

גיאומטריה: כל המרובעים יחד

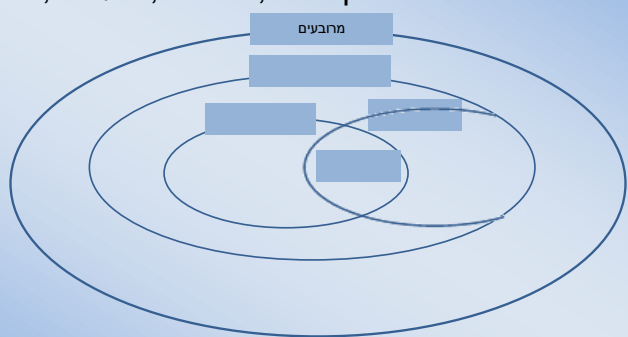
יחידה 12 (כחול + ירוק)

מטרות היחידה הזו:

- לעסוק בכל המרובעים שנלמדו, תוך הדגשת הקשרים ביניהם ובין תכונותיהם.
- לעסוק בסיטוציות בעיה מקיפות, וביצירת שרשרות של משפטים.
- וכמובן, תרגול נוסף של הוכחות, הסקת מסקנות, ניסוח משפטים, שימוש בתכונות, בדיקת תנאים מספיקים לקבלת מרובעים מסוימים, הבחנה בין משפט למשפט ההפוך לו, וכו'...

שיעור 1: על קבוצות של מרובעים

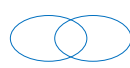
לפניכם דיאגרמה של קבוצות מרובעים שונות. היכן צריך לרשום את השמות: מקביליות, מלבנים, מעוינים, ריבועים?



נעסוק ביחסים בין קבוצות המרובעים ובתכונות משותפות וייחודיות שיש לקבוצות האלה.



תזכורת: דיאגרמת ון היא **תרשים** המבטא קשרים בין **קבוצות**.



שתי קבוצות להן איברים משותפים מיוצגות על ידי התרשים:

שתי קבוצות שאחת מהן מכילה את כל איברי הקבוצה האחרת



מיוצגות על ידי התרשים:

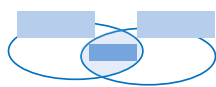


שתי קבוצות שאין להן אף איבר משותף מיוצגות על ידי התרשים:

קשרים בין קבוצות

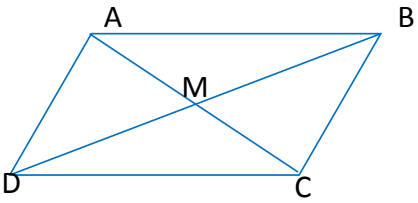
1. שרטטו את הדיאגרמה ורשמו את השמות הרשומים בכל סעיף, במקומות המתאימים.

ב. מקביליות, דלתונים, מעוינים



א. מקביליות, מלבנים, ריבועים.





תכונות שעוברות ממרובע אחד לשני

א. הוכיחו כי אלכסוני המקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי שטח. (הוכיחו תחילה כי שטח $\triangle AMB$ שווה לשטח $\triangle BMC$).



ב. אילו מהטענות הבאות **נובעות ישירות** מהטענה שהוכחתם בסעיף א'? הסבירו.

- אלכסוני המלבן מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
- אלכסוני הדלתון מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
- אלכסוני המעוין מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
- אלכסוני הטרפז מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.
- אלכסוני הריבוע מחלקים אותו לארבעה משולשים שווי שטח.

3. א. העתיקו את הטבלה וסמנו $\checkmark$ בכל משבצת המתארת תכונה המתקיימת במרובע.

כל הזוויות שוות	הזוויות הנגדיות שוות	כל הצלעות שוות	הזוגות של צלעות מקבילות	הצלעות הנגדיות שוות	
	$\checkmark$		$\checkmark$	$\checkmark$	במקבילית
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	במלבן
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	במעוין
$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	בריבוע

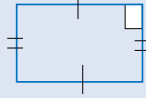


- ב. הסימונים בטבלה מראים כי תכונות המקבילית מתקיימות במלבן, מעוין, וריבוע.
- ג. הסבירו כיצד זה מתבטא בטבלה, ומדוע זה נכון.

קשרים בין קבוצות

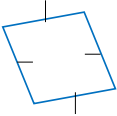
בכל סעיף משורטט מרובע ובו מסומנים נתונים.
ציינו, מבין השמות הבאים, את כל השמות בהם מותר לכנות את
הצורה המשורטטת: מרובע, מקבילית, מעוין, ריבוע, דלתון, טרפז.

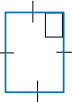
דוגמה:

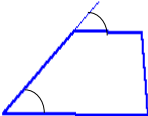


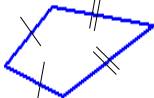
מפוע מקבילית, מלבן.

א. 

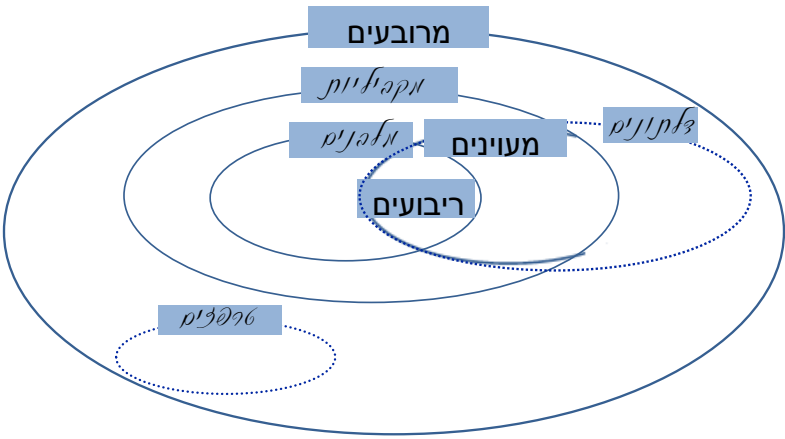
ב. 

ג. 

ד. 

ה. 

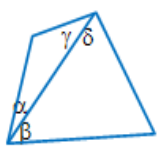
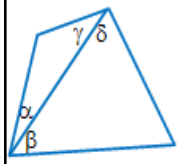
7. לפניכם דיאגרמת ון המתארת קשרים בין קבוצות המרובעים השונות.
רשמו בדיאגרמה, במקומות המתאימים, את השמות: מקביליות, מלבנים,
דלתונים, וטרפזים.



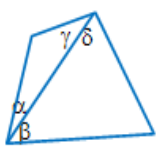


6. בכל סעיף שרטטו מרובע, רשמו בו את הנתונים, וקבעו איזה מרובע מתקבל. הסבירו.

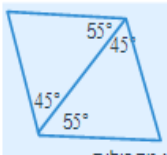
רשמו את שם המרובע המשוכלל ביותר המתקבל. (למשל, אם מתקבל מלבן רשמו מלבן ואל תרשמו מקבילית, למרות שמלבן הוא סוג של מקבילית).



ב. $\alpha=50^\circ$
 $\beta=30^\circ$
 $\gamma=50^\circ$
 $\delta=30^\circ$

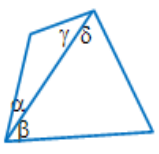


א. $\alpha=40^\circ$
 $\beta=40^\circ$
 $\gamma=50^\circ$
 $\delta=50^\circ$

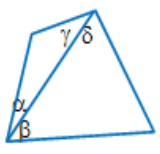


דוגמה: $\alpha=45^\circ$
 $\beta=55^\circ$
 $\gamma=55^\circ$
 $\delta=45^\circ$

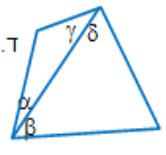
המרובע הוא מקבילית.
2 זוגות של צלעות מקבילות



ה. $\alpha=45^\circ$
 $\beta=45^\circ$
 $\gamma=45^\circ$
 $\delta=45^\circ$

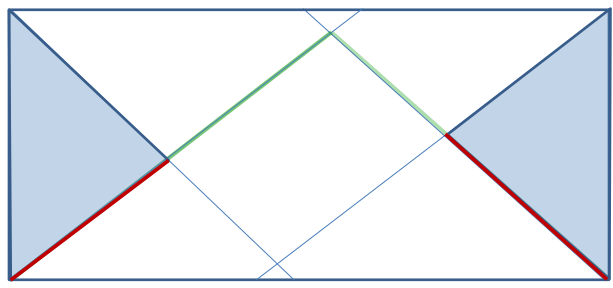


ד. $\alpha=40^\circ$
 $\beta=50^\circ$
 $\gamma=40^\circ$
 $\delta=50^\circ$

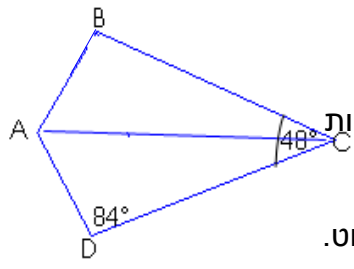


ג. $\alpha=40^\circ$
 $\beta=50^\circ$
 $\gamma=50^\circ$
 $\delta=40^\circ$

חוצי הזוויות במלבן יוצרים ריבוע.
הוכחה:



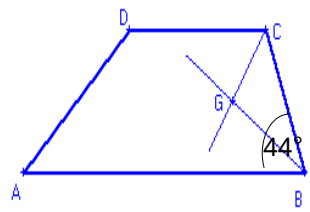
באוסף המשימות של השיעור השני: חוצי זוויות במרובעים שאינם מקבילים



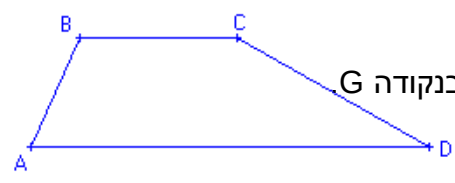
6. BE חוצה את הזווית B בדלתון ABCD.
העתיקו את הדלתון ושרטטו את חוצי הזוויות B ו-D.
חשבו זוויות לפי הנתונים הרשומים בשרטוט.
היכן נפגשים חוצי הזוויות בדלתון הזה?



7. א. שרטטו דלתון שאינו מעוין ואת חוצי הזוויות שלו.
ב. הוכיחו כי חוצי הזוויות נפגשים בנקודה על האלכסון AC.



8. מרובע ABCD הוא טרפז.
חוצי הזוויות C ו-B נפגשים בנקודה G.
 $\angle CBA = 44^\circ$
חשבו זוויות ומצאו בשרטוט משולש ישר זווית. הסבירו.

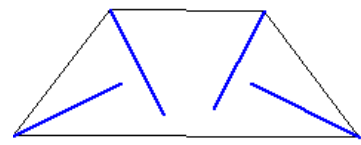
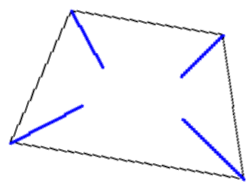


9. מרובע ABCD הוא טרפז.
חוצי הזוויות C ו-D נפגשים בנקודה G.
שרטטו והוכיחו $\angle CGD = 90^\circ$



10. לפניכם טרפזים שווי שוקיים.

הניחו עליהם דף שקוף והמשיכו את חוצי הזוויות עד שחוצי זוויות כל בסיס יפגשו.

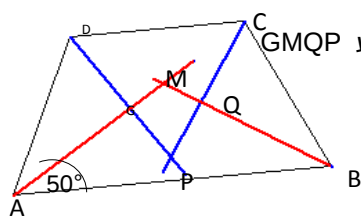


שערו איזה מרובע יוצרים חוצי הזוויות בטרפז שווה שוקיים?

11. מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ארבעת חוצי הזוויות של הטרפז יוצרים את המרובע GMQP $\angle DAB = 50^\circ$

חשבו זוויות ומצאו בשרטוט משולשים שווי שוקיים.
מצאו בשרטוט זוג של משולשים חופפים והסבירו.
מצאו בשרטוט משולשים ישרי זווית.

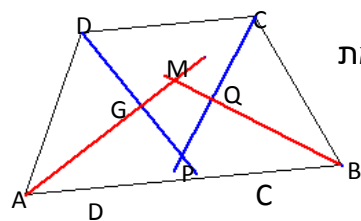


$\triangle CQB \cong \triangle DGA$

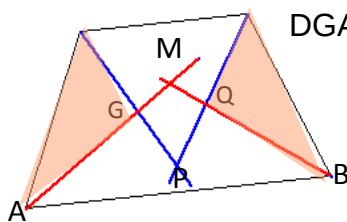
11. מרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים.

ארבעת חוצי הזוויות של הטרפז יוצרים את המרובע GMQP

א. הוכיחו: $BM = AM$
 $DP = CP$



ב. הוכיחו משולש CQB חופף למשולש DGA
ג. הוכיחו: MGPQ דלתון.



12. ציינו באילו מהמרובעים הבאים חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת והסבירו:

בריבוע, במעוין, בדלתון, במלבן שאינו ריבוע, במקבילית שאינה מעוין, בטרפז.

חוצי זוויות במרובע

- כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לארבעה ישרים שונים?
דונו בכל המקרים האפשריים.
- כמה נקודות חיתוך יכולות להיות לארבעת חוצי הזוויות במרובע?
חקרו את כל המקרים האפשריים:
- ❖ מה המספר הגדול ביותר של נקודות חיתוך שניתן לקבל?
 - ❖ מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות ועל המרובע אם לחוצי הזוויות יש 5 נקודות חיתוך? נסחו טענה והוכיחו אותה.
 - ❖ מה תוכלו לומר על חוצי הזוויות ועל המרובע אם לחוצי הזוויות יש 4 נקודות חיתוך? נסחו טענות והוכיחו אותה.
 - ❖ ומה בדבר 3 נקודות חיתוך? בדקו במחשב, נסחו טענה והוכיחו.
 - ❖ שנו את המרובע, כך שחוצי הזוויות ייפגשו בנקודה אחת.
- צרו שרטוטים שונים בהם קיימת נקודת מפגש יחידה.
איזו תכונה מאפיינת את נקודת המפגש של חוצי הזוויות במרובע, כאשר ארבעתם נפגשים בנקודה אחת? נמקו.

סיכום הטענות בפעילות על חוצי זוויות במרובע

- לא ייתכן שלארבעה ישרים תהיינה שתי נקודות חיתוך.
- אם לחוצי זוויות במרובע יש 5 נקודות חיתוך אז במרובע יש זוג זוויות נגדיות שוות.
- אם לחוצי זוויות במרובע יש 4 נקודות חיתוך אז חוצי הזוויות יוצרים מלבן והמרובע הוא מקבילית.
- לא ייתכן שארבעת חוצי הזוויות במרובע ייחתכו ב- 3 נקודות.
- לא ייתכן שארבעת חוצי הזוויות במרובע ייחתכו ב- 0 נקודות.
- אם חוצי הזוויות במרובע נחתכים בנקודה אז הנקודה הזו נמצאת במרחק שווה מצלעות המרובע.
- חוצי הזוויות במשולש נחתכים תמיד בנקודה אחת. נקודה זו נמצאת במרחק שווה מהצלעות.

שיעור 3: מהאלכסונים אל המרובעים

איזה מרובע יוצר אם נחבר את קצות הרגליים של קרש גיהוץ?



בדקו את קרש הגיהוץ בביתכם.

היכן נמצאת נקודת החיבור של הרגליים?

מעל, מתחת או בדיוק בנקודת האמצע

של הרגליים.

נזהה מרובע לפי תכונות אלכסוניו.

בשיעור זה נשתמש בשלוש רצועות:

שתיים שוות באורך והשלישית שונה מהן.

1. בכל סעיף צרו בעזרת הרצועות מרובע המקיים את התנאים הרשומים.

השלימו את המשפט למשפט נכון, ונמקו בעזרת משפטים שהוכחתם

בשיעורים קודמים.

א. מרובע שאלכסוניו **חוצים** זה את זה הוא...

ב. מרובע שאלכסוניו **חוצים** זה את זה **ושווים** זה לזה הוא...

ג. מרובע שאלכסוניו **חוצים** זה את זה **ומאונכים** זה לזה הוא...

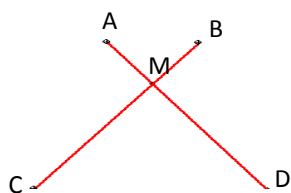
ד. מרובע שאלכסוניו **חוצים** זה את זה, **מאונכים** **ושווים** זה לזה הוא...

2. בכל סעיף היעזרו ברצועות וצרו "קְתִמְרוּבֶּעַ" המקיים את התנאים. שרטטו את המרובע.

- א. מרובע שאלכסוניו **מאונכים** זה לזה.
- ב. מרובע שאלכסוניו **שווים** זה לזה.
- ג. מרובע שאלכסוניו **מאונכים ושווים** זה לזה.
- ד. מרובע שאחד מאלכסוניו **חוצה את השני**.
- ה. מרובע שאחד מאלכסוניו **חוצה את השני** והאלכסונים **שווים** זה לזה.



3. א. איזה מרובע יתקבל אם אחד מאלכסוניו **חוצה את השני** והאלכסונים **מאונכים** זה לזה?
- ב. הוכיחו את המסקנה שרשמתם בסעיף א.



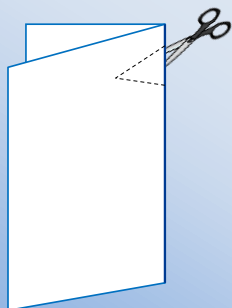
- נחזור לרגליים של קרש הגיהוץ.
- א. איזה מרובע יִצָּר אם נחבר את קצות הרגליים של קרש גיהוץ?

- ב. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח כדי לאשר את הטענה שרשמתם בסעיף א, והוכיחו אותה.

שיעור 4: סימטריה במרובעים

קפלו דף לאורכו.

גזרו חלונות בקו הקיפול כך שעם פתיחת הקיפול יתקבל המרובע המבוקש. אם אי אפשר לקבל את המרובע, ציינו זאת.



• דלתון שאינו מעוין.

• מלבן שאינו ריבוע.

• מעוין שאינו ריבוע.

• טרפז שווה שוקיים.

• מקבילית שאינה מעוין או מלבן.

• ריבוע.

1. בכל סעיף שרטטו את המרובע ואת צירי הסימטריה שלו.

ציינו כמה צירי סימטריה לכל אחד מהמרובעים.

א. מלבן.

ב. מעוין.

ג. ריבוע.

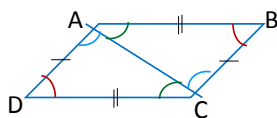
ד. טרפז שווה שוקיים.

ה. דלתון.



- א. **רותי אמרה:** כדי להוכיח שיש לצורה ציר סימטריה לא מספיק להוכיח ששתי הצורות משני צידי הציר חופפות.
 צרו דוגמה המראה כי רותי צודקת.
- כדי להוכיח שיש ציר סימטריה של מצולע יש להוכיח שאם נקפל את המצולע לאורך הישר הזה, הצלעות המתאימות והזוויות המתאימות משני צידי הישר **יתלכדו**.
- ב. **נעמה אמרה:** לכל הדלתונים יש ציר סימטריה. האם נעמה צודקת?
- ג. אלו מרובעים הם בעלי ציר סימטריה ואינם דלתונים?

5. ABCD מקבילית.



הסבירו, מדוע למרות הצלעות השוות והזוויות השוות משני צידי האלכסון, AC אינו ציר סימטריה של המקבילית.

עקרונות גיאומטריים

- ❖ הגיאומטריה בנויה נדבך על נדבך, כל משפט מבוסס על הנתונים ועל משפטים קודמים
- ❖ הדגשת תפקיד ההוכחה כמשכנעת בנכונות וכמסבירה מדוע משפט נכון
- ❖ לומדים להבחין בין תכונה של צורה לתנאי מספיק לקבלת הצורה
- ❖ משפט הפוך למשפט נכון אינו בהכרח משפט נכון
- ❖ משפט נכון רק אם הוא נכון תמיד וכל דוגמה נגדית פוסלת את המשפט
- ❖ הגדרה של צורה כוללת למעשה את התכונה ותנאי מספיק לקבלת הצורה

עקרונות דידקטיים

- ✓ סיטואציות מתמטיות ואחרות
- ✓ קשר עם הסביבה
- ✓ משימות הוכחה אבל לא רק
- ✓ התנסויות
- ✓ התלמידים שותפים לשרטוט המייצג את הבעיה
- ✓ שימוש בדוגמאות
- ✓ שימוש באביזרים
- ✓ שימוש בדינאמיות במחשב וללא מחשב

ובמסלול הירוק:

התלמידים מזהים נתונים ומסקנות, מסבירים, מזהים את המשפטים עליהם מבוססות המסקנות, משרטטים, ומבצעים חישובים בהתבסס על המשפטים, בודקים נכונות של טענות.

כתחליף להוכחות הפורמאליות, משתמשים בדוגמאות, בהתנסויות בשרטוטים, בחישובים ובהסברים אינדוקטיביים.

ומבחינת התכנים:

יחידה 12: כל המרובעים

שיעור 1. חוצי זוויות במלבן

קפלו דף מלבני כך שקו הקיפול חוצה את אחת מזוויות המלבן. אילו צורות קיבלתם?



נלמד על חוצי זווית במלבן.

שיעור על חוצי זוויות במלבן, ורק אחר כך שיעור על חוצי זוויות במקבילית.
מבוסס על התנסות (קיפולים) שרטוטים חישובים ומעט הסברים.

שיעור 3. מהאלכסונים אל המרובעים



מחברים את קצות הרגליים של קרש גיהוץ. איזה מרובע נוצר?
בדקו את קרש הגיהוץ בביתכם.
היכן נמצאת נקודת החיבור של הרגליים:
מעל נקודת האמצע של הרגליים? מתחת? בדיוק בנקודת האמצע?
נלמד להשתמש בתכונות אלכסונים לזיהוי מרובעים.

אין דגש על ההבחנה בין תכונת האלכסונים במרובע ותנאים
מספיקים לקבלת המרובע על פי האלכסונים.
ושוב חישובים, שרטוטים, ותרגול התכונות.

שיעור 4 הוא על סימטריה

שיעור 5. שטחים של מרובעים



בשרטוט מקבילית ומלבן בין שני קווים מקבילים.

בחרו את הטענה הנכונה:

- שטח המלבן גדול משטח המקבילית
- שטח המלבן שווה לשטח המקבילית
- שטח המקבילית גדול משטח המלבן

נעסוק בשטחים של מרובעים.

