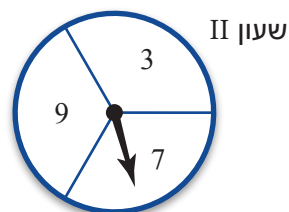
(ii) מצאו את ההסתברות של המאורעות הבאים.

- א. המכפלה שווה ל-6 ד. המכפלה מספר זוגי
 ב. המכפלה שווה ל-12 ה. המכפלה מספר אי-זוגי
 ג. המכפלה גדולה מ-36 ו. המכפלה מספר חיובי



2. כל שעון בשרטוט מחולק ל-3 גזרות שוות.

מסובבים את המחוגים של שני השעונים, ומחשבים את סכום המספרים המתקבלים.



+	3	7	9
2			
4			
8			

א. העתיקו את הטבלה, והשלימו בה את התוצאות.

- ב. מהי ההסתברות לקבל את הסכום 25?
 ג. מהי ההסתברות לקבל את הסכום 11?
 ד. מהי ההסתברות לקבל סכום זוגי?
 ה. מהי ההסתברות לקבל סכום אי-זוגי?
 ו. מהי ההסתברות לקבל סכום קטן מ-10?



3. מטילים שתי קוביות משחק רגילות ורושמים את המספר הגדול מבין השניים.

אם מתקבל אותו מספר על שתייהן, רושמים מספר זה.

(i) הכינו טבלה המתאימה, ורשמו את כל התוצאות האפשריות.

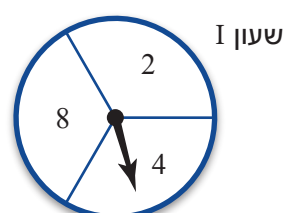
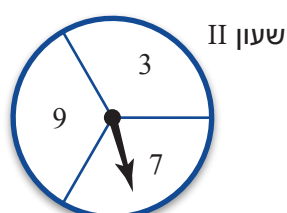
(ii) מצאו את ההסתברות של המאורעות הבאים.

- א. קבלת 6 ג. קבלת מספר זוגי ה. קבלת מספר גדול מ-3
ב. קבלת 1 ד. קבלת מספר אי-זוגי ו. קבלת מספר קטן מ-5



4. כל אחד מהשעונים המשוורטים מחולק ל-3 גזרות שוות.

מסובבים את המחוגים בשני השעונים, ומחשבים את הסכום ואת המכפלה של המספרים שהם מראים.



$\times$	3	7	9
2			
4			
8			

+	3	7	9
2			
4			
8			

(i) העתיקו את הטבלאות והשלימו בהן את התוצאות האפשריות.

(ii) חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

- א. סכום המספרים זוגי ד. סכום המספרים 7
ב. סכום המספרים אי-זוגי ה. מכפלת המספרים 7
ג. מכפלת המספרים זוגית ו. מכפלת המספרים מתחלקת ב-3



5. מסובבים פעמיים את המחוג בשעון המשוורטט וכופלים את שני המספרים שבתחומם המחוג נעצר (השעון מחולק לשלוש גזרות שוות).

(i) העתיקו את הטבלה ורשמו בה את התוצאות.

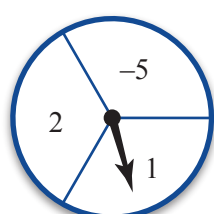
כמה תוצאות חיוביות וכמה תוצאות שליליות אפשריות?

(ii) חשבו את ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

- א. קבלת מכפלה חיובית ג. קבלת מכפלה קטנה מ-20
ב. קבלת מכפלה שלילית ד. קבלת מכפלה בין (-30) ל-30

(iii) נועה סידרה את הלוח כך:

על אילו סעיפים קל יותר לענות בעזרת הלוח של נועה? הסבירו.

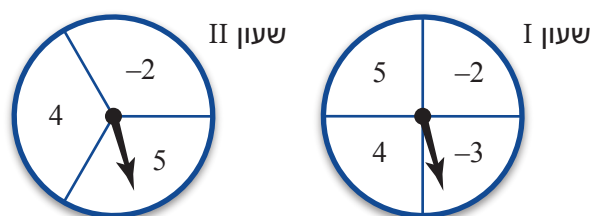


x	2	-5	1
2			
-5			
1			

x	1	2	-5
1			
2			
-5			



6. מסובבים את המחוגים של שני השעונים המשורטטים.

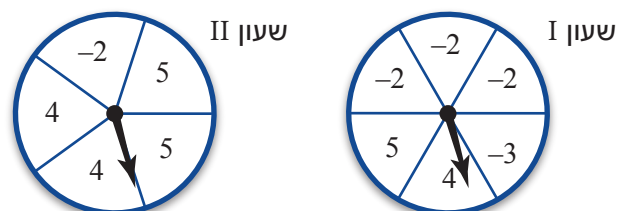


יעל מנצחת אם מכפלת שני המספרים המתקבלים היא חיובית.
ורד מנצחת אם המכפלה שלילית.

- האם המשחק נראה לכם הוגן?
- הכינו טבלה המתאימה לרישום כל התוצאות האפשריות והשלימו.
- חשבו את ההסתברות של יעל לנצח, ואת ההסתברות של ורד לנצח.
האם המשחק הוגן? הסבירו.



7. מסובבים את המחוגים של שני השעונים המשורטטים (כל שעון מחולק לחלקים שווים).



שרה מנצחת אם מכפלת שני המספרים המתקבלים היא חיובית.
ניצה מנצחת אם המכפלה שלילית.

- חשבו את ההסתברות של שרה לנצח, ואת ההסתברות של ניצה לנצח.
- האם המשחק הוגן?

שעון I

	חיובי	שלילי
שעון II	חיובי	
	חיובי	
	חיובי	
	חיובי	
	שלילי	

- מירי** חישה את ההסתברות בעזרת הטבלה:
האם תוכל מירי, בעזרת החלוקה בטבלה שלה,
לחשב את ההסתברות לנצחון של כל אחת מהן?
אם לא, נמקו. אם כן, הסבירו איך.

שיעור 3. ייעול טבלת ההסתברות



לעומר ואודי שתי קוביות משחק מיוחדות. הם מטילים את הקוביות. על הפאות של קובייה א רשומים 3 מספרים חיוביים ו-3 מספרים שליליים. על הפאות של קובייה ב רשומים 2 מספרים חיוביים ו-4 מספרים שליליים. עומר מנצח אם מכפלת המספרים המתקבלים היא חיובית. אודי מנצח אם מכפלת המספרים המתקבלים היא שלילית. האם המשחק הוגן? הציעו כיצד להכין טבלת תוצאות, מבלי לציין במפורש את המספרים, כך שנוכל לקבוע במקום מ', כדאי לשחק.

נלמד כיצד לייעל את טבלת ההסתברות.

1. א. בנו טבלה מתאימה עבור התוצאות, וקבעו מה ההסתברות של כל אחד לנצח.

ב. אייל אמר: אפשר לבנות טבלה ולצבוע בה שטחים בהם המכפלה חיובית,

כך אפשר בקלות לקבוע אם המשחק הוגן.

מחלקים את הלוח ל"חיובי" ו"שלילי"

לפי קובייה א.

העתיקו את הטבלה למחברת והשלימו "חיובי", "שלילי"

לקובייה ב.

צבעו את כל המשבצות בהם תתקבל תוצאה חיובית.

מה ההסתברות לקבל תוצאה חיובית?

ג. למי סיכוי גדול יותר לנצח? הסבירו כיצד קבעתם.

קובייה ב

קובייה א	חיובי						
	שלילי						



אפשר לחשב הסתברויות גם במקרים בהם לא רשמים את התוצאות האפשריות במפורש, אלא רק מייצגים כל סוג של תוצאה לפי מספר הפעמים שהיא מופיעה.

טבלה כזו נקראת גם **דיאגרמת שטח**.

קובייה ב

קובייה א	חיובי						
	שלילי						

3/2 מה: חילקנו את הדיאגרמה לאזורים בהם מופיעות תוצאות

חיוביות ולאזורים בהם מופיעות תוצאות שליליות, וצבענו

את השטחים בהם תוצאות חיוביות.

2. **טלי ורווית** מסובבות את שני המחוגים של שני השעונים המשוורטים (כל שעון מחולק לגזרות שוות).



טלי מנצחת אם מכפלת שני המספרים שמורים המחוגים היא חיובית.
רווית מנצחת אם המכפלה שלילית.

א. האם המשחק הוגן?

ב. העתיקו את דיאגרמת השטח למחברת

וצבעו את השטחים המתאימים לניצחון של טלי.

ג. חשבו את ההסתברות של כל אחת מהן לנצח.

שעון I

×	חיובי	שלילי
חיובי		
שלילי		

שעון II

3. **עופרה ואיילת** יורות חץ למטרה.

ההסתברות שעופרה תפגע במטרה היא $\frac{3}{10}$, ההסתברות שאיילת תפגע במטרה היא $\frac{4}{10}$

א. מה ההסתברות שעופרה **לא** תפגע במטרה?

מה ההסתברות שאיילת **לא** תפגע במטרה?

ב. חילקנו את הריבוע (10×10 משבצות) בקו אופקי

ל"פגעה" ו"החטיאה" עבור עופרה.

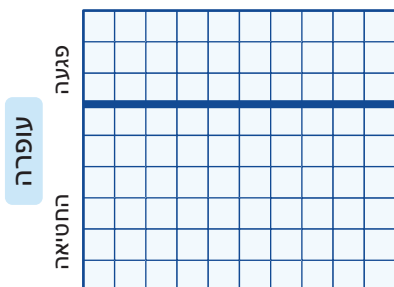
העתיקו את דיאגרמת השטח למחברת וחלקו חלוקה נוספת את

הריבוע בקו אנכי ל"פגעה" ו"החטיאה" עבור איילת.

ג. מה ההסתברות ששתיהן גם יחד תפגענה במטרה?

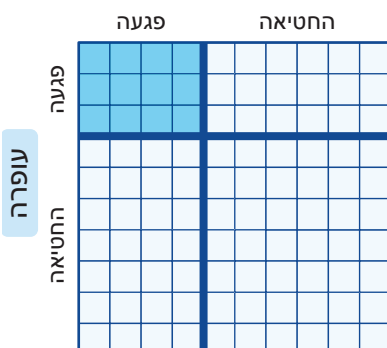
ד. מה ההסתברות שעופרה תפגע, ואיילת לא תפגע במטרה?

איילת



בדיאגרמת השטח מחלקים אופקית ואנכית את הריבוע בהתאם להסתברויות הנתונות.
בריבוע משובץ אפשר לחשב הסתברות של מאורע על-ידי ספירת המשבצות המתאימות למאורע, וחישוב החלק שמספר זה מהווה מתוך כל המשבצות,
או לחשב את שטחי המלבנים המתאימים למאורע.

איילת



מל/3: במשימה 3, כדי לחשב את ההסתברות ששתיהן תפגענה

במטרה צובעים את השטח המתאים למאורע.

צבענו 12 משבצות מתוך 100

כלומר ההסתברות היא: $\frac{12}{100}$

או

מחשבים את שטח של המלבן המתאים: $\frac{3}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{12}{100}$

4. בסל 8 כדורים: 3 אדומים ו- 5 ירוקים.

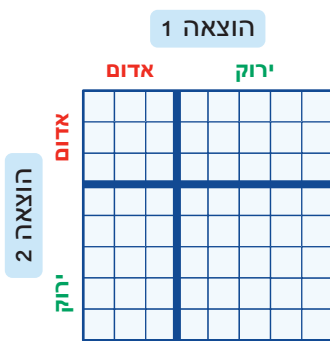
מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את צבעו.
מחזירים את הכדור לסל. מוציאים שוב כדור ורושמים את צבעו.
היעזרו בדיאגרמה ורשמו את ההסתברות להוציא:

א. שני כדורים ירוקים.

ב. שני כדורים אדומים.

ג. שני כדורים בצבעים שונים.

ד. מה סכום ההסתברויות שקיבלתם בסעיפים א-ג? הסבירו.



אוסף משימות



1. אייל וטמיר התאמנו בזריקת כדור לסל.

אייל הצליח לקלוע לסל ב- $\frac{2}{10}$ מהמקרים,

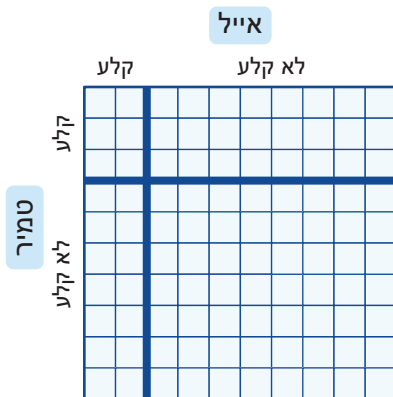
וטמיר הצליח לקלוע לסל ב- $\frac{3}{10}$ מהמקרים.

חשבו את ההסתברויות של המאורעות הבאים:

א. שניהם הצליחו לקלוע לסל.

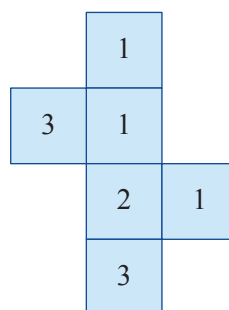
ב. שניהם לא הצליחו לקלוע לסל.

ג. אייל הצליח לקלוע לסל וטמיר לא.

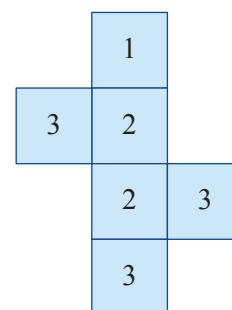


2. לפניכם פריסה של שתי קוביות.

מטילים את שתי הקוביות.



קובייה ב



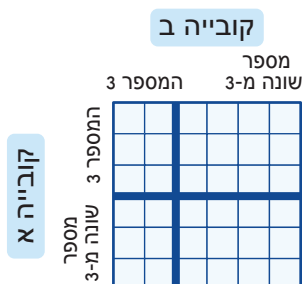
קובייה א

הדיאגרמה מחולקת לפי ההסתברות של כל קובייה שהיא תראה או לא תראה את המספר 3.

א. מהי ההסתברות ששתי הקוביות יראו 3? הסבירו איך מצאתם.

ב. קבעו לאיזה מאורע הסתברות גדולה יותר. הסבירו.

שתי הקוביות יראו 3 או שתי הקוביות יראו מספר שונה מ- 3?





3. מטילים שתי קוביות.

קובייה א היא קובייה רגילה ו**קובייה ב** מופיע פעמיים המספר 3.

א. שרטטו דיאגרמה.

- חלקו את השטח לפי ההסתברות של קובייה א "לקבל 3" או "לא לקבל 3", ולפי ההסתברות של קובייה ב "לקבל 3" או "לא לקבל 3" בהטלת הקובייה.
- ב. מה ההסתברות שעל שתי הקוביות יופיע 3 בו זמנית?
- ג. מה ההסתברות לקבל 3 רק על קובייה אחת (כלומר, לקבל 3 רק על קובייה א ולא על קובייה ב וההיפך)?



4. בסל 7 כדורים: 2 אדומים ו- 5 כחולים.

מוציאים מתוך הסל כדור אחד ורושמים את צבעו.

מחזירים את הכדור לסל. מוציאים שוב כדור ורושמים את צבעו.

שרטטו דיאגרמת שטח מתאימה, כולל קווי חלוקה. וחשבו את ההסתברות להוציא:

- א. שני כדורים כחולים. ב. שני כדורים אדומים. ג. שני כדורים בצבעים שונים.



5. במסיבת סיום ערכו שתי הגרלות.

בתחילת המסיבה נערכה הגרלה בה זכה אחד מכל 10 משתתפים במסיבה.

בסיום המסיבה נערכה הגרלה בה זכו 20% מכל המשתתפים במסיבה.

(כל אחד השתתף בשתי הגרלות, גם הזוכים בהגרלה הראשונה).

(i) שרטטו דיאגרמת שטח מתאימה, כולל קווי חלוקה ל"זוכים" ו- "לא זוכים" בכל הגרלה.

(ii) בוחרים באקראי משתתף במסיבה. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. לזכות בשתי הגרלות. ב. לא לזכות כלל. ג. לזכות בהגרלה הראשונה ולא בשנייה.



6. בחנות תכשיטים שני מנגנוני אזעקה נגד פריצות.

ידוע כי מנגנון אזעקה אחד פועל ב- 98% ממקרי הפריצה, והשני פועל ב- 97% מהמקרים.

מה ההסתברות שגנב יצליח לפרוץ לחנות מבלי שתשמע אזעקה,

בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. אם בעל החנות יפעיל רק את מנגנון האזעקה הראשון.

ב. אם בעל החנות יפעיל רק את מנגנון האזעקה השני.

ג. אם בעל החנות יפעיל את שני המנגנונים.

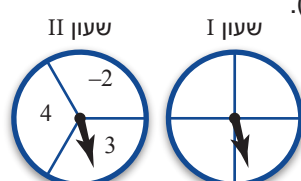


7. **יעל וורד** מסובבות את המחוגים של שני שעונים (כל שעון מחולק לחלקים שווים).

יעל מנצחת אם מכפלת המספרים חיובית.

ורד מנצחת אם מכפלת המספרים שלילית.

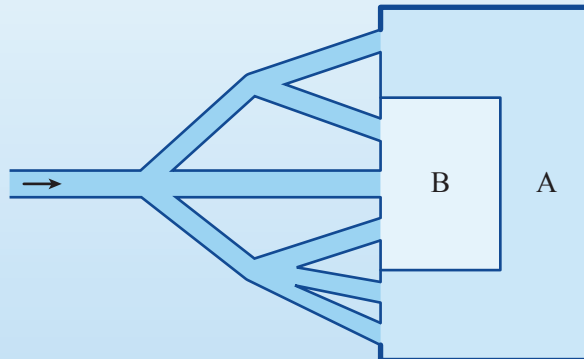
השלימו מספרים על שעון I, כך ש: א. יעל תנצח ב. ורד תנצח





שיעור 4. דיאגרמת עץ

לפני שנים רבות חי מלך ולו בת יפיפיה.
המלך הועיד את בתו לנסיך הממלכה השכנה, אך בת המלך אהבה עלם ממשוטי העם.
המלך החליט להשאיר לגורל ולחוכמתה של בתו את ההחלטה וקבע:
מתחת לארמון ישנו מבוכ כמשורטט. הנסיכה תחליט אם לעמוד באולם A או באולם B.
באולם השני יעמוד נמר. העלם, אהובה של הנסיכה יעבור במבוכ.
אם יגיע אל הנסיכה, ייכנע המלך לרצון בתו. אם יגיע לנמר הטורף.....

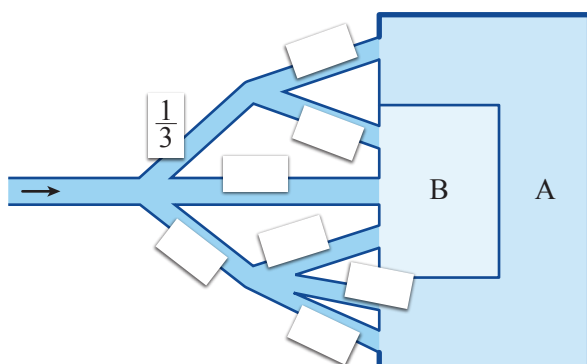


בכל צומת, בחירת שביל ההמשך נעשית באקראי.
היכן כדאי לנסיכה לעמוד? הסבירו.

נכיר את דיאגרמת העץ לחישוב הסתברויות

1. א. שרטטו במחברת את הדיאגרמת של המבוכ והוסיפו ליד כל שביל את ההסתברות שהעלם המגיע לצומת יבחר באותו שביל.
בצומת הראשון, יש פיצול לשלושה שבילים.

לכן ההסתברות שהעלם יבחר בשביל השמאלי היא $\frac{1}{3}$

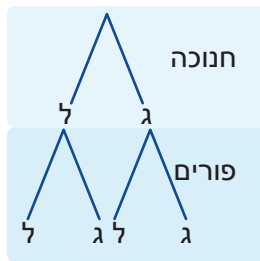


- ב. חשבו את ההסתברות שהעלם יגיע לאולם A דרך המסלול השמאלי.
- ג. חשבו את ההסתברות שהעלם יגיע לאולם A דרך המסלול הימני או זה שלידו.
- ד. מה ההסתברות שהעלם יגיע לאולם A?
- ה. חשבו את ההסתברות שהעלם יגיע לאולם B.
- ו. היכן כדאי לנסיכה לעמוד?



במשימה 1 הכרנו דיאגרמה נוספת לחישוב ההסתברויות. דיאגרמה זו נקראת **דיאגרמת עץ**.

2. ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2, וההסתברות לגשם בערב פורים היא 0.4



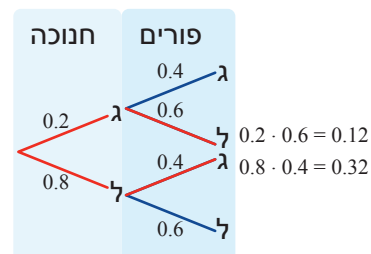
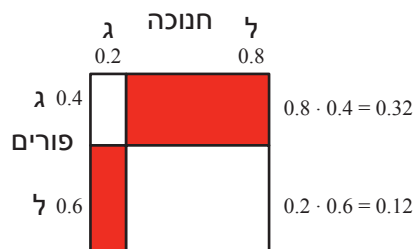
- שרטטו דיאגרמת שטח וחלקו אותה לפי הנתונים.
- העתיקו את דיאגרמת העץ למחברת וכתבו על ענפי העץ את ההסתברויות המתאימות. (ג - גשם, ל - לא גשם)
- צבעו את השטח המתאים, ואת המסלול המתאים, להסתברות שבאותה שנה ירד גשם בשני החגים.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
- צבעו בצבע אחר את השטח המתאים, ואת המסלול המתאים, להסתברות שבאותה שנה ירד גשם בערב חנוכה ולא בערב פורים.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
- צבעו את השטח המתאים, ואת המסלול המתאים, להסתברות שבאותה שנה ירד גשם רק בחג אחד.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.



בדיאגרמת עץ, אם מתקדמים באותו מסלול כופלים את ההסתברויות הרשומות על כל ענף במסלול. אם יש יותר ממסלול אחד המתאים למאורע מסוים, מחברים את ההסתברויות של כל המסלולים המתאימים למאורע.

בדיאגרמת שטח מחשבים את השטח של אותו חלק. אם יש יותר משטח אחד, מחברים את השטחים. **מל/3**: במשימה 2 סעיף ה, ההסתברות שבאותה שנה ירד גשם רק בחג אחד היא: ההסתברות שירד גשם בחנוכה ולא בפורים, או ההסתברות שירד גשם בפורים ולא בחנוכה.

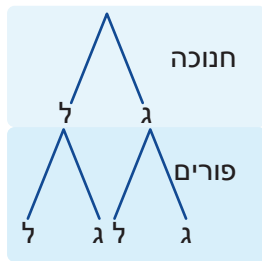
בדיאגרמת עץ נסמן את המסלולים המתאימים, **בדיאגרמת השטח** נצבע ונחשב את השטחים נחשב את ההסתברות של כל מסלול. המתאימים.



המאורע כולל שתי אפשרויות. לכן, ההסתברות שירד גשם בחג אחד היא

$$0.12 + 0.32 = 0.44$$





3. ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2, ההסתברות לגשם בערב פורים היא 0.4, וההסתברות לגשם בערב פסח היא 0.1

א. בשרטוט שני השלבים הראשונים בבניית דיאגרמת העץ. כתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.

ב. בשלב שלישי נפצל כל ענף לשתי אפשרויות "גשם" או "לא גשם" בפסח. שרטטו, וכתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.

ג. חשבו את ההסתברות שבאותה שנה ירד גשם בחנוכה, בפורים ובפסח.

ד. חשבו את ההסתברות שבאותה שנה ירד גשם רק באחד מהחגים חנוכה, פורים או פסח.

(ההסתברות שירד גשם רק באחד החגים היא: ההסתברות שירד גשם בחנוכה ולא ירד גשם בפורים ובפסח או ההסתברות שירד גשם בפורים ולא ירד גשם בחנוכה ובפסח, או ההסתברות שירד גשם בפסח ולא ירד גשם בחנוכה ובפורים. צבעו את שלושת המסלולים המתאימים).

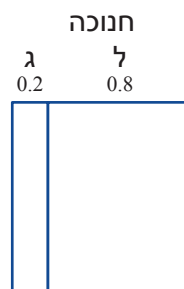


דיאגרמת השטח מתאימה למאורעות בעלי שני שלבים, ואילו דיאגרמת העץ מתאימה גם למאורעות עם יותר שלבים.

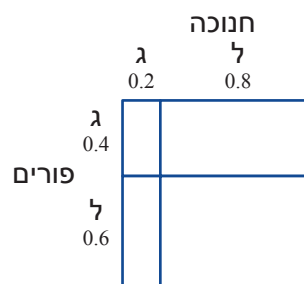
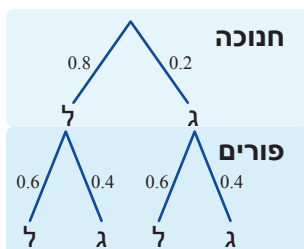
דיאגרמת עץ



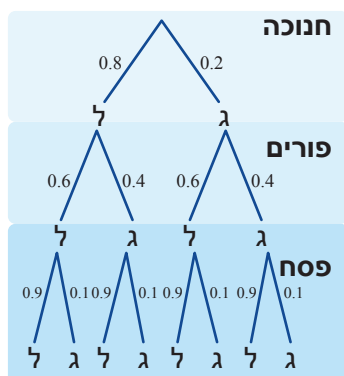
דיאגרמת שטח



שלב א - חנוכה



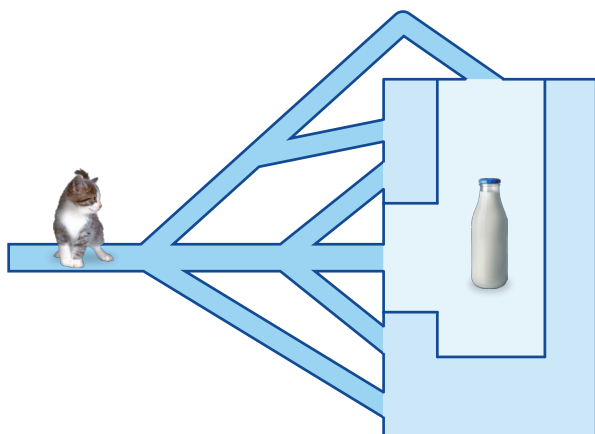
שלב ב - פורים



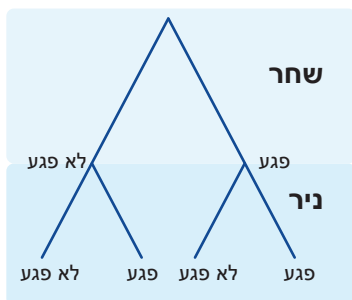
שלב ג - פסח



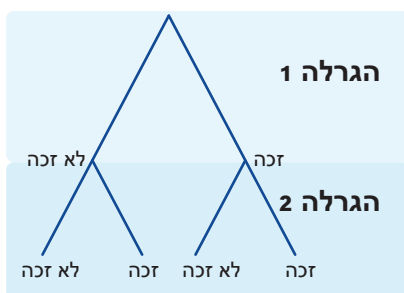
אוסף משימות



1. חתול עומד בתחילת השביל.
מה ההסתברות שהחתול יגיע אל כד החלב?
(מניחים כי ההסתברות לבחור כל אחד מהשבילים שווה).



2. **שחר וניר** יורים חץ למטרה.
ההסתברות ששחר יפגע במטרה היא 0.4
ההסתברות שניר יפגע במטרה היא 0.3
א. העתיקו את דיאגרמת העץ למחברת וכתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.
ב. צבעו את המסלול המתאים להסתברות ששניהם יפגעו במטרה.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
ג. צבעו את המסלול המתאים להסתברות ששניהם **לא** יפגעו במטרה.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.



3. במחנה קיץ ערכו שתי הגרלות.
הגרלה אחת נערכה ביום הראשון של המחנה, בה זכו $\frac{1}{5}$ מהמשתתפים.
הגרלה שנייה נערכה ביום האחרון של המחנה, בה זכו 25% מהמשתתפים.
כל אחד השתתף בשתי ההגרלות.
א. העתיקו למחברת וכתבו על כל ענף, בדיאגרמת העץ, את ההסתברות המתאימה.
ב. צבעו את המסלול המתאים להסתברות שמשתתף **לא יזכה** באף אחת משתי ההגרלות.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
ג. צבעו בצבע אחר את המסלול המתאים להסתברות שמשתתף **יזכה בשתי** ההגרלות.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
ד. צבעו בצבע אחר את המסלולים המתאימים להסתברות שמשתתף **יזכה** בהגרלה **אחת**.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
ה. חשבו את סכום ההסתברויות של סעיפים ב-ד. מה קיבלתם? הסבירו.



4. 80% מהתלמידים בכיתה ט כותבים ביד ימין, ו-30% מהתלמידים מרכיבים משקפיים. תלמיד נבחר באקראי.

מה ההסתברות שהוא כותב ביד שמאל ומרכיב משקפיים?
(היעזרו בדיאגרמת עץ או בדיאגרמת שטח מתאימות.)

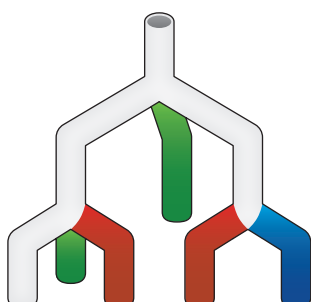


5. ההסתברות לפגוש אדם שגובהו מעל 180 ס"מ בעיר "טול סיטי" היא 0.4
ההסתברות לפגוש אדם שמן בעיר "טול סיטי" היא 0.2

- שרטטו דיאגרמת עץ, ורשמו הסתברויות מתאימות על הענפים.
- צבעו את המסלול המתאים להסתברות לפגוש אדם שמן שגובהו פחות מ-180 ס"מ.
- חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
- צבעו את המסלול המתאים להסתברות לפגוש אדם לא שמן שגובהו יותר מ-180 ס"מ.
- חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
- מהו סכום המאורעות בסעיפים ב ו- ג? הסבירו.



6. כדור מזרק לפתח העליון ויכול להגיע למסלול האדום, הכחול, הירוק או הלבן. בכל צומת יש לכדור סיכוי זהה להיכנס לכל מסלול.



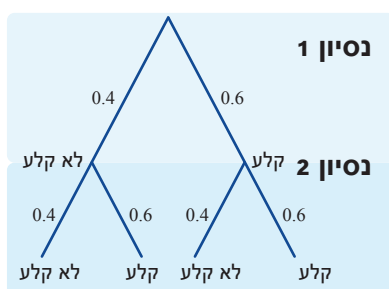
- חשבו את ההסתברויות הבאות:
- הכדור יגיע למסלול הכחול.
- הכדור יגיע למסלול הלבן.
- הכדור יגיע למסלול ירוק.



7. קלע יורה פעמיים למטרה.

בכל סעיף, מצאו מאורע מתאים (היעזרו בדיאגרמת העץ):

- הסתברות המאורע 0.16
- הסתברות המאורע 0.48

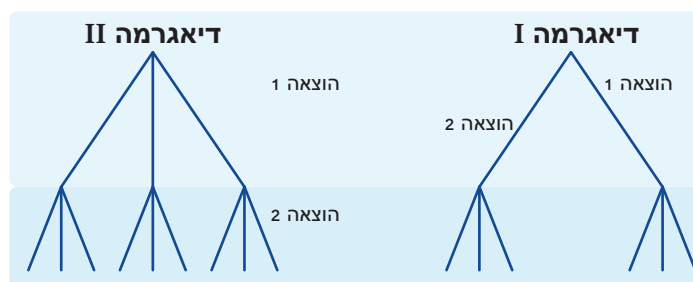




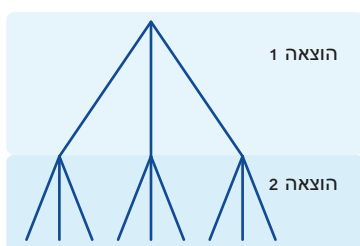
8. בכד 20 כדורים: 8 כחולים ו- 12 לבנים.
 עידן מוציא מתוך הכד כדור אחד ורושם את צבעו.
 הוא מחזיר את הכדור לכד. מוציא שוב כדור ורושם את צבעו.
 א. שרטטו דיאגרמת עץ או דיאגרמת שטח.
 ב. חשבו את ההסתברות להוציא:
 שני כדורים כחולים.
 שני כדורים לבנים.
 שני כדורים בצבעים שונים.



9. בכד 20 כדורים: 6 כחולים, 12 לבנים ו- 2 סגולים.
 עומר מוציא מתוך הכד כדור אחד ורושם את צבעו.
 הוא מחזיר את הכדור לכד. מוציא שוב כדור ורושם את צבעו.
 א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות להוצאת שני כדורים? הסבירו.



- ב. העתיקו למחברת את דיאגרמת העץ המתאימה והשלימו את ההסתברויות.
 ג. חשבו את ההסתברות להוציא:
 שני כדורים כחולים.
 שני כדורים לבנים.
 שני כדורים בצבעים שונים.



10. בכד 20 כדורים: 6 כחולים, 12 לבנים ו- 2 סגולים.
 אייל מוציא מתוך הכד כדור אחד ורושם את צבעו.
 הוא מחזיר את הכדור לכד. מוציא שוב כדור ורושם את צבעו.
 השלימו את דיאגרמת העץ, וחשבו את ההסתברות להוציא:
 א. שני כדורים באותו צבע.
 ב. לפחות כדור אחד סגול.
 ג. לכל היותר כדור אחד סגול.

שיעור 5. ענפים נוספים בעץ

טמיר יובל ואיתן יורים למטרה לפי התור. כל אחד מהם יורה פעם אחת בלבד.

ההסתברות ש**טמיר** יפגע במטרה היא $\frac{1}{2}$

ההסתברות ש**יובל** יפגע במטרה היא $\frac{1}{3}$

ההסתברות ש**איתן** יפגע במטרה היא $\frac{2}{5}$

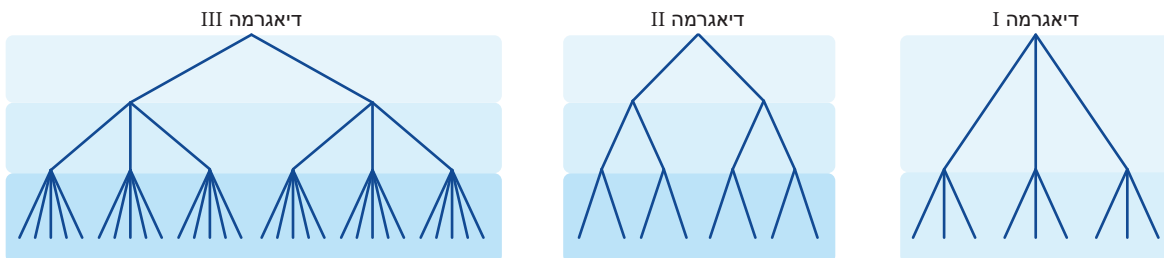


מה ההסתברות שלפחות אחד הקלעים יפגע במטרה?

נלמד להשתמש בדיאגרמת העץ למאורעות מורכבים.

דיאגרמת עץ עם שלושה שלבים

1. א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות של שלושת היורים? הסבירו. השלימו את ההסתברויות המתאימות על ענפי העץ בדיאגרמה שבחרתם.



- ב. מה ההסתברות ששלושת הקלעים יפגעו במטרה?
ג. מה ההסתברות שלפחות אחד הקלעים יפגע במטרה?

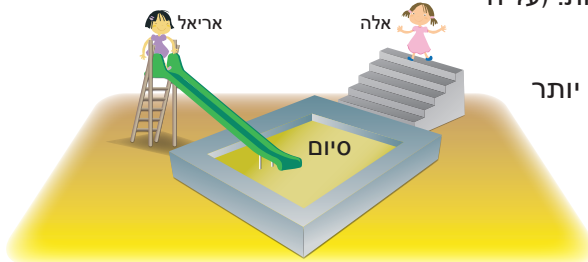
2. במבחן רב ברירה (אמריקאי) 3 שאלות לכל שאלה 4 תשובות אפשריות, ורק אחת מהן נכונה. יונתן אינו יודע דבר על הנושא הנלמד, ולכן החליט לבחור בתשובה הנכונה באופן אקראי. מה ההסתברות שיונתן יענה נכון על כל שלוש השאלות?



אפשר לחשב הסתברויות באמצעות דיאגרמת עץ.
דיאגרמת עץ נוחה במיוחד לשימוש אם מדובר במאורעות בעלות שלושה שלבים או יותר.
משפט: במשימה 2 כל שאלה במבחן היא שלב בעץ.
כל שלב מפצלים לשני ענפים:
"יבחר בתשובה הנכונה" או "יבחר בתשובה לא נכונה".



3. מטילים קובייה. אם מתקבל 6, **אריאל** יורדת במגלשה ומנצחת. אם מתקבל מספר שונה מ-6, **אֵלָה** יורדת מדרגה אחת. (עליה לרדת 5 מדרגות כדי לנצח).



א. האם המשחק הוגן? למי, לדעתכם, יש סיכוי גדול יותר לנצח?

ב. חשבו את ההסתברות של אריאל לנצח.

ג. חשבו את ההסתברות של אֵלָה לנצח.



ד. בדקו, כמה מדרגות צריכות להיות בדרכה של אֵלָה, כדי שהמשחק יהיה הוגן ככל האפשר.



אוסף משימות



1. התפלגות האוכלוסייה בארץ לארבע קבוצות דם היא:

40% – A 20% – B 5% – AB 35% – O

בחרים באקראי זוג נשוי.

בכל סעיף, מצאו את ההסתברות של המאורע הנתון (היעזרו בדיאגרמת השטח או בדיאגרמת עץ):

א. סוג הדם של שניהם O.

ב. סוג הדם של האישה A ושל הגבר B.

ג. סוג הדם של האחד A ושל השני B.

ד. לשניהם אותו סוג דם.



2. ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה חינם בחברת "שחקים" היא 0.1.

משפחת מזל קנתה שלושה כרטיסים.

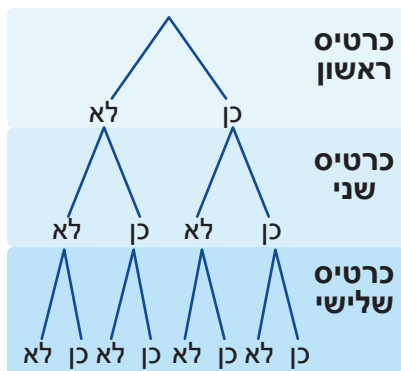
לפניכם דיאגרמת עץ המתאימה לסיפור.

א. רשמו על הענפים את ההסתברויות המתאימות לזכייה, או

לא זכייה בכרטיס טיסה.

ב. מה ההסתברות שמשפחת מזל **לא** תזכה כלל בכרטיס חינם?

ג. מה ההסתברות שמשפחת מזל תזכה בכרטיס חינם אחד?





3. הסיכוי שיוולד בן במשפחה שווה לסיכוי שתוולד בת.
מה ההסתברות שבמשפחה שבה שני ילדים, יהיו שתיים בנות?



4. הסיכוי שיוולד בן במשפחה שווה לסיכוי שתוולד בת.
מה ההסתברות שבמשפחה שבה שלושה ילדים, יהיו שתי בנות וכן (בכל סדר שהוא)?



קיימים מחקרים בנוגע לתפיסות מוטעות בהסתברות אצל ילדים. מיכל גולן ומירה ברקן חקרו את הנושא בקרב תלמידי כיתות ו-ח. בין יתר השאלות הן שאלו גם את השאלה הבאה:

מה הסיכויים להולדת בן או בת במשפחה, בה יש כבר שלושה בנים? הסבירו.

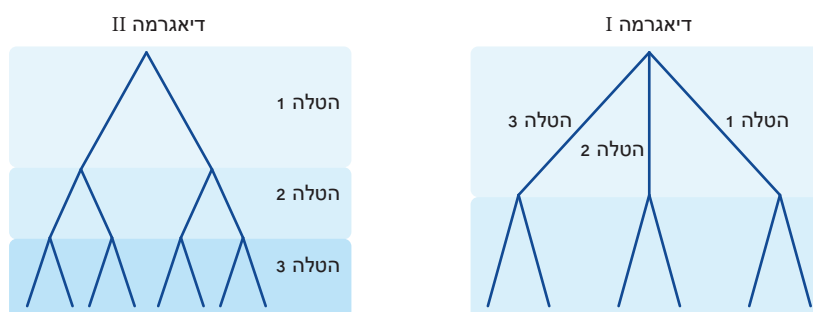
תחילה, נסו לענות בעצמכם על שאלה זו.

רוב התלמידים שענו תשובה נכונה (כמחצית ממספר התלמידים שנשאלו) השתמשו בגישה ההסתברותית. (גם במקרה זה, הסיכוי להולדת בן הוא חצי, ולהולדת בת - חצי.)

תלמידים שטעו נקטו בגישה הרגשית. (למשל, "אם יש במשפחה שלושה בנים רב הסיכויים שתוולד בת, כי זה מוגזם! כולם מחכים לבת.") או מתוך נסיון חייהם. (למשל, "רוב הסיכויים שיוולד עוד בן. אני רוצה בת, אבל יודע שיוולד עוד בן.")



5. מטילים קוביית משחק 3 פעמים, ובודקים כמה פעמים התקבל מספר זוגי.
א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות של שלוש הטלות הקובייה? הסבירו.



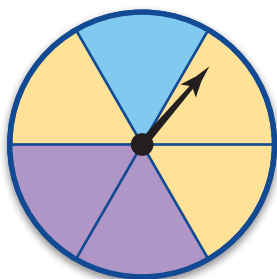
ב. מה ההסתברות לקבל בשלוש ההטלות מספרים זוגיים?



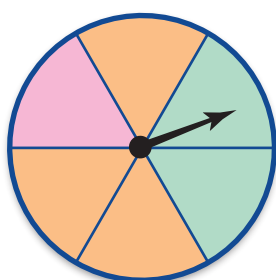
6. מטילים קוביית משחק 3 פעמים.
מה ההסתברות לקבל בשלוש ההטלות מספרים ראשוניים?



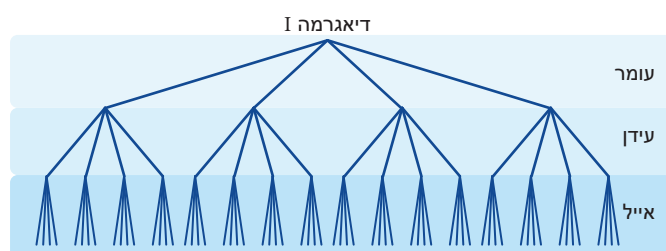
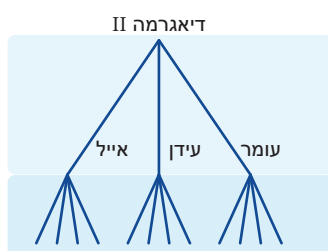
7. מסובבים פעמיים את המחוג של השעון שבשרטוט.
 בכל סעיף, חשבו את ההסתברות של המאורע הנתון:
 א. לקבל פעמיים סגול.
 ב. לקבל סגול וצהוב (לא חשוב הסדר).



8. מסובבים פעמיים את המחוג של השעון שבשרטוט.
 חשבו את ההסתברות:
 א. לקבל פעמיים אותו צבע.
 ב. לקבל שני צבעים שונים.



9. **עומר, עידן, ואייל** מסובבים כל אחד סביבון לחנוכה, לפי התור.
 א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברות של כל תוצאה אפשרית? הסבירו.



- ב. מה ההסתברות ששלושת הסביבונים ייפלו על אותה אות?



10. בטופס טוטו 14 משחקים.
עמית רושם באקראי ליד כל משחק שבטופס 1, 2 או X.
 א. מה ההסתברות לנחש נכון את כל תוצאות המשחקים?
 ב. מה ההסתברות לנחש נכון 13 משחקים?



שומרים על כושר

משוואות ושאלות מילוליות עם שברים אלגבריים

1. נתונים 4 ביטויים: $2x + 5$, $\frac{5x + 4}{3}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{8x + 40}{x + 5}$

הרכיבו מהביטויים הנתונים משוואות כך שהפתרון הוא:

א. 4 ב. -1 ג. 24 ד. -11 ה. -3 ו. 1.5

2. אילו מספרים או ביטויים יש לרשום במקום הריק במשוואה $x - \frac{2}{7} = \frac{7x + \boxed{}}{7}$ כך שהפתרון שלה יהיה:

א. כל המספרים ב. אף מספר ג. $x = 0$ ד. $x = 1$

3. רשמו את תחום ההצבה ופתרו את המשוואות.

א. $\frac{x-2}{x-4} = \frac{2}{x-4}$ ב. $\frac{9}{x} - \frac{7-x}{x-1} = 1$ ג. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-5}{x-3} = 0$

4. רשמו את תחום ההצבה ופתרו את המשוואות.

א. $\frac{2x+18}{x} - \frac{2x+3}{x-3} = 0$ ב. $\frac{3x+10}{2x-5} + 1 = \frac{5x-13}{2x-8}$ ג. $1 - \frac{6}{x} - \frac{x-3}{6x} = \frac{1-x}{x-1}$

5. דן בחר מספר (סמנו אותו ב- x).

הוא חילק את המספר שבחר ב-2, הוסיף לתוצאה 8 וקיבל 11.

א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה?

ב. מצאו את המספר שבחר דן. הסבירו כיצד מצאתם.

6. מירי בחרה מספר (סמנו אותו ב- x).

היא כפלה אותו ב-3, החסירה 1 מהמכפלה, חילקה את התוצאה ב-5 וקיבלה 7.

א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה?

ב. מצאו את המספר שבחרה מירי. הסבירו.

7. רויטל בחרה מספר (סמנו אותו ב- x).

היא הוסיפה לו 3, את הסכום חילקה במכפלת המספר שבחרה ב-7. למספר שהתקבל הוסיפה $\frac{1}{7}$.

רויטל קיבלה, לאחר כל החישובים, $\frac{1}{2}$.

א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה?

ב. מצאו את המספר שרויטל בחרה. הסבירו.