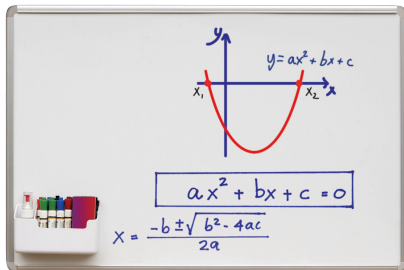


יחידה 17: מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית

שיעור 1. מוצאים שורשים של משוואה ריבועית



נתונה הפונקציה: $y = 2x^2 + 9x - 5$

איזה מבין הגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה? הסבירו.



נכיר דרך אלגברית למציאת נקודות האפס של פונקציה ריבועית.

1. תלמידי כיתה ט התלבטו איזה מהגרפים מתאים לתיאור הפונקציה. לשם כך, הם ניסו למצוא את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה. **רוני** אמרה: כדי לפתור את המשוואה $2x^2 + 9x - 5 = 0$ ניסיתי להיעזר בהוצאת גורם משותף, בנוסחאות הכפל המקוצר ובפירוק לפי טרינום, אבל לא הצלחתי. **דָרְיָה** אמרה: כדי למצוא את פתרונות המשוואה, אפשר להשתמש בנוסחה $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ מציבים את הערכים $a = 2$, $b = 9$, $c = -5$, המתאימים למשוואה, ומקבלים את הפתרונות. פתרונות המשוואה הם ערכי ה- x בנקודות האפס של הפונקציה. דונו בהצעות של **רוני** ו**דָרְיָה**. בדקו את הפתרונות של **דָרְיָה**.



נקודות החיתוך של גרף הפונקציה הריבועית $y = ax^2 + bx + c$ עם ציר ה- x , $a \neq 0$, נקראות **נקודות האפס**.

כדי למצוא את נקודות החיתוך מציבים $y = 0$ ומקבלים משוואה ריבועית. פתרונות המשוואה נקראים **שורשי המשוואה**.

- אם אפשר לרשום את חוק הפונקציה **כמכפלה** $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$, נוז למצוא את שיעורי נקודות האפס. במקרים אלה, אפשר לפרק לגורמים בעזרת חוקי הפילוג, נוסחאות הכפל המקוצר, או טרינום.

- דרך נוספת למציאת נקודות האפס היא שימוש ב**נוסחה**: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

נהוג לקרוא לנוסחה זו **נוסחת השורשים** של המשוואה הריבועית. בשיעור 2, תוכלו לקרוא כיצד מגיעים לנוסחה.

2. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 2x - 3$

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר x ועם ציר y .
 ב. שרטטו סקיצה של הפונקציה. (אין צורך לחשב נקודות נוספות).

3. מצאו, אם אפשר, פתרונות המשוואות הריבועיות. אם אי אפשר, הסבירו.

$$\begin{aligned} \text{צילנה: } -3x^2 + 13x - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{-6} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-6} \\ x_1 &= \frac{-13 + 11}{-6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-13 - 11}{-6} = 4 \end{aligned}$$

א. $x^2 + 2x - 15 = 0$ ג. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

ב. $-2x^2 - 3x + 20 = 0$ ד. $-3x^2 + 10x - 9 = 0$



4. א. כמה פתרונות יכולים להיות למשוואה ריבועית?
 ב. **שחר** אמר: אני יכולה לדעת מראש כמה פתרונות יש למשוואה.
 אני בודקת רק את $b^2 - 4ac$ בנוסחת השורשים.
 הסבירו את ההצעה של **שחר**.



5. קבעו אם הטענות הבאות נכונות. הסבירו.
 א. הפרבולות המתארות את הפונקציות: $y = -x^2 + 3x$ $y = x^2 - 3x$
 חותכות את ציר x באותן נקודות.
 ב. הפרבולות המתארות את הפונקציות: $y = x^2 + 7x + 6$ $y = x^2 + 4x - 12$
 חותכות את ציר x באותן נקודות.

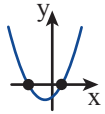


הנוסחה למציאת השורשים של משוואה ריבועית $a \neq 0, ax^2 + bx + c = 0$

היא: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

• אם $b^2 - 4ac > 0$, למשוואה יש **שני פתרונות**.

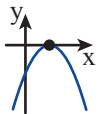
לגרף הפונקציה המתאימה יש שתי נקודות אפס.



דוגמה: למשוואה $2x^2 + 3x - 5 = 0$ יש שני שורשים, $b^2 - 4ac = 9 + 40 = 49 > 0$
לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 3x - 5$ שתי נקודות אפס: $(1, 0)$, $(-2.5, 0)$

• אם $b^2 - 4ac = 0$, למשוואה המתאימה יש **פתרון יחיד** (שני פתרונות זהים).

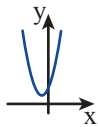
לגרף הפונקציה המתאימה יש נקודת אפס יחידה.



דוגמה: למשוואה $-x^2 + 8x - 16 = 0$ יש שורש יחיד. $b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$
לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 8x - 16$ יש נקודת אפס יחידה: $(4, 0)$

• אם $b^2 - 4ac < 0$, למשוואה **אין פתרונות**.

לגרף הפונקציה המתאימה אין נקודות אפס.



דוגמה: למשוואה $2x^2 + 4x + 3 = 0$

אין פתרון כי $b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8 < 0$

לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 4x + 3$ אין נקודות אפס.



אוסף משימות



1. פתרו את המשוואות, ובדקו את הפתרונות.

א. $x^2 - 4x - 21 = 0$ ג. $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ה. $-2x^2 + x + 15 = 0$

ב. $x^2 - 9x + 8 = 0$ ד. $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ ו. $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$



2. פתרו את המשוואות (פשטו וסדרו תחילה).

א. $x(x + 5) - 6 = 0$ ד. $x(6x - 13) + 2(5x - 1) = 1$

ב. $2x(x + 1) + 3.5 = 5$ ה. $x(3x - 5) = 2(3x - 5)$

ג. $2(2x - 5) = x(x - 7)$ ו. $x + \frac{x^2 - x}{2} = 0$



3. פתרו את המשוואות (פשוטו וסדרו תחילה).

א. $(x + 3)(x + 4) = 72$	ד. $(3x + 4)(x - 1) = 2x^2 + 2$
ב. $(x + 3)^2 = 4$	ה. $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 9$
ג. $(x - 3)^2 = x + 3$	ו. $4 + \frac{2x - 2x^2}{3} = 0$



4. פתרו את המשוואות, (פשוטו וסדרו תחילה).

א. $(2x - 1)(x - 1) = 13 - 5x$	ד. $x - (x + 4)^2 = x - 1$
ב. $3x^2 - 2x + 9 = 2x(x - 4)$	ה. $(2x + 1)^2 - (x + 7)^2 = 0$
ג. $\frac{(x - 3)^2}{2} = \frac{x + 5}{5}$	ו. $\frac{x(x + 5)}{2} - 2x + 4 = 0$



5. מיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור).

א. $5x^2 + 3x - 14 = 0$	ג. $x^2 + 8x + 25 = 0$	ה. $5x^2 + 25 = 0$
ב. $2x^2 - x - 15 = 0$	ד. $x^2 - 8x + 16 = 0$	ו. $4x - x^2 = 0$



6. מיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור).

א. $x^2 - 9x + 14 = 0$	ג. $(3x + 1)^2 = 0$	ה. $x^2 + 6 = 0$
ב. $7x^2 + 15x - 10 = 0$	ד. $(2x - 3)(2x + 3) = 0$	ו. $5x(4x - 10) = 0$



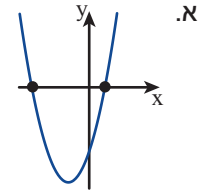
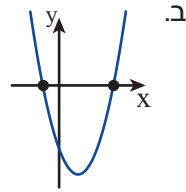
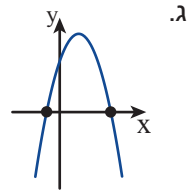
7. מיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור).

א. $3x^2 - 5x - 12 = 0$	ג. $8(x - 1) - x(5x - 6) = 0$	ה. $(x - 4)^2 = -1$
ב. $9x^2 - 30x + 25 = 0$	ד. $8(1 - x^2) = (2x - 3)^2$	ו. $x - \frac{(3 + x)^2}{2} = 0$



8. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x - 10$

איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה? הסבירו.



9. נתונה משפחת המשוואות $x^2 + bx + 16 = 0$, בכל סעיף, מצאו את הערך של b אם:

א. למשוואה פתרון יחיד ב. למשוואה אין פתרון



10. השמו משוואה ריבועית, כך שיתקיים:

א. $b^2 - 4ac = 0$ ב. $b^2 - 4ac > 0$ ג. $b^2 - 4ac < 0$



11. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $y = ax^2 + 2x + 1$ ($a \neq 0$).

עבור אילו ערכים של a , לפונקציה מהמשפחה יש:

א. שתי נקודות אפס ב. נקודת אפס אחת ג. ערכים חיוביים בלבד



12. נתונה המשוואה $x^2 - 6x + 9 = 0$

א. כמה פתרונות למשוואה?

ב. שנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה עם שני פתרונות. כמה אפשרויות יש?

ג. שנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה שאין לה פתרון. כמה אפשרויות יש?



שיעור 2. חוקרים פונקציות



נתונות שתי פונקציות, האחת **בהצגה מוזזת** והשנייה **בהצגה הסטנדרטית**.

הצגה סטנדרטית

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 5$$

הצגה מוזזת

$$f(x) = -2(x - 4)^2 + 18$$

נפתור משוואות ריבועיות כדי לשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות.

פונקציה בהצגה מוזזת

1. השלימו **תעודת זהות** לפונקציה.



$f(x) = -2(x - 4)^2 + 18$	הפונקציה
	משוואת ציר סימטריה
	שיעורי נקודת הקודקוד
	שיעורי נקודות חיתוך עם ציר x (נקודות אפס, $y = 0$)
	שיעורי נקודת חיתוך עם ציר y ($x = 0$)
	תחום עלייה של הפונקציה
	תחום ירידה של הפונקציה
	התחום בו הפונקציה חיובית ($y > 0$)
	התחום בו הפונקציה שלילית ($y < 0$)
	סקיצה



כדי לשרטט את גרף הפונקציה **בהצגה מוזזת** $f(x) = a(x - p)^2 + k$, $a \neq 0$

יש למצוא את **נקודות האפס** של הפונקציה.

לשם כך פותרים את המשוואה:

$$a(x - p)^2 + k = 0$$

$$a(x - p)^2 = -k$$

$$(x - p)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x - p = \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

פונקציה בהצגה סטנדרטית



2. השלימו **תעודת זהות** לפונקציה.

$g(x) = 4x^2 - 12x + 5$	הפונקציה
	משוואת ציר סימטריה
	שיעורי נקודת הקודקוד
	שיעורי נקודות חיתוך עם ציר x (נקודות אפס, $y = 0$)
	שיעורי נקודת חיתוך עם ציר y ($x = 0$)
	תחום עלייה של הפונקציה
	תחום ירידה של הפונקציה
	התחום בו הפונקציה חיובית ($y > 0$)
	התחום בו הפונקציה שלילית ($y < 0$)
	סקיצה

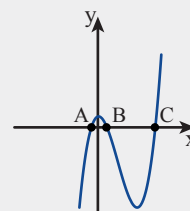
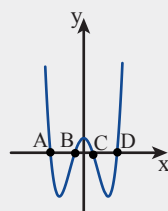
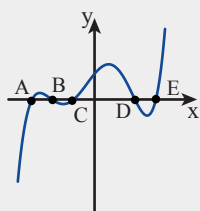
3. פתרו את המשוואות, ושרטטו את גרף הפונקציה המתאים לכל אחת מהן.

א. $x^2 + 4x + 5 = 0$ ב. $x^2 + 4x + 4 = 0$ ג. $x^2 + 4x + 3 = 0$

בשיעור 1 הכרנו את הנוסחה למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות ממעלה שנייה - כלומר, נוסחה למציאת שורשי משוואות ריבועיות.



במשך שנים רבות, ניסו מתמטיקאים לגלות נוסחאות דומות למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות (או שורשי משוואות) ממעלה גבוהה יותר - כמו למשל:



$$y = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36 \quad y = 0.1x^4 - 4x^2 + 10 \quad y = 0.1x^3 - 4x^2 - 4x + 100$$

התשובה לא הייתה פשוטה. הנוסחאות הכלליות למציאת השורשים של משוואה ממעלה שנייה, שלישית ורביעית (כלומר, ביטויים המבוססים על פעולות חשבוניות והוצאת שורש בין מקדמי המשוואה) פותחו רק לפני כ- 400 שנה.

מציאת נוסחאות דומות לשורשי משוואות מדרגה חמישית ומעלה, הייתה אתגר למתמטיקאים במשך שנים רבות נוספות, עד אשר לפני כ- 200 שנה הוכח המשפט שטוען כי קיומן של נוסחאות לשורשי משוואות שדרגתן גבוהה מ- 4, הוא בלתי אפשרי. משפט זה אינו מתייחס לעצם קיומם של השורשים, אלא למציאתם באמצעות נוסחה המבוססת על פעולות חשבון בין מקדמי המשוואה, ומתאימה לכל המשוואות מאותה מעלה.



כדי למצוא את נקודות האפס של פונקציה **בהצגה סטנדרטית**: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

פותרים את המשוואה: $ax^2 + bx + c = 0$

לשם כך משתמשים בנוסחת השורשים של המשוואה **בהצגה המוזזת** (ראו עמוד 35).

מוציאים את הקשר בין חוק הפונקציה **בהצגה סטנדרטית** ו**בהצגה מוזזת** על ידי פישוט.

$$f(x) = a(x - p)^2 + k$$

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + k$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$f(x) = \boxed{a}x^2 - \boxed{2ap}x + \boxed{ap^2 + k}$$

משווים להצגה הסטנדרטית ומקבלים:

$$-2ap = b$$

א.

מסיקים שני שוויונים:

$$\boxed{p = -\frac{b}{2a}}$$

ומכאן:

$$c = ap^2 + k$$

ב.

$$k = c - ap^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$\boxed{k = \frac{4ac - b^2}{4a}}$$

ומכאן:

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

ראינו, כי פתרונות המשוואה **בהצגה המוזזת** הם:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)} : a$$

על סמך השלבים הקודמים, מציבים ומקבלים:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

כלומר, הנוסחה לחישוב שיעור x של נקודות האפס של הפונקציה הריבועית (כלומר השורשים של המשוואה) היא:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



אוסף משימות



1. א. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 25 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 25$ עם ציר x ?
שרטטו סקיצה של הפונקציה.
- ב. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 24 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 24$ עם ציר x ?
שרטטו סקיצה של הפונקציה.
- ג. פתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 26 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 26$ עם ציר x ?
שרטטו סקיצה של הפונקציה.



2. השלימו **תעודות זהות** לפונקציות. (העתיקו למחברת).



חוק הפונקציה	$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$	$g(x) = x^2 - 6x + 10$
סקיצה		
משוואת ציר הסימטריה		
שיעורי נקודת הקודקוד		
שיעורי נקודות החיתוך עם ציר x (נקודות אפס, $y = 0$)		
שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y ($x = 0$)		
תחום עלייה של הפונקציה		
תחום ירידה של הפונקציה		
התחום בו הפונקציה חיובית ($y > 0$)		
התחום בו הפונקציה שלילית ($y < 0$)		



3. קבעו לכל טענה אם היא נכונה. הסבירו.
- א. למשוואה $x^2 - 10x + 24 = 0$ יש שני פתרונות.
- ב. למשוואה $2x^2 - 50 = 0$ אין פתרון.
- ג. לפונקציה $y = x^2 - 6x + 9$ יש שתי נקודות אפס.



4. קבעו לכל טענה אם היא נכונה. הסבירו.

א. למשוואה $x^2 - 12x + 36 = 0$ יש שני פתרונות.

ב. למשוואה $2x^2 + 50 = 0$ אין פתרון.

ג. למשוואה $x^2 + 8x + 16 = 0$ יש פתרון אחד.

ד. לפונקציה $y = -x^2 - 6x + 16$ יש שתי נקודות אפס.

ה. לפונקציה $y = -x^2 + 7$ אין נקודות חיתוך עם ציר x .



5. א. פתרו את המשוואות.

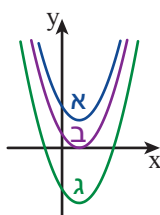
(i) $x^2 - 2x + 3 = 0$

ב. התאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = x^2 - 2x - 3$

$h(x) = x^2 - 2x + 1$



6. א. פתרו את המשוואות.

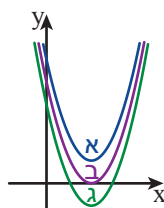
(i) $4x^2 - 12x + 8 = 0$

ב. התאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = 4x^2 - 12x + 8$

$g(x) = 4x^2 - 12x + 11$

$h(x) = 4x^2 - 12x + 9$



7. א. פתרו את המשוואות.

(i) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

(iv) $-2x^2 + 7x + 4 = 0$

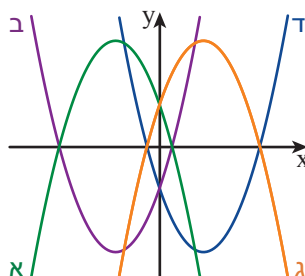
ב. התאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$

$g(x) = 2x^2 + 7x - 4$

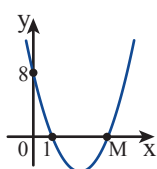
$h(x) = -2x^2 - 7x + 4$

$m(x) = -2x^2 + 7x + 4$



(iii) $-2x^2 - 7x + 4 = 0$

(ii) $2x^2 + 7x - 4 = 0$



8. בשרטוט גרף הפונקציה $y = ax^2 - 10x + c$ ($a \neq 0$)

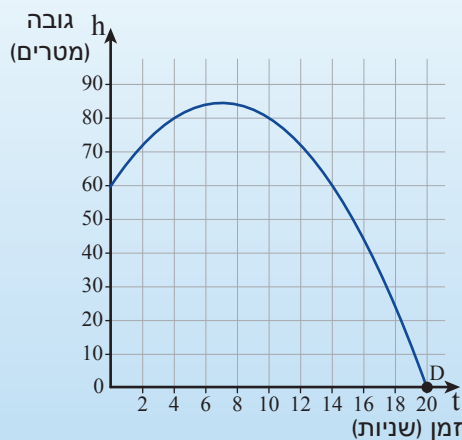
א. מהו c ? ב. מהו a ? ג. מהם שיעורי הנקודה M ?



שיעור 3. ממעוף הציפור

פתרון גרפי של משוואות ריבועיות

לפניכם גרף הפונקציה $h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 7t + 60$ המתארת גובה של ציפור מעל לקרקע במטרים, במשך זמן המיוצג על-ידי t (בשניות).



נחקור את השינויים בגובה הציפור בעזרת הגרף ובעזרת משוואות.

1. א. אילו מספרים מתאימים ל- t לפני נתוני השאלה? הסבירו.
- ב. הציבו $t = 0$. סמנו את הנקודה המתאימה על הגרף. מה משמעות הנקודה מבחינת הסיפור של מעוף הציפור?
- ג. לאחר כמה שניות, בערך, תחזור הציפור לגובה ממנו החלה לעוף?
- ד. מצאו, אם אפשר, לאחר כמה שניות, בערך, תהייה הציפור בגובה: 72 מטר? 24 מטר? 90 מטר? כמה פתרונות מתאימים מצאתם לכל אחד מהמקרים? הסבירו.
- ה. מצאו את קודקוד הפרבולה. מה משמעות הקודקוד מבחינת הסיפור של מעוף הציפור?
- ו. מה משמעות הנקודה D מבחינת הסיפור של מעוף הציפור?



2. **דְּרִיָּה ושרה** מצאו את התשובה לשאלה: "מתי תהייה הציפור בגובה 72 מטרים?" בדרכים שונות. שתיהן קבעו כי המשתנה t יכול לקבל ערכים גדולים מ- 0 וקטנים מ- 20.

דְּרִיָּה - פתרון גרפי

- מוצאים את הגובה 72 מטרים על ציר ה- y
- הציפור מגיעה לגובה זה פעמיים, ב- $t = 2$ וב- $t = 13$.
- לבדיקה, מציבים את הערכים $t = 2$ ו- $t = 13$ בפונקציה, מקבלים אכן 72.

שרה - פתרון אלגברי

- פותרים את המשוואה $-\frac{1}{2}t^2 + 7t + 60 = 72$
 - מבצעים פעולות על אגפי המשוואה ומקבלים: $-\frac{1}{2}t^2 + 7t - 12 = 0$
 - מוצאים את הפתרונות של המשוואה: $t_1 = 2, t_2 = 13$
 - כלומר, כעבור 2 דקות וכעבור 13 דקות הציפור תהיה בגובה 72 מטרים.
 - לבדיקת הפתרון מציבים את הערכים בפונקציה $h(t)$, ומוודאים שהפתרונות מתאימים לשאלה.
- מה דעתכם על הפתרונות של **דָרְיָה** ושל **שרה**. האם פתרתם בדרך אחרת? איזו דרך אתם מעדיפים? מדוע?

3. שאלו שתי שאלות משלכם על מעוף הציפור. מצאו את התשובה והסבירו כיצד מצאתם אותה.

4. תארו במילים את מעוף הציפור לפי המידע שאספתם במשימות הקודמות. (תוכלו להיעזר במילים: בתחילה, הגובה, אחרי... דקות, פעם אחת, אף פעם, פעמיים, הגובה במטרים...).



מכון ויצמן למדע ממעוף הציפור

משמעות הציור "ממעוף הציפור" היא תיאור שאינו מפורט. נהוג לקרוא לתמונות נוף שצולמה מגובה רב, תמונות ממעוף הציפור - אלו הן תמונות המאפשרות מבט כללי ומעניין על מקום, אך קשה לזהות בהן פרטים מדויקים.



אוסף משימות



1. מקצה גג של בית שגובהו 25 מטר נזרקה אבן כלפי מעלה. והיא חזרה ונפלה על האדמה. הפונקציה המתאימה למספר השניות שחלפו מרגע שנזרקה האבן (t) , את גובהה במטרים, מעל פני

האדמה (h) היא: $h(t) = -5t^2 + 20t + 25$

א. אילו מספרים מתאימים ל- t לפי נתוני השאלה? הסבירו.

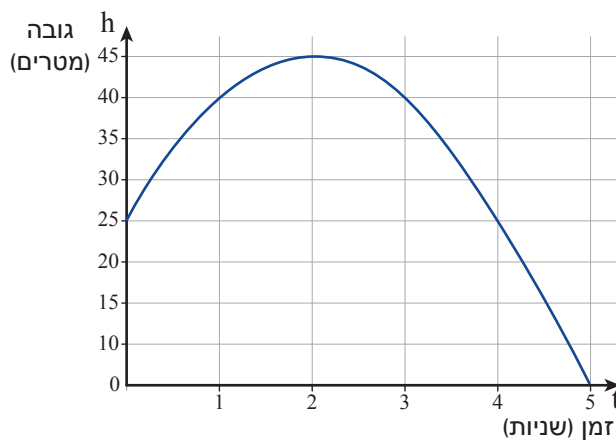
ב. כעבור כמה שניות הגיעה האבן לגובה ממנו נזרקה?

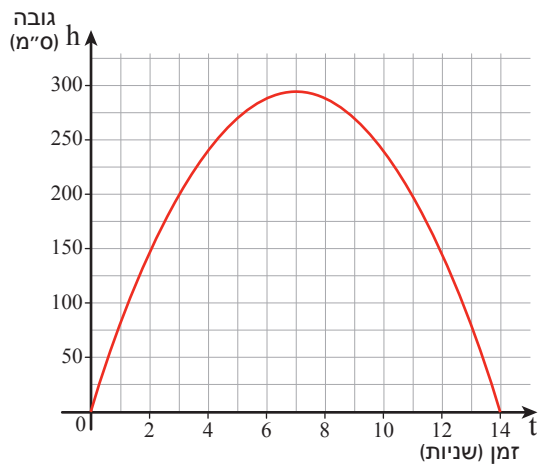
ג. כעבור כמה שניות הגיעה האבן לגובה 15 מטר? 40 מטר?

ד. כעבור כמה שניות הגיעה האבן לאדמה?

ה. מה שיעורי קודקוד הפרבולה?

ו. מהו משמעות הקודקוד מבחינת הסיפור של זריקת האבן?





2. ספורטאי מתאמן בקפיצה במוט. הפונקציה המתאימה

לזמן בשניות שחלף מרגע הקפיצה (t) , את גובהו בס"מ מעל הקרקע (h) , היא $h(t) = 84t - 6t^2$.

א. אילו מספרים מתאימים ל- t לפי נתוני השאלה? הסבירו.

ב. כמה זמן נמשכה הקפיצה?

ג. כעבור כמה שניות יגיע הספורטאי לגובה מכסימלי? מהו הגובה המכסימלי אליו הגיע הספורטאי?

ד. כמה פעמים יגיע הספורטאי לגובה 200 ס"מ? הסבירו.



3. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ב. $2x^2 - 5x = 0$

ג. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

ד. $(x - 5)(x + 2) = 0$

ה. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

ו. $(x - 2)^2 = x(x - 3)$



4. פתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$

ב. $x(x - 4) = 21$

ג. $x^2 + 5(8 - x) = 46$

ד. $(x + 2)^2 = x^2 + 20$

ה. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 1)$

ו. $(x - 4)^2 = x(8 + x)$



5. פתרו את המשוואות.

א. $x(x + 4) = 3x + 12$

ב. $(x + 5)(x + 2) = -2$

ג. $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 9$

ד. $x(2x + 3) = 2x - 5$

ה. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 4x - 5$

ו. $(x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 31$

שיעור 4. שאלות ומשוואות



יובל בחר מספר שלם.

הוא הוסיף 8 למספר שבחר.

כפל את הסכום שהתקבל במספר שבחר וקיבל 9.

רחל אמרה: המספר שבחרת הוא 1.

יובל אמר: טעית, אני בחרתי מספר אחר.

הייתכן? הסבירו.

נפתור שאלות ומשוואות ריבועיות.

1. מחוט שאורכו 24 ס"מ יוצרים מלבנים שונים.
א. הציעו מידות אפשריות למלבנים ומצאו את שטחיהם.
ב. סמנו ב- x את אורך אחת הצלעות של המלבן.
רשמו ביטוי לאורך הצלע השנייה.
ג. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.
ד. השטח של אחד המלבנים שנוצרו מאותו החוט, הוא 27 סמ"ר.
מצאו את אורכי צלעות המלבן. הסבירו.
2. מקיפים בגדר מגרש מלבני, שאורכו גדול ב- 12 מטר מרוחבו.
א. סמנו ב- x את אורך אחת מצלעות המלבן.
רשמו ביטוי לאורך הצלע השנייה.
ב. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.
ג. שטח המלבן 45 מ"ר. מה אורכי צלעותיו?
3. בסיום שנת הלימודים החליטו תלמידי כיתה ט להחליף ביניהם תמונות למזכרת.
בסך-הכול הוחלפו 870 תמונות.
א. אילו מספרים יכולים להתאים למספר התלמידים בכיתה?
ב. כמה תלמידים בכיתה? הסבירו.



תזכורת

בפתרון שאלה מילולית,

- קובעים תחילה מהם **הנתנים** **המגבילים** של השאלה, כלומר מסיקים אלו מספרים מתאימים לנתונים.
- מוצאים את התשובה לשאלה בעזרת שיקולים, חישובים, גרף או ביטויים ומשוואות.
- בודקים אם הפתרונות שהתקבלו מתאימים לתנאי השאלה.

4. פתרו את המשוואות.

א. $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

א. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

ד. $-2x^2 + 3x - 1 = 0$

ב. $x^2 - x + 1 = 0$

5. בכל סעיף, פשוטו, רשמו בצורה $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ופתרו.

$$x(3x - 1) = 4(3 + x)$$

זלזלה:

$$3x^2 - x = 12 + 4x \quad / \quad -12 - 4x$$

מפשטים:

$$3x^2 - 5x - 12 = 0$$

פותרים:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{169}}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+13}{6} = 3, \quad x_2 = \frac{5-13}{6} = -\frac{4}{3}$$

מקבלים:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -\frac{4}{3}$$

פתרונות המשוואה הם:

ד. $(x + 2)(x - 4) = 3 - 3x^2$

א. $x^2 - 2x = x + 4$

ה. $2(8 - x) = (x - 4)^2$

ב. $x(x - 4) = 21$

ו. $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = x + 2$

ג. $(x - 3)(x + 1) = 22 - 2x$



אוסף משימות



1. צלע אחת של מלבן ארוכה ב- 2 ס"מ מהצלע השנייה. שטח המלבן 24 ס"מ.

א. אילו מספרים יכולים להתאים לאורכי צלעות המלבן?

ב. מצאו אורכי צלעות המלבן.

ג. מצאו את היקף המלבן.



2. היקפו של מלבן 32 ס"מ.

סמנו ב- x את אורך אחת הצלעות של המלבן.

א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.

ב. שטח המלבן 48 סמ"ר. מצאו אורכי צלעות המלבן.



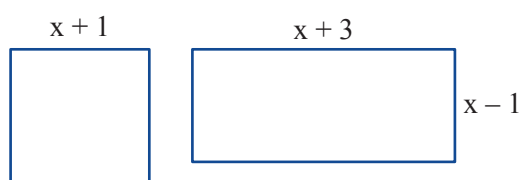
3. בשרטוט ריבוע ומלבן.

א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.

ב. סכום השטחים של הריבוע והמלבן 94 סמ"ר.

מצאו אורכי צלעות המלבן והריבוע.

ג. מצאו סכום אורכי ההיקפים של המלבן והריבוע.



4. פתרו את המשוואות.

א. $(x-1)(3x+1) = x^2 + 11$ ד. $(x-2)(x+4) = (2x-7)(x+2)$

ב. $(2x-1)(x+3) = 15$ ה. $(x+5)^2 = (x-1)(5x-11)$

ג. $(x-4)^2 + (x+4)^2 = 82$ ו. $(x-5)^2 + (x+3)^2 = 16x - 8$



5. פתרו את המשוואות.

א. $8(1+x) = x(6+x)$ ד. $x(x+2) + (x-5)^2 = 89$

ב. $(x-4)(x+4) = (2x-1)(2x+1)$ ה. $(2x-1)(x+2) = x(x+1) + 1$

ג. $(3x-2)^2 = 8(x^2-3) + 1$ ו. $(2x-3)(2x+3) = 5x + (x+1)(x-1)$



6. פתרו את המשוואות.

א. $7(2-x) + x(x-3) = 5$ ד. $(x-3)(x+2) + (x-5)^2 = 10$

ב. $3(x-1)^2 = 2(x+3)^2 - 96$ ה. $(2x-3)(2x+3) = 3x(x+1) - 19$

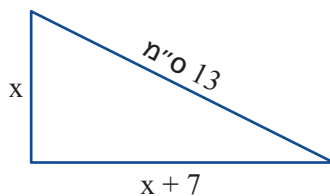
ג. $(3x+2)^2 + 2(3x-2) = 0$ ו. $(2x-3)^2 - 4(x+1)^2 = 10 - 15x$



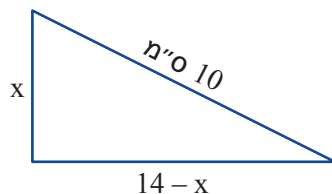
7. בטורניר של שחמט שיחק כל שחקן משחק אחד נגד כל אחד מן השחקנים האחרים. בטורניר היו 36 משחקים. כמה שחקנים השתתפו בטורניר?



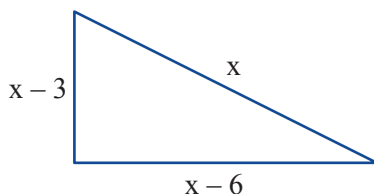
משימות נוספות



8. בשרטוט משולש ישר זווית. (המידות בס"מ).
 א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.
 ב. מצאו את אורכי צלעות המשולש.
 ג. מצאו את היקף המשולש ואת שטחו.



9. בשרטוט משולש ישר זווית. (המידות בס"מ).
 א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.
 ב. מצאו את אורכי צלעות המשולש.
 ג. מצאו את היקף המשולש ואת שטחו.



10. בשרטוט משולש ישר זווית. (המידות בס"מ).
 א. אילו מספרים מתאימים ל- x לפי נתוני השאלה? הסבירו.
 ב. מצאו את אורכי צלעות המשולש.
 ג. מצאו את היקף המשולש ואת שטחו.



11. סכום שלושה מספרים הוא 12.
 המספר השני גדול ב- 4 מהמספר הראשון.
 בכל סעיף, מצאו את המספרים המתאימים:
 א. מכפלת שלושת המספרים היא 20?
 ב. סכום ריבועי המספרים הוא קטן ביותר?

שיעור 5. משלימים לריבועים ופותרים

פתרו את המשוואה $x^2 + 6x + 8 = 0$.

נכיר דרך נוספת לפתרון משוואות ריבועיות.

1. רונן אמר: המשוואה $x^2 + 6x + 8 = 0$ דומה למשוואה $x^2 + 6x + 9 = 0$ כלומר ל- $(x + 3)^2 = 0$.
 לכן, אוסיף 1 לשני אגפי המשוואה כך:
 $x^2 + 6x + 8 + 1 = 1$
 $x^2 + 6x + 9 = 1$ מקבלים:
 $(x + 3)^2 = 1$ על-פי נוסחאות הכפל המקוצר מקבלים:

$$x + 3 = 1 \text{ או } x + 3 = -1$$

$$x = -2 \text{ או } x = -4 \quad \text{לכן:}$$

מציבים את שני הפתרונות במשוואה $(-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 0$ $(-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 8 = 0$

היעזרו בדרך הפתרון של **רונן** כדי לפתור את המשוואות.

$$4x^2 - 12x + 5 = 0 \quad \text{א.} \quad x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{ב.} \quad x^2 + 10x + 9 = 0 \quad \text{ג.}$$



דרך הפתרון של **רונן** נקראת **השלמה לריבוע**.

לפעמים, אפשר למצוא את הפתרונות של משוואה ריבועית מהצורה $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, בעזרת השלמה לריבוע, כך:

- בעזרת פעולות על אגפים, יוצרים בשני האגפים ביטויים שהם ריבועים שלמים.
- מוצאים את פתרונות המשוואה.

דוגמה: נתונה המשוואה: $x^2 - 10x + 16 = 0$
 את המשוואה אפשר לרשום כך: $x^2 - 10x + 16 + 9 = 9$
 כלומר: $(x - 5)^2 = 9$
 נוכל להסיק: $x - 5 = 3$ או $x - 5 = -3$
 ולכן $x_2 = 8$ $x_1 = 2$

2. פשטו ופתרו את המשוואות.

$$(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 36 \quad \text{ד.} \quad (2x - 1)(x + 1) = 20 \quad \text{א.}$$

$$(x - 5)^2 - (2x + 1)^2 = 0 \quad \text{ה.} \quad x^2 + (x - 2)(3x + 1) = 7 \quad \text{ב.}$$

$$3(x - 2)^2 = 2(x + 1)^2 - 45 \quad \text{ו.} \quad (2x - 1)(x + 1) - x(x + 1) = 0 \quad \text{ג.}$$



3. נתונה המשוואה $x^2 + 14x + 40 = 0$. אפשר לפתור אותה בדרכים שונות.

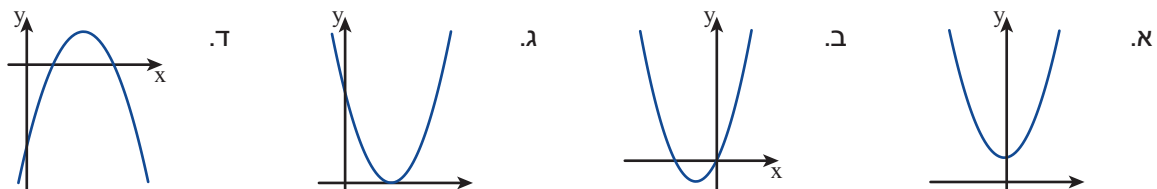
השלמה לריבוע	נוסחת השורשים	טרינום
$x^2 + 14x + 40 + 9 = 9$ $(x + 7)^2 = 9$ $x + 7 = -3$ או $x + 7 = 3$ $x_1 = -10, x_2 = -4$	$a = 1, b = -14, c = 40$ $x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 160}}{2}$ $x_{1,2} = \frac{-14 \pm \sqrt{36}}{2}$ $x_1 = -10, x_2 = -4$	$(x + 10)(x + 4) = 0$ $x_1 = -10, x_2 = -4$

איזו דרך אתם מעדיפים? מדוע?



אוסף משימות

1. בשרטוט סקיצות של פרבולות.



הפונקציות המתאימות לפרבולות הן:

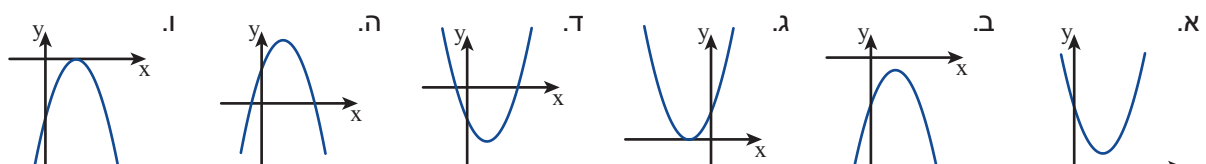
$$f(x) = x^2 + 3 \quad g(x) = -x^2 + 3x - 2 \quad h(x) = x^2 + 2x \quad k(x) = x^2 - 8x + 16$$

מצאו את נקודות האפס (אם יש), והתאימו פרבולה לחוק.



2. לכל פונקציה, התאימו סקיצה של פרבולה. הסבירו.

$$\begin{array}{lll} m(x) = -x^2 + 3x + 4 & p(x) = x^2 - x + 1 & f(x) = x^2 + 2x + 1 \\ g(x) = x^2 + 3x - 4 & k(x) = -x^2 + x - 1 & h(x) = -x^2 + 2x - 1 \end{array}$$





3. לכל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את נקודות האפס (אם יש), ושרטטו סקיצה מתאימה.

א. $f(x) = x^2 + 3x + 2$ ג. $p(x) = 2x^2 + 4x + 2$ ה. $m(x) = -x^2 + 2x - 3$
 ב. $g(x) = x^2 + 2x + 3$ ד. $h(x) = -x^2 + 3x - 2$ ו. $k(x) = -2x^2 + 4x - 2$



4. פתרו את המשוואות.

א. $(x + 2)(3x - 1) = 40$ ד. $(x + 2)^2 + 1 = 3x - 2$
 ב. $9x^2 - 8 = (2x + 1)^2$ ה. $(x - 4)(x - 5) = 6x - 34$
 ג. $(x - 3)^2 + 6x = 13$ ו. $(2x - 1)^2 + x = 3x^2 + 5$



5. פתרו את המשוואות.

א. $(x + 3)(x - 1) = 2x + 1$ ד. $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 1$
 ב. $(2x + 3)^2 + x = 3x(x + 5) + 12$ ה. $(x - 6)(x + 6) - x(x - 3) = (x - 4)^2$
 ג. $(2x - 3)^2 = 3x(x - 4) + 25$ ו. $2x(2x - 3) + 6 = (3x - 1)(x + 1)$



6. פתרו את המשוואות.

א. $3(x - 1)^2 - 2x(x - 1) = 0$ ד. $(3x - 1)(3x + 1) = 2(x - 3)(x - 1) + 8x$
 ב. $2(x - 3)^2 - (x - 4)^2 + 2 = 0$ ה. $(3x - 1)^2 = 4(x - 3)(x - 1) - 16$
 ג. $(x - 3)^2 - 2(x - 4)^2 = 2$ ו. $3x^2 - (x - 5)^2 = (2x - 1)(x + 3) - 2$



7. נתונה משפחת המשוואות $x^2 + kx + (k - 1) = 0$

א. מצאו משוואה מן המשפחה שיש לה פתרון אחד. מהו הפתרון?

ב. האם קיימת משוואה מן המשפחה שאין לה פתרון? אם כן, רשמו את המשוואה. אם לא, הסבירו.



שומרים על כושר

כפל מקוצר

1. מצאו זוגות של ביטויים שווים, אחד מכל שורה.

א. $x^2 + 2x + 1$	ב. $x^2 + 10x + 25$	ג. $x^2 - 9$	ד. $x^2 - 12x + 36$
א. $(x + 5)^2$	ב. $(x - 6)^2$	ג. $(x + 1)^2$	ד. $(x + 3)(x - 3)$

2. מצאו את השגיאות ותקנו אותן.

א. $(x + 5)^2 = x^2 + 25$	ג. $(x - 6)^2 = x^2 + 12x + 36$
ב. $(x - 3)(x + 3) = x^2 + 9$	ד. $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 8$

3. פתרו את המשוואות הבאות.

א. $x^2 - 2x + 1 = 0$	ד. $x^2 - 8x + 16 = 0$
ב. $4x^2 - 4x + 1 = 144$	ה. $x^2 + 6x + 9 = 0$
ג. $x^2 + 18x + 81 = 16$	ו. $4x^2 - 20x + 25 = 36$

4. בכל סעיף, קבעו אילו מספרים מתאימים ל- x לפי הנתונים, ורשמו ביטוי לשטח הריבוע.

א. אורך צלע הריבוע $x - 8$	ב. אורך צלע הריבוע $x + 2$	ג. אורך צלע הריבוע $7x - 2$
----------------------------	----------------------------	-----------------------------

5. בכל סעיף, קבעו אילו מספרים מתאימים ל- x , ורשמו ביטוי לאורך צלע הריבוע לפי שטחו.

א. $(2x - 5)^2$	ב. $x^2 + 10x + 25$
-----------------	---------------------

6. פתרו את האי-שוויונות.

א. $5(x - 3)^2 - 5(x - 4)(x + 4) > 75$
ב. $(x - \frac{1}{2})^2 - (x + \frac{1}{2})^2 > 0$
ג. $(x - 1)^2 - (4 - x)^2 > 3$

7. נתון ריבוע שאורך צלעו $3a$ יחידות.

נתון מלבן שאורך צלע אחת שלו קטן ב- 2 יחידות מאורך צלע הריבוע, ואורך הצלע האחרת גדול ב- 2 יחידות מאורך צלע הריבוע.
א. אילו מספרים מתאימים ל- a לפי נתוני השאלה?
ב. למי שטח גדול יותר, למלבן או לריבוע? הסבירו.