

על מתמטיקה וחיוכים

מתמטיקה וחיוכים – אופי הפעילות

הפעילות המוצעת היא פעילות תחרותית סביב חידות מתמטיות הקשורות במספרים, בתבניות, בייצוגים גרפיים ובהנדסה. מבנה הפעילות מכתוב בעיות מתמטיות שלפיתרון שלהן נדרש זמן לחשיבה ועבודת צוות. מבנה כזה מתאים להפעלה בקבוצות הטרוגניות של כארבעה תלמידים. אף שהפעילות היא תחרות בין קבוצות, אין מושם דגש על האופי התחרותי של הפעילות.

לכל פעילות בוחרים כ-5-6 משימות. המשימות אינן מדורגות ומוצגות בתמציתיות. כל משימה מובאת בקיצור רב על כרטיס המיועד להצגה בפני הכיתה. בחוברת מצורף נוסח מפורט יותר שישמש למורה לאמירה בקול. פתרון המשימה אף הוא קצר והוא מיוצג בעזרת מספר יחיד, שרטוט או סימן סדר וכדומה.

ההפעלה מיועדת לערבי חג, סיום עונה, סוף שנה, יום מתמטיקה ועוד. במהלך ההפעלה אפשר לחזור על נושאים שונים, בעיקר נושאים הקשורים לחשיבה כמותית ואלגברית.

איך מפעילים?

מסדרים את הכיתה בקבוצות הטרוגניות של ארבעה תלמידים. רצוי לסדר את הקבוצות בחצי גורן על מנת שכולם יראו וייראו. לכל משימה כל קבוצה מקבלת טוש עבה ודף גדול לכתובת התשובה. מציגים לכיתה את המשימה על כרטיס הברקה גדול ומפרטים בעל-פה את המטלה.

בכל קבוצה מנסים לפתור את המשימה. אם חברי הקבוצה מגיעים לתשובה המוסכמת על כולם, הם רושמים אותה בגדול על דף. לאחר שרוב הקבוצות או כולן ענו (כחמש עד עשר דקות), מודיעים כי מפסיקים את הפעילות לספירת שלוש ומרימים את התשובה. סופרים לאט כדי לאפשר למי שעדיין לא רשם להשלים את רישום התשובה בגדול על הדף. בסיום הספירה כל קבוצה מציגה את התשובה. אם כל הקבוצות ענו ואין שגיאות, מחלקים לכל קבוצה שלושה חייכנים (מדבקות עם פרצוף מחייך). אם חלק מהקבוצות שגו או ענו חלקית, מחלקים למשיבים נכון שלושה חייכנים ולתשובה חלקית נותנים חייכן אחד לעידוד. דנים בתשובות השונות. בחלק מהמקרים, כאשר הנימוק או תיאור הדרך למציאת התשובה הם בעלי חשיבות, מבקשים נימוקים או תיאורים מתאימים ודנים בהם.

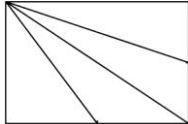
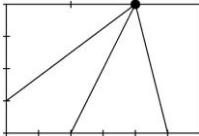
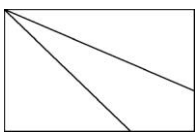
חומרים לפעילות

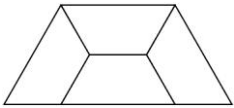
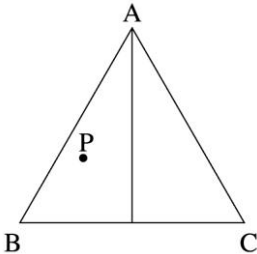
לקבוצות: דפים גדולים לכל קבוצה. טושים עבים לכתובת הפתרונות.
למורה: כרטיסי הברקה עם המשימות המצורפות בתקליטור. חייכנים (מדבקות עם סמיילי) לעונים תשובות נכונות. כדי לאפשר חלוקה נוחה, גוזרים את המדבקות כך שעל כל חלק יש שלושה חייכנים, ומשאירים מספר קטן של חייכנים בודדים לשימוש, לפי הצורך.

משימות מפורטות למתמטיקה וחיוכים

לצד כל משימה רשום הפתרון. כרטיסים להפעלה בכיתה נמצאים בתקליטור המצורף לחוברת. כדי לייעל את ההפעלה בכיתה, רצוי לרשום בגב כל כרטיס את נוסח השאלה במלואה ואת התשובה. בהמשך מובאות הערות והצעות לדיון בעקבות המשימות.

פתרון	משימה
87 · 96	1. השלימו בעזרת הספרות 6, 7, 8, 9 את התרגיל כך שתתקבל תוצאה גדולה ביותר. $\begin{array}{r} ______ \\ \times \\ \hline \end{array}$
876 · 9	2. השלימו בעזרת הספרות 6, 7, 8, 9 את התרגיל כך שתתקבל תוצאה גדולה ביותר. $\begin{array}{r} ______ \\ \times \\ \hline \end{array}$
872 · 94	3. מהי המכפלה הגדולה ביותר אם משתמשים בכל אחת מהספרות 2, 4, 7, 8, 9 פעם אחת בדיוק? = $______ \cdot ______$
יש שלושה מספרים : 270, 276, 372	4. אני מספר תלת-ספרתי. שתיים מהספרות שלי הן : 2, 7. אני מתחלק ב-6 וקטן מ-500. מי אני? מצאו את כל המספרים המתאימים.
8664	5. השלימו אותי למספר ארבע ספרתי 4__ __. אני מתחלק ב-3 וב-4. ספרת העשרות שלי היא ממוצע שאר הספרות. מי אני?
46 פעמים	6. כמה פעמים מופיעה הספרה 5 במספרים שמספרים דפים בספר בן 250 עמודים?
הספרה 3 מופיעה 55 פעמים.	7. איזו מהספרות 0, 3, 7 מופיעה יותר פעמים במספור הדפים בספר בן 250 עמודים? כמה פעמים היא מופיעה?
6 אפסים	8. בכמה אפסים מסתיימת המכפלה? $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 27$

משימה	פתרון																								
20. על כל לבנה בפירמידה רשום מספר השווה לסכום המספרים הרשומים על הלבנים שעליהם היא מונחת. חלק מהמספרים נמחקו. מה סכום כל המספרים שבפירמידה (כולל אלו שנמחקו)? הערה: מחלקים לכל קבוצה דף שבו פירמידות ריקות לניסוי. ראו דף עזר בסוף החוברת.	202, כי יתר המספרים הם זוגות של מספרים גדיים.																								
21. צבעו בשלושה צבעים שונים את צלעות תשעת הריבועים. הצביעה צריכה לאפשר הרכבה של ריבוע גדול מתשעת הריבועים. היקף הריבוע הגדול יהיה צבוע בכל פעם באחד הצבעים, עבור כל אחד משלושת הצבעים. הערה: מחלקים לכל קבוצה 9 כרטיסים ריבועיים.	פתרון אפשרי: <table><tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>1 2 3</td><td>2 3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>3 2</td><td>2 3 2</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr><tr><td>1 3 1</td><td>3 3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table> כל מספר מסמן אחד הצבעים.	1	3	3	1 2 3	2 3	2	2	1	1	1	3 2	2 3 2	3	3	1	1	2	2	1 3 1	3 3	2	2	1	1
1	3	3																							
1 2 3	2 3	2																							
2	1	1																							
1	3 2	2 3 2																							
3	3	1																							
1	2	2																							
1 3 1	3 3	2																							
2	1	1																							
22. חלקו מלבן לארבעה חלקים שווי שטח, אך לא חופפים, על-ידי קטעים היוצאים מנקודה אחת שעל היקף המלבן. מצאו שתי דרכים שונות. הערה: מחלקים לקבוצות דפי נייר למציאת הפתרון באמצעות קיפול או שרטוט ישרים מתאימים.	להלן שני פתרונות אפשריים: ■ יוצאים מקודקוד אחד לקודקוד ממול ולאמצעי הצלעות ממול.  ■ מחלקים את אחת הצלעות לשלושה חלקים שווים ויוצאים מאחת מנקודות החלוקה.  את הצלע ממול מחלקים לשישה חלקים שווים ואת הצלע לידה לארבעה חלקים שווים.																								
23. חלקו מלבן לשלושה חלקים שווי שטח על-ידי שני קטעים ישרים היוצאים מקודקוד אחד.																									

פתרון	משימה
	24. בנו טרפז דומה לטרפז הנתון, שיהיה מורכב מ- 4 טרפזים כאלה. הערה: מחלקים לכל קבוצה טרפזים שוי שוקיים שבהם הבסיס העליון שווה לשוק ולמחצית הבסיס התחתון. צורות אלו אפשר למצוא בצורות הפלא של פלדע או להכין מבריסטול.
א. שווה לגובה המשולש	25. בתוך משולש שווה צלעות מסומנת נקודה P. סכום המרחקים שלה מהצלעות: א. שווה לגובה המשולש. ב. קטן מגובה המשולש. ג. גדול מגובה המשולש. ד. אי-אפשר לדעת. בדקו והסבירו. 

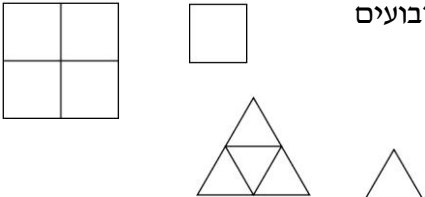
הערות והצעות לדין בעקבות משימות

המשימות עוסקות בנושאים שונים. לעתים הובאו מספר משימות דומות. במקרה כזה הן מדורגות, ויש לבחור במשימה שנראית לכם מתאימה לכיתה.

משימות 12-1	דורשות ידע בסיסי בחשבון וחוש למספרים.
משימות 3-1	עוסקות במכפלות של שלמים חיוביים ומתבססות על הבנת המבנה העשורי וחוק הפילוג המורחב. כלומר, "תרומת" כל ספרה תלויה במקומה במספר. המקום ש"תרומתו" גבוהה ביותר הוא הראשון משמאל. ככל ש"תרומת" הספרה גבוהה יותר, רצוי לכפול אותה בספרות ש"תרומתן" גבוהה יותר. אפשר ליצור משימות דומות על-ידי שינוי הספרות.
משימות 4 ו-5	עוסקות בזיהוי מספר על פי תכונות. אפשר לחבר חידות רבות דומות. משימות אלו ומשימות 8-10 קשורות גם לסימני התחלקות.
משימות 6 ו-7	עוסקות במבנה העשורי ודורשות יכולת ארגון.
משימות 8-10	במשימות אלו עוסקים במשמעות האפסים בסוף מספר ובבדיקת הגורמים המראים על כפל ב-10.
משימות 11 ו-12	למשימות אלו דרוש ידע בשברים פשוטים. למשימה 11 צריך לדעת במה לכפול שבר לקבלת שלם. במשימה 12 מסתמכים על כך שבשברי היחידה (שברים שהמונה שלהם 1) ככל שהמכנה גדול יותר השבר קטן יותר.
דוגמאות לשיקולי דעת שכדאי להעלות בדיון לאחר המשימה:	
משימה 6	בחיפוש אחר מספר הפעמים שהספרה 5 מופיעה – חשוב הארגון. אחת הדרכים היא לבדוק בכל מאה מה קורה. למעשה בכל 100 מ-2 המאות הראשונות הספרה 5 תופיע אותו מספר פעמים. נשאל: כמה פעמים תופיע הספרה 5 כספרת יחידות? כספרת עשרות? התלמידים מגיעים בקלות להבנה שהספרה תופיע 10 פעמים כספרת יחידות (פעם בכל עשרת) ועשר פעמים בעשרות (החל מ-50 ועד 59). טעות נפוצה של תלמידים היא להוריד פעם אחת ולטעון שיחד מופיעה הספרה 19 פעמים, כיוון שאת 55 ספרנו פעמיים. צריך לספור את 55 פעמיים כי הספרה 5 מופיעה במספר פעמיים. לא שאלנו בכמה מספרים מופיעה הספרה 5, אלא כמה פעמים היא מופיעה, ולכן הספרה 5 מופיעה 20 פעם בכל מאה. מ-200-250 ביחידות הספרה 5 נמצאת 5 פעמים ביחידות ורק פעם אחת בעשרות בעמוד 250. סה"כ 26 פעמים.
משימה 8	הגורם 2 מופיע יותר מ-6 פעמים. הגורם 5 מופיע פעם אחת במספרים 5, 10, 15 ו-20 ופעמיים במספר 25.

משימה 9	נקודת המוצא היא השאלה: איך נוצרים אפסים במכפלה? תשובה אפשרית: כפל בחזקה של 10, ובמקרה שלנו כפל ב-1000. המכפלה $997 \cdot 998 \cdot 999 \cdot 1000$ מסתיימת בשלושה אפסים, אך אינה הקטנה ביותר. כדי למצוא את המכפלה הקטנה ביותר נבחן מהם הגורמים של 1000, נקבל $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. בכל רביעייה של מספרים עוקבים יש לפחות מספר אחד המתחלק ב-4 (ב-2^2) ומספר נוסף המתחלק ב-2. למה? מכאן, המכפלה של ארבעה עוקבים תתחלק תמיד ב-2^3. לכן די לנו לבדוק שבמכפלה יימצא גם הגורם $5^3 = 125$. הסדרה הקטנה ביותר של עוקבים היא $122 \cdot 123 \cdot 124 \cdot 125$. אין מכפלה קטנה יותר, כי בכל ארבעה מספרים עוקבים יש רק אחד המתחלק ב-5.
משימות 13-20	משימות שבהן כדאי להפעיל שימוש בכלים אלגבריים, או שמשולבים בהן ייצוגים אלגבריים בניסוח שלהם.
משימות 13-14	עוסקות בסדרות פיבונצ'י. סדרות אלו הן סדרות שבהן כל מספר הוא סכום שני המספרים הקודמים לו. מקובל לייחס את השם סדרת פיבונצ'י בעיקר לסדרה כזו המתחילה במספרים 1, 1, אך השם נמצא בשימוש גם לכל סדרה המקיימת קשר זה. אפשר למצוא את המספרים החסרים גם ללא שימוש באלגברה על-ידי ניחוש ובדיקה. קל למצוא אותם בעזרת סימון אחד מהמקומות הריקים על-ידי אות ובניית תבניות מספר לאחרים.
משימה 15	משימה זו מוצגת בצורה אלגברית, אך שיקולי הדעת הדרושים עבורה זהים לאלו שבשאלה 12 הנתונה במספרים.
משימות 16-18	במשימות אלו נתונות משוואות, אך השיקולים לפתרון ייעשו בדרך כלל בעזרת שיקולי דעת.
משימות 19-20	במשימות אלו לא משולב ייצוג אלגברי בשאלה. כמו כן אפשר לפתור אותן ללא שימוש באלגברה, אולם שימוש מושכל בכלים אלגבריים עשוי לחסוך זמן. חשוב להתייחס הן לפתרון בדרך מספרית והן לפתרון אלגברי.
דוגמאות לשיקולי דעת שכדאי להעלות בדיון אחר המשימה	
משימה 14	אם חלק מהתלמידים פתרו אלגברית ואחרים – בדרך חשבונית, כדאי להציג את הדרכים השונות בפני כולם. פתרון מספרי ייעשה בדרך כלל על-ידי ניחוש מושכל. בשלב ראשון אם המספר השישי הוא 0, שני המספרים שלפניו נגדיים. בחרים שני מספרים, לדוגמה, 10 ו-10 – בודקים מה קורה בנסיגה לאחור. האם נגיע ל-15? מתקנים עד שמגיעים ל-5 ו-5 ומכאן המספר הראשון -25. דרך אחרת – מנחשים מספר ראשון, נניח 10. מספר זה לא מתאים כי כל המספרים חיוביים, ולכן לא נגיע לאפס. בחרים מספר שלילי קטן מ-15 (כדי שיופיע בהמשך שוב מספר שלילי). מקטינים או מגדילים לפי הצורך. הדרכים

האלגבריות גם הן יוצאות משתי גישות אלו. אפשר לייצג ב- x את המספר הראשון ולהשלים על-ידי תבניות את שלושת המקומות בין 15 ל- d. בונים בעזרת תבניות המספר במקומות הרביעי והחמישי תבנית פסוק כמו $x + 30 + 2x + 45 = 0$ או $-(2x + 45) = x + 30$ ומוצאים ש- x הוא -25. אפשרות אחרת לסמן את המקום הרביעי והחמישי ב- x ו- $-x$, ומכאן בנסיגה מקבלים $-x = 15 + 2x$, מכאן $x = 5$; נציב 5 בתבניות השונות – נקבל את המקום הראשון.	
משימה 15 חשוב לשים לב שבשלושת השברים $\frac{a}{b}$, $\frac{a-2}{b-2}$, $\frac{a+2}{b+2}$ (אחרי צמצום נקבל $\frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$) ההפרש בין המכנה למונה הוא $b - a$, לכן החלק החסר לשלם הוא $\frac{b-a}{b-2}$, $\frac{b-a}{b+2}$, $\frac{b-a}{b}$. ככל שהמכנה גדול יותר החלק החסר לשבר קטן יותר, כלומר השבר עצמו גדול יותר.	
משימה 19 למשימה זו אפשר לגשת בדרך חשבונית ובדרך אלגברית. הדרך החשבונית מתבססת על העובדה שאת המספר האחד כופלים ב- 4 ואת המספר השני מחלקים ב- 4, ומתקבלת אותה תוצאה. כלומר, בין שני המספרים הראשונים האחד גדול פי 16 מהשני $(a = 16b \Leftrightarrow 4a = b : 4)$. נרשום את כל כפולות ה- 16 האפשריות: 16, 32, 48, 64, 80, 96. אפשר לבדוק כל מספר, אפשר לשער מראש שמספר קטן מאוד / גדול מאוד אינם מתאימים. ייתכנו כמובן שיקולי דעת אחרים שבעזרתם יגיעו לפתרון. כדאי להתייחס לדרכים שעלו על-ידי תלמידים. בדרך האלגברית – ישנן שתי גישות שונות במהותן. האחת – לסמן ארבע אותיות, ליצור משוואות ולמצוא קשרים. השנייה – לבחור ב- x את התוצאה השווה אחרי הפעולות, להפעיל פעולה הפוכה ולהשוות ל- 100: $100 = x + 4 + x - 4 + x \cdot 4 + x : 4$ בשל המגוון הרב של דרכי פתרון אפשריות רצוי להתרכז בהצעות שעלו בקבוצות.	
משימה 20 תלמידים שיתנסו בהשלמת פירמידה שבה שני מספרים שווים (101), יגלו ששאר המספרים יוצרים זוגות של מספרים נגדיים. מכאן סכום המספרים על הלבנים המחוקות הוא אפס. לדוגמה, אם בשורה השנייה נרשום בלבנה מימין 100 ומשמאל 1 נקבל בשורה הראשונה מימין 1 – (100–101) ומשמאל 100. כדאי לבקש הצדקה אלגברית כגון: נסמן ב- a את המספר החסר על הלבנה השמאלית בשורה השנייה. מקבלים בלבנה מימין $101 - a$ (כי $101 - a = a + 101$). בשורה הראשונה נקבל מימין $-a$ ומשמאל $a - 101$. קיבלנו שני זוגות של מספרים נגדיים a ו- $-a$; $101 - a$ ו- $a - 101$.	

משימות 21-25	עוסקות בהנדסה.
משימה 21	משימה זו דורשת התנסות, צביעה של ריבועים גזורים, אך גם שיקולי דעת. לאחר ניסיון או שניים שנכשלו, עוברים בדרך כלל לחיפוש תנאים לקיום.
משימות 22-23	כדאי לבצע משימות אלו בעזרת קיפולי נייר. דף נייר ייצג מלבן, קווים ישרים יוחלפו בקיפול. בדיון נראה דרכים לחישוב השטחים או להשוואת שטחים ללא חישוב.
משימה 24	משימה זו עוסקת בצורה ה"בונה את עצמה". אפשר להקדים למשימה הדגמה של צורות כמו ריבועים או משולשים ולציין שגם טרפז מיוחד זה הוא "צורה הבונה את עצמה" ולבקש לחפש דרך. 
משימה 25	משימה הדורשת יכולת של בניית עזר בהוכחות מתמטיות.
דוגמאות לשיקולי דעת שכדאי להעלות בדיון לאחר המשימה	
משימה 21	אפשר להעלות לדיון צורות צביעה לא יעילות. לדוגמה, אורי צבע בריבוע שתי צלעות נגדיות. האם אורי יצליח לצבוע את כל הריבועים כך שיוכל לעמוד במשימה? האם זו דרך צביעה יעילה? בדיון עומדים על כך, שאם שתי צלעות מקבילות צבועות באותו צבע, וודאי שלא נוכל ליצור ריבוע גדול שמוקף בצבע זה. למה? אם הצלעות הנגדיות אינן באותו צבע, לא נוכל ליצור ריבוע, כי נשארו שתי צלעות מקבילות לצביעה בצבע השלישי. בהמשך נשוחח על דרכי צביעה יעילות. נראה שהתנאי ההכרחי לאפשרות הצביעה מתקיים. מצד אחד, יש תשעה ריבועים, ולכן סכום כל הצלעות הוא 9·4. מצד שני, בריבוע הגדול אורך כל צלע הוא 3 צלעות קטנות, ולכן היקפו 4·3 צלעות של ריבוע קטן. בכל פעם צובעים בצבע שונה; סך הכול 3 צבעים, כלומר 3·12. בשני המקרים מספר הצלעות 3·3·4, ולכן אפשר לבצע את הצביעה אם נקפיד לעשות אותה נכון.
משימה 22	נשאל, מה יהיה הקיפול הראשון? סביר להניח שכולם יסכימו לקיפול לאורך האלכסון, שמחלק את המלבן לשני משולשים חופפים. גם הקיפולים הבאים אינטואיטיביים לתלמידים, ולכן יש לשער כי תלמידים רבים יציעו לקפל מהקודקוד אל אמצע צלעות המשולשים. כך נקבל בכל חלק שני משולשים שבהם צלע בגודל זהה וגובה משותף שהוא צלע המלבן.

בחלוקה של המלבן ל- 4 חלקים דרך נקודה על הצלע, הקטע שבין שני הקיפולים האחרים מחלק את הדף לשני חלקים חופפים (שני טרפזים ישרי זווית השווים בכל צלעותיהם). בחלוקה נוספת נבנה בכל טרפו משולש ששטחו $\frac{1}{4}$ מלבן. שטח המשולש משמאל: $(\frac{3}{6}a \cdot b) : 2 = \frac{1}{4}ab$ ושטחו מימין: $(\frac{2}{3}a \cdot \frac{3}{4}b) : 2 = \frac{1}{4}ab$. לכן כל השטחים שווים.	משימה 23
כדאי לשאול אחרי מתן התשובה, מה יהיה המספר הבא של טרפזים הדרושים לבניית טרפז דומה. נפנה את תשומת לב התלמידים לכך, שכאשר הצלע גדלה פי מספר, השטח גדל פי ריבוע המספר.	משימה 24
הדיון צריך להתבסס על דרכי עבודה של התלמידים. להתמודדות עם בעיה זו דרוש עיסוק משמעותי בפרק המשולש בגיאומטריה. אחת הדרכים להתמודדות היא היכולת לפרק את המשולש למשולשים קטנים שבהם המרחקים מהצלעות הם הגבהים. לשם כך נחבר את P לקודקודי המשולש. שטח המשולש כולו $\frac{ah}{2}$ [צלע המשולש שווה הצלעות ו- $h =$ גובה]. נסמן ב- h_1, h_2, h_3 את מרחקי הנקודה P. סכום שטחי המשולשים הקטנים שווה לשטח המשולש כולו ולכן אחרי כפל ב- 2 נקבל: $ah_1 + ah_2 + ah_3 = ah$. נחלק ב- a (מותר כי $a \neq 0$) נקבל: $h_1 + h_2 + h_3 = h$. גישה אחרת – היא הסתכלות ישירה על הגבהים ללא תיווך של השטח. נתייחס למקום שבו נמצאת P. נבחין בשלושה מקרים: א. P על אחד הקודקודים. המרחק של P משתי צלעות הוא אפס והמרחק מהצלע השלישית מתלכד עם הגובה, ולכן השוויון מתקיים. ב. P על צלע אך לא על קודקוד. רק אחד המרחקים הוא 0. נשארו שני אנכים. נעביר דרך P מקביל לצלע במשולש. במשולש הקטן המרחק של P מהצלע וגובה המשולש הקטן מתלכדים, כי שניהם גבהים במשולש שווה צלעות. בטרפז מתקבלים שני אנכים בין מקבילים ולכן הקטעים שווים באורכם. P בתוך המשולש. נעביר מקביל לאחת הצלעות ונחזור על-ידי כך למצב בסעיף ב עבור המשולש הקטן.	משימה 25