

גיאומטריה – על הוכחות ושרשרות של משפטים (כיתה ח' מחצית שנייה)

יחידות 30, 31, ו- 34

המטרות:

- ❖ להכיר את משמעות המושגים: משפט והוכחה.
- ❖ להיחשף חשיפה ראשונית למבנה הדדוקטיבי של הגיאומטריה, כשרשרת של משפטים הנובעים בדרך הגיונית ממשפטים קודמים.
- ❖ להיחשף ללגיטימיות של דרכים שונות להצדקה והוכחת טענות.
- ❖ להכיר בצורך להוכיח משפטים, כדרך לאשר את נכונותם.
- ❖ ללמוד לרשום הוכחות פשוטות.
- ❖ לזהות אם נתונים מספיקים להסקת המסקנה ואז להוכיח, או שאינם מספיקים ואז להביא דוגמאות נגדיות.

יחידה 30: על משפטים והוכחות

שיעור 1. מהו משפט במתמטיקה?

בשיעור הראשון עוסקים בשאלה מהו משפט במתמטיקה, בזיהוי התנאי (הנתונים) והמסקנה במשפט, בניסוח המבהיר מהם הנתונים ומה המסקנה, ובשאלה האם המסקנה נובעת מהנתונים, או לא.



במהלך לימוד גיאומטריה ניסחנו משפטים (משפטי חפיפה, משפט דמיון, ועוד).
בשיעור זה נדון מהו משפט במתמטיקה, ונבחין בין משפט במתמטיקה ומשפט בשפה המדוברת.
האם אפשר לשאול לגבי הביטויים הבאים "נכון" או "לא נכון"?
א. אם יורד שלג, הטמפרטורה נמוכה מ- 2 מעלות.
ב. מה הסכום של 24 ו- 76?

- 1. בכל סעיף, קבעו אם הביטוי הוא טענה שאפשר לשאול לגביה אם היא "נכונה" או "אינה נכונה".
א. אם יורד גשם יש עננים בשמים.
ב. מה סכום הזוויות במרובע?
ג. במחומש יש 5 אלכסונים.
ד. מתמטיקה משולבת כיתה ח חלק ב.
ה. במשולש כל הזוויות שוות זו לזו.
ו. משולש ישר זווית ושווה שוקיים.



משפט במתמטיקה בנוי מ**נתונים ומסקנה**, לכן אפשר לשאול לגביו: "נכון" או "לא נכון".
כלומר, אפשר לקבוע אם המסקנה נובעת מהנתונים או לא.
כל משפט במתמטיקה אפשר לנסח באמצעות "אם" ו"אז" המפרידים בין הנתונים למסקנה.
דוגמה: אם יורד שלג אז הטמפרטורה נמוכה מ- 2 מעלות.

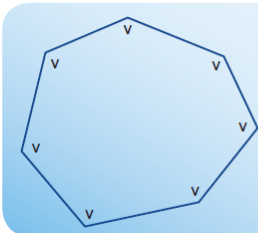
- 2. נסחו בעזרת "אם" ו"אז" את המשפטים ממשימה 1, המתאימים להגדרה של משפט במתמטיקה.
5. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים. אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה המראה שהמשפט אינו נכון.
א. אם מחלקים זווית חדה לשתי זוויות שוות, אז כל אחת מהן קטנה מ- 45°.
ב. אם שתי זוויות במשולש חדות, אז הזווית השלישית קהה.

שיעור 2: זוויות פנימיות במצולע

הנושא הגיאומטרי בשיעור זה הוא סכום הזוויות הפנימיות במצולע.
לבחירה בנושא זה שתי מטרות:

א. להביא דוגמה פשוטה של בעיה בה ניתן לבצע עם התלמידים דרכים שונות להגיע למסקנה ולהוכיח אותה. (המשפט הגיאומטרי היחידי בו משתמשים הוא סכום הזוויות במשולש אותו למדו בעבר.)

ב. לאפשר, בשיעור הבא, יצירת סיטואציה בה ייווצר צורך להסביר תוצאה מפתיעה באמצעות משפטים בגיאומטריה – מקרה של צורך להוכיח.

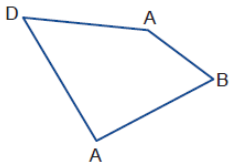


בשרטוט מצולע בעל שבע צלעות.
האם אפשר למצוא ללא מדידה את סכום הזוויות הפנימיות, המסומנות ב- v בשרטוט?
נבדוק מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולעים שונים, שמספר צלעותיהם הולך וגדל.

הוכחתם בעבר שסכום הזוויות במשולש הוא 180° .

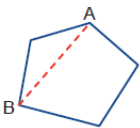
1. מהו סכום הזוויות במרובע?

שרטטו אלכסון והסבירו על סמך סכום הזוויות במשולש.

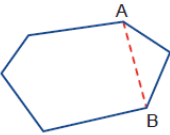


2. מהו סכום הזוויות במחומש?

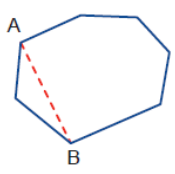
א. יורם טען: מצאתי שסכום הזוויות במחומש גדול ב- 180° מסכום הזוויות במרובע.
הסבירו את טענתו בעזרת השרטוט. מה סכום הזוויות במחומש?



ב. מהו סכום הזוויות במשושה?



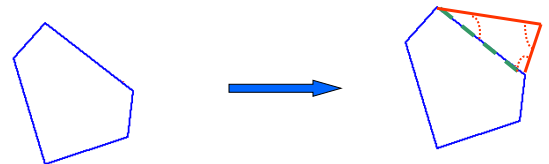
ג. מהו סכום הזוויות במצולע בעל שבע צלעות?



לאיזו הכלללה מובילים תרגילים 1 ו-2?

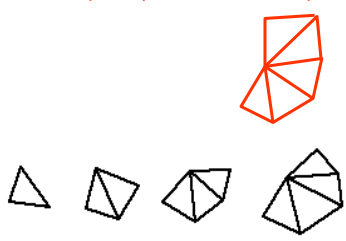
הסברים של תלמידים למסקנה

1. כשמוסיפים צלע כאילו מחלקים את אחת הצלעות, (מקווקו בירוק) ואז נוסף משולש (אדום). ונוספות 3 הזוויות שלו.



לכן, הסכום גדל ב- 180° .

2. מתחילים במשולש (180°) עוברים למרובע (360°), למחומש (540°) וכו':



3. ויש תלמידים שהסבירו רק באמצעות שרטוטים:

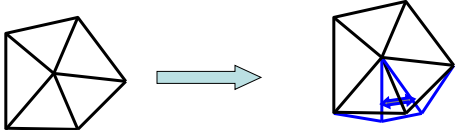
(א)

$$\triangle + \triangle = \text{פזעון}$$
$$\triangle + \text{פזעון} = \triangle + \triangle + \triangle = \text{ששזון}$$

(ב)



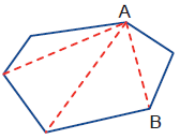
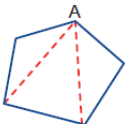
(ג)



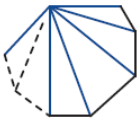
אזכר אחת משאלות
הפזעון:

3. א. יעל אמרה: אני מצאתי את סכום הזוויות במצולעים השונים בדרך אחרת.
העברתי את שני האלכסונים מהקודקוד A ומצאתי שהסכום הוא 540° .
הסבירו את טענתה.

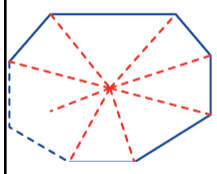
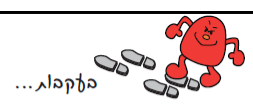
ב. הסבירו בעזרת השרטוט מדוע סכום הזוויות במשושה הוא 720° .



ג. בדקו מה יהיה סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות.
הסבירו מדוע מספר המשולשים הנוצרים הוא: $2 - n$.
מה סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות?



ד. יורם אמר: סכום הזוויות במחומש גדול ב- 180° מסכום הזוויות במרובע.
הסבירו בעזרת הביטוי שקיבלתם בסעיף ג את המסקנה של יורם.



4. א. יונית אמרה: אני מצאתי נוסחה שונה: סימנתי נקודה בתוך המצולע וחברתי אותה עם הקודקודים. הנוסחה שלי היא:
 $360^\circ - n \cdot 180^\circ$
הסבירו כיצד מצאה יונית את הנוסחה.
ב. הביטוי של יונית שווה ערך לביטוי $(n - 2) \cdot 180^\circ$ שהתקבל במשימה 3. הסבירו.

הבאנו כאן שלוש דרכים שונות להגיע למסקנה בדבר סכום הזוויות הפנימיות במצולע.

אפשר לחלק את הכיתה לשלוש קבוצות לבקש מקבוצה אחת לפתור את משימות 1 ו-2, מקבוצה שנייה את משימה 3 ומקבוצה שלישית את משימה 4. אחר כך לבקש מתלמידים בכל קבוצה להציג את הדרך שלהם. חשוב גם להראות שהמסקנות שקולות: סעיף ד במשימה 3, וסעיף ב במשימה 4.

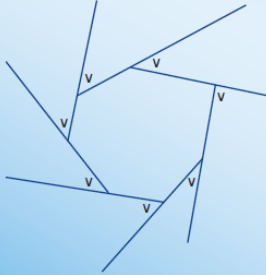
היכן יש בסביבה מצולעים? להלן דוגמה



כדאי לשלוח את התלמידים לחפש מצולעים בסביבה וגם לבדוק אם הם משוכללים. יש למשל בתמרורים, בדגלים וכו'.

שיעור 3: בשביל מה צריך הוכחות?

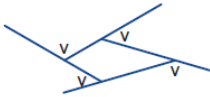
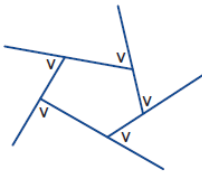
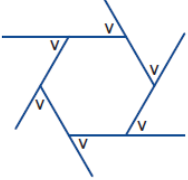
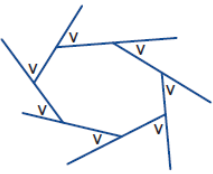
הנושא הגיאומטרי בשיעור זה הוא סכום הזוויות החיצוניות במצולע (קמור).



במצולע שבשרטוט 7 צלעות.
האם אפשר למצוא ללא מדידה, את סכום הזוויות המסומנות ב- $\checkmark$ שבשרטוט?
נבדוק מהו סכום הזוויות החיצוניות במוצלים שונים.

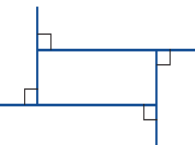
כהכנה מגדירים מהי זווית חיצונית, מזהים זוויות חיצוניות ומזכירים מהו מצולע קמור.

לפניכם שרטוטים של מצולעים קמורים שזוויותיהם החיצוניות מסומנות ב- $\checkmark$.

מרבוע	מחומש	משושה	מצולע בעל 7 צלעות
			

שערו כיצד משתנה סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור (אחת ליד כל קודקוד) כשמספר הצלעות של המצולע גדל ב- 1.

מהי לדעתכם, ההשערה הנפוצה של התלמידים?



3. א. **דני** אמר: ראיתי שבמלבן סכום הזוויות החיצוניות 360° . כך זה ודאי בכל מרובע.

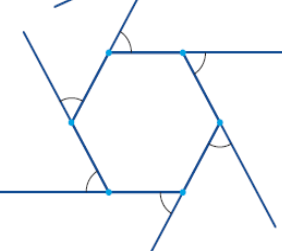
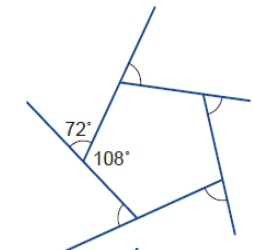
לכן, אני חושב שסכום הזוויות החיצוניות בכל מצולע, שווה לסכום הזוויות הפנימיות של אותו מצולע: במחומש 540° , במשושה 720° וכו'.

מיכל אמרה: דני צודק, ראינו שכאשר מספר הצלעות של המצולע גדל ב-1, סכום הזוויות הפנימיות גדל ב- 180° , נראה לי שגם סכום הזוויות החיצוניות גדל כך:

במחומש $540^\circ = 180^\circ + 360^\circ$ במשושה $720^\circ = 180^\circ + 540^\circ$ וכו'.

מה דעתכם?

דני ומיכל עוזרים לחזק את ההשערה הנפוצה...



הפתעות!!!

ב. **רועי** אמר: בשיעור שעבר מצאנו שסכום הזוויות במחומש 540° וגודל כל זווית פנימית במחומש משוכלל הוא $108^\circ = \frac{540}{5}$. לכן, גודל כל אחת מהזוויות החיצוניות הצמודות לפנימיות, 72° , והסכום הוא $72 \cdot 5 = 360^\circ$

האם טענתו של רועי מתאימה לטענה של דני ומיכל?

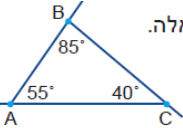
4. א. מצאו את את סכום הזוויות הפנימית במשושה.

ב. מצאו גודל של כל זווית במשושה משוכלל.

ג. מצאו גודל של כל זווית חיצונית במשושה משוכלל.

ד. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

5. מצאו את הגודל של כל זוויות חיצוניות במשולש המשורטט, ואת סכום הזוויות האלה.



יצרנו הפתעה ואולי גם חוסר ביטחון, באשר למסקנה הנכונה.
ההוכחה להלן, משמשת ככלי להסביר ולשכנע שאכן הסכום קבוע
ושווה ל- 360° .

וההוכחה היא הוכחה אלגברית פשוטה:

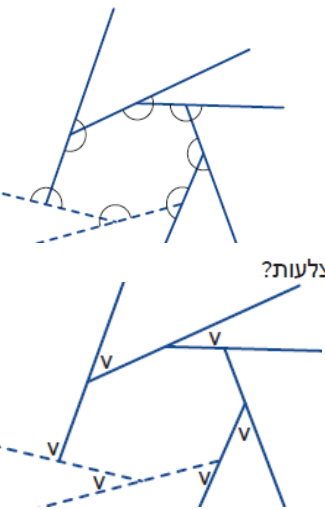
משפט: סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור (אחת ליד כל קודקוד) הוא 360° .

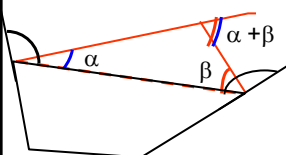
א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. בשיעור שעבר הוכחנו כי סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא: $180(n - 2)$.

מהו סכום הזוויות הצמודות שליד כל קודקוד, במצולע בעל n צלעות?

מהו סכום הזוויות החיצוניות (אחת ליד כל קודקוד) במצולע בעל n צלעות?



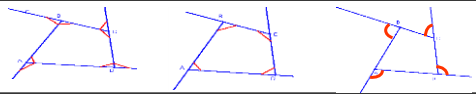


הסברים של תלמידים

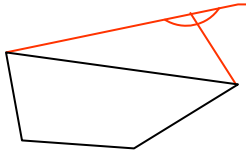
1. כשעוברים ממרובע למחומש על ידי תוספת צלע α ו- β שהיו חלק מהחיצוניות במרובע הופכות להיות חלק מהפנימיות במחומש כך שמסכום החיצוניות יורד $\alpha + \beta$,

וזה בדיוק גודל הזווית החיצונית שנוספה בקודקוד החדש שנוצר. (כי למדנו שזווית חיצונית שווה ל....)

שתי תלמידות יצרו טבלה:

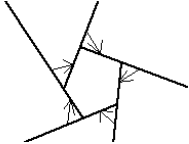
	
מרובע	$180^{\circ} \cdot 4 - 360^{\circ} = 360^{\circ}$
מחומש	$180^{\circ} \cdot 5 - 540^{\circ} = 360^{\circ}$
משושה	$180^{\circ} \cdot 6 - 720^{\circ} = 360^{\circ}$
משובע	$180^{\circ} \cdot 7 - 900^{\circ} = 360^{\circ}$

בסוף הן אמרו: אבל אנחנו עדיין לא יודעות למה?!



3. כשנוסף קודקוד נוסף זוג של זוויות צמודות:זווית חיצונית ופנימית.כך שלסכום הזוויות החיצוניות והפנימיות יחד נוסף 180° . אבל מצאנו קודם שכשמוסיפים קודקוד סכום הזוויות הפנימיות גדל ב - 180° ... לכן "לא נשאר כלום שיכול להתווסף לחיצוניות".

ואחר כך הוסיפו:
ובמשולש סכום החיצוניות הוא 360° , אז זה יישאר סכום החיצוניות בכל המצולעים.

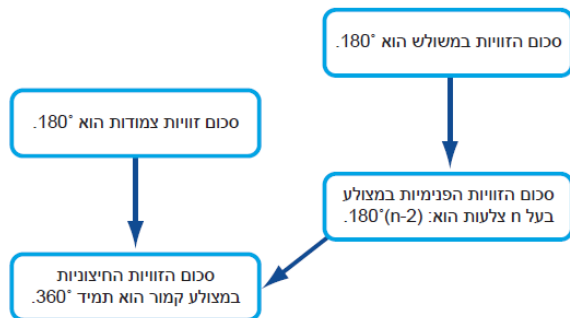


4. והיו גם 2 תלמידים שהציעו את ההסבר הבא:

בנוסף לתפקיד ההוכחה, אחת המטרות של היחידות האלה, להדגים כיצד כל משפט חדש מבוסס על קודמיו – רפלקציה על המהלך.



לעיתים רק הוכחה משכנעת בנכונות של משפט ומסבירה מדוע הוא נכון.
הוכחה מבוססת על הנתונים ומשפטים קודמים שנלמדו.
בהוכחת המשפט, בדבר סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור, השתמשנו במשפטים הבאים:



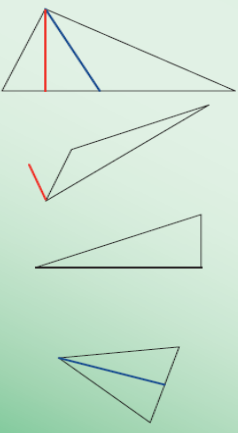
ומה בירוק? יחידה 30

- ❖ עוסקים באותם נושאים כמו בספר הכחול.
- ❖ לומדים מהו משפט, לזהות נתונים ומסקנות, לקרוא ולהשתמש בסימונים מתמטיים (אנך, זווית, משולש).
- ❖ מחשבים, משרטטים ומנמקים חישובים בעיקר בעזרת סכום זוויות במשולש.
- ❖ מזכירים ועובדים על כל מושג, גם אם נלמד בעבר.

יחידה 30: הגדרות, משפטים והוכחות

שיעור 1: על מושגים והגדרות

מקדישים את כל השיעור הראשון לחזרה על המושגים חוצה זווית ואנך בכלל גובה וחוצה זווית במשולש, כולל רישום בכתיב מתמטי



הקטע האדום הוא גובה במשולש.
הקטע הכחול הוא חוצה זווית במשולש.

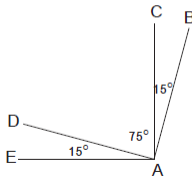
- האם גם במשולש זה הקטע האדום הוא גובה?
- היכן עובר הגובה לצלע המודגשת במשולש ישר הזווית?
- האם חוצה הזווית יכול לעבור מחוץ למשולש?
- האם במשולש שבשרטוט, הקטע הכחול הוא גובה או חוצה זווית?

בהמשך השיעור נבדוק שאלות אלה.

תרגילי זיהוי, שרטוט, ורישום בכתיב מתמטי. דוגמאות:

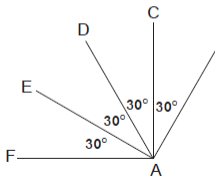
1. מצאו בכל שרטוט, זוגות של ישרים מאונכים והשלימו את הרישום.

א. $AD \perp AE$: $\angle$ _____

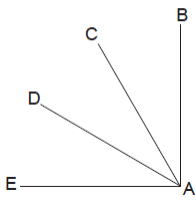


ב. _____ $\perp$ _____

_____ $\perp$ _____

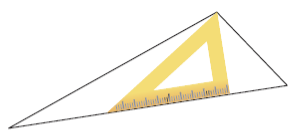


2. השלימו לפי השרטוט. (רשמו כל זווית בעזרת 3 אותיות - הקודקוד באמצע).



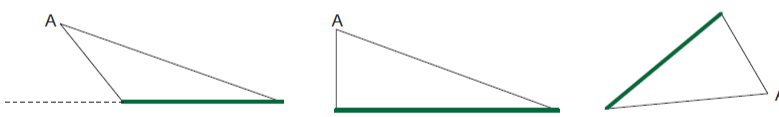
AC חוצה את _____ $\angle$

AD חוצה את _____ $\angle$



3. כדי לשרטט גובה משתמשים בזווית ישרה (של סרגל או משולש, או ספר).

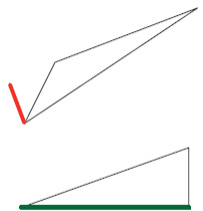
א. בכל משולש, שרטטו, גובה מהקודקוד A לצלע המודגשת.



ב. בכל משולש, שרטטו את חוצה הזווית A, בצבע שונה מזה ששרטטתם את הגובה.

4. נחזור לשאלות שבמסגרת הירוקה שבתחילת השיעור:

א. האם הקטע **האדום** הוא גובה במשולש שבשרטטתם? המשיכו את הצלע, ובדקו.



ב. שרטטו את הגובה לצלע המודגשת במשולש ישר הזווית?

ג. האם **חוצה הזווית** יכול לעבור מחוץ למשולש?



שיעור 2: מהו משפט במתמטיקה?

במהלך לימוד גאומטריה ניסחנו משפטים (משפטי חפיפה, משפט דמיון, ועוד). מהו משפט?

האם אפשר לשאול אם ההיגדים הבאים נכונים או לא?

א. "מה הסכום של 24 ו-76?"

ב. "אם יורד שלג, הטמפרטורה נמוכה מ-2 מעלות".

משפט במתמטיקה הוא היגד שאפשר לשאול לגביו האם הוא נכון או לא נכון.

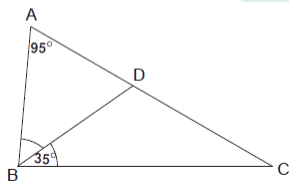
נלמד עוד על משפטים במתמטיקה.

השיעור השני דומה לשיעור הראשון שבכחול (מהו משפט). הנושא מתאים גם לרמה זו אך התרגול קל יותר: רוב המשפטים מנוסחים מראש בעזרת "אם" ו"אז" ובמשימות יש שילוב של תרגילי חישוב בהם חוזרים על סכום זוויות במשולש, כהכנה לשיעור הבא. למשל:

והתרגול – דוגמה:

5. בכל סעיף, חשבו לפי הנתונים את הגדלים של כל הזוויות במשולש ABC.

תזכורת: סכום הזוויות במשולש שווה ל- 180°



א. BD חוצה זווית במשולש ABC.

שיעור 3: זוויות פנימיות במצולע

בשרטוט מצולע בעל שבע צלעות.

האם אפשר למצוא ללא מדידה את סכום הזוויות הפנימיות, המסומנות ב- $\sphericalangle$ בשרטוט?

נבדוק מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולעים שונים.

שיעור 4: בשביל מה צריך הוכחות?

בשרטוט מצולע בעל 7 צלעות.

האם אפשר למצוא, ללא מדידה, את סכום הזוויות המסומנות ב- $\sphericalangle$ בשרטוט?

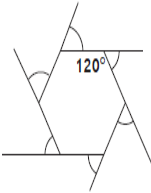
נחקור זאת במהלך השיעור.

שיעורים 3 ו- 4 דומים לשיעורים 2 ו- 3 בספר הכחול. הנושא מתאים גם לרמה זו. הדיון וההסבר של הנוסחה לסכום הזוויות הפנימיות במסלול זה, פשוט יותר ומבוסס בעיקר על הכללה של המקרים הפרטיים.

3. השלימו את הטבלה:

המצולע	מספר משולשים	סכום זוויות
מחבט		
מחומש		
משושה		
משובע (7 צלעות)		
מתומן (8 צלעות)		
מתושע (9 צלעות)		
מעושר (10 צלעות)		
מצולע בעל n צלעות		

לגבי הזוויות החיצוניות חשוב שגם התלמידים ברמה זו ייחשפו לתפקידי ההוכחה, ושוב הדיון קצר יותר והתלמידים מעורבים בחישובים עליהם בנוי הדיון. למשל:

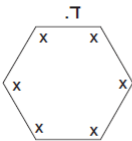


4. גודל כל זווית פנימית במשושה משוכלל הוא 120° .
- א. מצאו גודל של זווית חיצונית במשושה משוכלל.
- ב. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

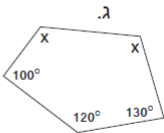
המשימות הן בעיקר משימות חישוב, ובמקום שאלות מהסוג, בדקו אם הטענה נכונה, מבקשים מהתלמידים לשרטט, לרשום נתונים בשרטוט ולחשב. דומאות:

2. לפניכם ארבעה מצולעים.

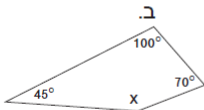
השלימו את סכום הזוויות מתחת לכל מצולע. חשבו את גודל הזוויות שאינן נתונות.



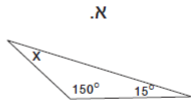
סכום הזוויות: $^{\circ}$



סכום הזוויות: $^{\circ}$



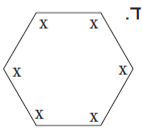
סכום הזוויות: $^{\circ}$



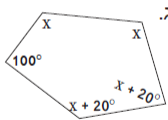
סכום הזוויות: $^{\circ}$

3. לפניכם ארבעה מצולעים.

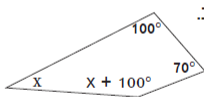
השלימו את סכום הזוויות מתחת לכל מצולע. חשבו את גודל הזוויות שאינן נתונות.



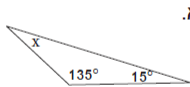
סכום הזוויות: $^{\circ}$



סכום הזוויות: $^{\circ}$



סכום הזוויות: $^{\circ}$



סכום הזוויות: $^{\circ}$

7. שרטטו משולש מדגים (מתאים בערך לנתונים), קרשו את הנתונים בשרטוט, וחשבו את זוויות המשולש.

א. זווית פנימית - 52° זווית חיצונית - 70° .

ב. זווית חיצונית - 95° זווית חיצונית - 125° .

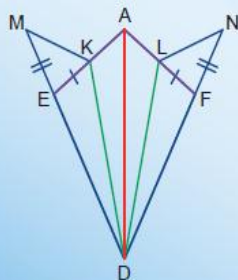
ג. זווית פנימית - 110° זווית חיצונית - 140° .

יחידה 31: כיצד מוכיחים?

- לומדים כיצד רשמים הוכחות פשוטות.
- רואים כי ניתן לרשום הוכחות בדרכים שונות (בכתיב מתמטי או במילים).
- מזהים אם נתונים מספיקים להסקת המסקנה (ואז מוכיחים), או שאינם מספיקים ואז מביאים דוגמאות נגדיות.
- בודקים איזה משפט מתקבל אם מחליפים את הנתונים והמסקנות אלו באלו. (כהכנה להחלפות מסוג זה ביחידה על משולש שווה שוקיים, ובזיהוי הקבלה לפי זוויות).



שיעור 1. מוכיחים חפיפות ומסיקים מסקנות



בשרטוט שלפניכם AD חוצה את הזווית A ואת הזווית KDL.
נתונים נוספים מסומנים בשרטוט.
קטעים שווים מסומנים באותו סימון.
כמה זוגות של משולשים חופפים בשרטוט?

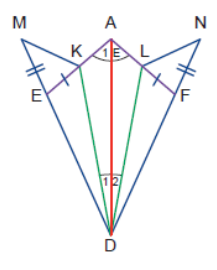
נזהה משולשים חופפים, נוכיח ונסיק מסקנות.

כמה זוגות של משולשים חופפים יש כאן?

התלמידים מכירים סימונים ואת משפטי החפיפה מלימוד קודם בכיתה ז' ובמחצית הראשונה של כיתה ח'. והם רשמו, נתונים ומה שצריך להוכיח בכתב מתמטי.

על הבסיס הזה לומדים כעת כיצד לרשום הוכחות פשוטות בכתב מתמטי.

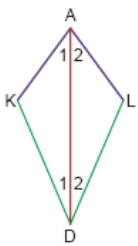




נוהגים לרשום הוכחה כך:

- רושמים נתונים.
- רושמים מה שצריך להוכיח (צ"ל).
- רושמים את שלבי ההוכחה ומציינים ליד כל שלב נימוקים המצדיקים אותו.
- רושמים את המסקנה ומנמקים.

בנוסף, שרשרת המשימות הזו מדגישה שוב כיצד ניתן להוכיח חפיפות נוספות על סמך המסקנות מהחפיפות שהוכחו קודם. עיקרון מרכזי של הגיאומטריה הדדוקטיבית.



∴ העתיקו מהשרטוט את המשולשים AKD ו-ALD.
AD חוצה את הזווית A ו-D במרובע AKDL.
נוכיח כי משולש AKD חופף למשולש ALD.
א. העתיקו והשלימו מה נתון ומה צריך להוכיח.
נתון: $\angle A_1 = \angle \dots$
 $\angle D_1 = \dots$
צריך להוכיח: $\triangle AKD \cong \triangle \dots$
ב. העתיקו, הוסיפו שוויון נוסף, והשלימו.

נתון	תנאי
$\angle A_1 = \angle A_2$	
_____	_____
_____	_____

⇓

_____ $\triangle AKD \cong \triangle$ _____ לפי משפט _____

ג. מסקנות: $KD = LD$ ו- $AK = AL$ נמקו.

ד. האם מצאתם מסקנה נוספת מחפיפת המשולשים? מהו?

שיעור 2. תיכון וקטעים אחרים במשולש

בשיעור השני מציגים את המושג תיכון במשולש ומשלבים שרטוט, חישובי שטח, והוכחות הקשורות בתיכון, גובה, וחוצה זווית במשולש. מושג התיכון לא נלמד בעבר, ואילו המושגים האחרים נלמדו בכיתה ז' בשלושתם ייעשה שימוש ביחידה 33 העוסקת במשולש שווה שוקיים ותכונותיו.



מתחילים בהצגת סיטואציה:

שתי משפחות גרות בבית דו משפחתי עם חצר משותפת בצורת משולש (המשורטט).

לפני תכנון הגינה הם החליטו להקים מחיצה שתחלק את החצר לשני חלקים שווי שטח.



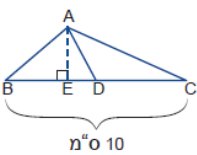
הציעו להם כיצד לעשות זאת.

בשלב זה אפשר לקבל הצעות מהתלמידים אך אין להציע שרטוט תיכון.

תחילה חוזרים על הגדרות הקטעים המוכרים (גובה וחוצה זווית) ומתרגלים זיהוי שלהם.

ורק אחר כך עוברים להגדרת התיכון ולתרגילי זיהוי ושרטוט.

המשפט העיקרי שמוכיחים כאן הוא המשפט הבא:



5. א. AD תיכון במשולש ABC.

AE גובה המשולש ואורכו 4 ס"מ.

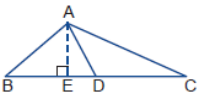
אורך BC 10 ס"מ.

חשבו את השטחים של משולשים ABD ו-ACD.

ב. משפט: במשולש, התיכון לצלע מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שטח.

- רשמו את הנתונים ומה צריך להוכיח.

- הוכיחו את המשפט.



וכעת אפשר לפתור את הבעיה שהוצגה בתחילת השיעור:



ג. נחזור לחצר של הבית הדו משפחתי.

חלקו את החצר לשתי חצרות ששטחן שווה.

הסבירו.

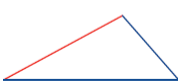
אוסף המשימות כולל משימות זיהוי, משימות שרטוט, משימות חישוב, ומשימות הוכחה. דוגמאות:

שרטוט



2. הניחו על השרטוט דף שקוף. העתיקו את המשולשים.

היעזרו בסרגל, ושרטטו תיכון, גובה וחוצה זווית לצלע הצבועה באדום.



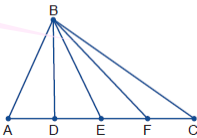
זיהוי



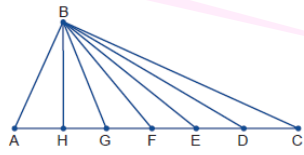
3. נתון: $AD = DE = EF = FC$

א. רשמו באילו משולשים BE הוא תיכון.

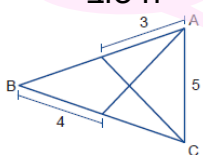
ב. באיזה משולש BF הוא תיכון?



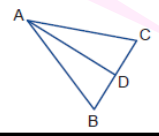
זיהוי



חישוב



הוכחה



4. נתון: $AH = HG = GF = FE = ED = DC$
רשמו את כל המשולשים בהם:
א. BH הוא תיכון.
ב. BG הוא תיכון.
ג. BF הוא תיכון.
ד. BE הוא תיכון.
ה. BD הוא תיכון.

5. במשולש משורטטים שני תיכונים. (המידות בס"מ).
מצאו את היקף המשולש.

9. בכל סעיף רשומים נתונים ומה שצריך להוכיח. רשמו את ההוכחות.
א. נתון: $AB = AC$
 AD תיכון לצלע BC .
צ"ל: $\triangle ADC \cong \triangle ADB$

שיעור 3. עוד ועוד הוכחות

בשיעור זה מתרגלים הוכחות ודנים בלגיטימיות של ניסוחים שונים של הוכחות.



המצולע הכחול הוא מצולע משוכלל בעל 12 צלעות.
על שש מצלעותיו שרטטו ריבועים (כמו בשרטוט).
יאיר התבקש למצוא גודל של כל זווית במצולע האדום שנוצר ולהוכיח כי הוא מצולע משוכלל.

נחקור מצולעים ונמשיך להוכיח.

הוכחה מבוססת על הנתונים ועל משפטים יקודמים שנלמדו.

רושמים נתונים ומה שצריך להוכיח.

רושמים את שלבי ההוכחה ומציינים נימוקים המצדיקים כל שלב.

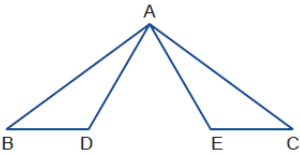
רושמים את המסקנה ומנמקים.

באוסף המשימות יש בעיקר משימות הוכחה או משימות בהן יש לבדוק אם הנתונים מספיקים להסקת המסקנה, אם כן, להוכיח ואם לא לפסול באמצעות דוגמה.

דוגמה:



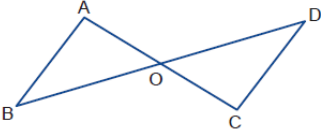
2. קבעו אם הנתונים הרשומים מספיקים להוכחת המסקנה.
אם כן, רשמו הוכחה. אם לא, הראו כי הנתונים אינם מספיקים.



$AB = AC$

$BD = CE$

$\triangle ABD \cong \triangle ACE$



$AB = CD$

$AB \parallel CD$

$\triangle AOB \cong \triangle COD$

שיעור 4. מחליפים נתונים ומסקנות

בשיעור זה עוסקים במשפטים נכונים בהם הנתונים והמסקנות מוחלפים אלה באלה ובבדיקה האם המשפט המתקבל לאחר ההחלפה, גם הוא משפט נכון.

ביחידות הבאות ייעשה שימוש בזוגות של משפטים בהם התנאי והמסקנה מוחלפים זה בזה. (ביחידה 33 יעסקו בתכונות של משולש שווה שוקיים ובזיהוי משולשים שווי שוקיים על פי תכונות, וביחידה 34 בזיהוי זוויות שוות בין ישרים מקבילים וחותך ובזיהוי מקבילים לפי שוויון זוויות).

כדאי לקרוא במשותף את השיחה מהספר עליזה בארץ הפלאות של לואיס קרול ואפשר גם לחלק תפקידים תלמיד שיהיה הארנב, תלמידה שתהיה עליזה, וכו'.



בספר "עליזה בארץ הפלאות" מסופר על שיחה, שהתקיימה במסיבת התה של הכובען המטורף:

"אם כן, צריכה את לומר מה את חושבת", המשיך ארנב האביב.

"הרי אני אומרת זאת" נחפזה עליזה לענות. "בכל אופן - חושבת אני מה שאני אומרת - וזה הרי אותו דבר".

"כלל לא אותו דבר" אמר הכובען, "אם כך תוכלי לומר גם, שעניי רואות מה שאני אוכלת זה כמו אני אוכלת מה שעניי רואות!"

"אם כן הרי תוכלי לומר גם" הוסיף הארנב, "אני רוצה מה שנותנים לי זה כמו נותנים לי מה שאני רוצה".

"אם כן הרי תוכלי לומר גם" הוסיפה המרמיטה, שדומה היה כי דוברת היא מתוך שינה, "אני נושמת כשאני ישנה זה כמו אני ישנה כשאני נושמת".

מה ניסו האורחים במסיבת התה להסביר לעליזה?

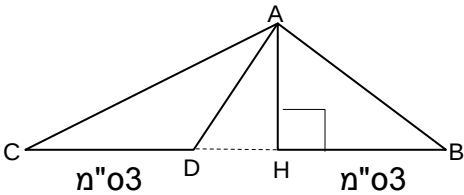


1. נסחו כל זוג משפטים מודגשים (מהמסגרת שלמעלה) בעזרת "אם" ו"אז".
דוגמה: הארנב: "אם את חושבת אז את אומרת" עליזה: "אם אני אומרת אז אני חושבת".

הניסוח בעזרת "אם" ו"אז" עוזר לראות כי מדובר כאן במשפטים שהתנאי והמסקנה הוחלפו זה בזה, ומשפטים שהיו הגיוניים הופכים לאחר ההחלפה לחסרי הגיון.

דוגמאות של המשימות בשיעור זה:

- א. האם המשפט הבא נכון? אם כן, הוכיחו אם לא צרו דוגמה נגדית.
"אם משולשים חופפים אז השטחים שלהם שווים."
ב. החליפו את התנאי במסקנה ורשמו את המשפט המתקבל.
האם המשפט המתקבל נכון? אם כן, הוכיחו אם לא צרו דוגמה נגדית.



דוגמה נגדית:

זו דוגמה של משימה בה המשפט לאחר ההחלפה אינו משפט נכון:

ויש כמובן משימות בהן המשפט לאחר ההחלפה הוא משפט נכון.



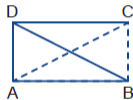
כשמחליפים נתונים ומסקנות של משפט נכון, המשפט שמתקבל אינו בהכרח משפט נכון.

באוסף המשימות עוסקים, בדומה למה שנעשה בשיעור, בבדיקה של משפטים לאחר שהנתונים והמסקנה הוחלפו זה בזה. בחלק מהמקרים התלמידים אינם נדרשים להוכיח את המשפט הנתון, והם מתבקשים רק לקבוע אם המשפט שהתקבל לאחר ההחלפה נכון להסביר אם הוא נכון ואם לא לשרטט דוגמה נגדית. דוגמאות:



2. לפניכם מספר משפטים נכונים. נסחו לכל אחד משפט חדש בו הוחלפו הנתון והמסקנה זה בזה. בדקו אם המשפט שניסחתם הוא משפט נכון והסבירו.

- א. אם שני משולשים חופפים זה לזה, אז הזוויות המתאימות שוות זו לזו.
ב. אם שני משולשים חופפים זה לזה, אז הצלעות המתאימות שוות זו לזו.



4. משפט: אם המרובע הוא מלבן, אז אלכסוניו שווים זה לזה.

- א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו את המשפט.
ב. נסחו משפט חדש בו הוחלפו הנתון והמסקנה זה בזה.
ג. האם המשפט נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה המראה כי המשפט אינו נכון.

יחידה 32: משולשים

עוסקת בשטח של משולש מלבן מקבילית וטרפז, והפעם עם הוכחות.

יחידה 33: משולשים שווי שוקיים

עוסקת בכל המשפטים הקשורים במשולש שווה שוקיים. (וכאן יש שימוש בהחלפת תנאים ומסקנות.)

יחידה 34: ממשפט למשפט

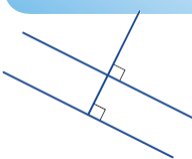
- מוכיחים שרשרות של משפטים במטרה להכיר מהו מבנה גיאומטרי – דדוקטיבי מבלי להיכנס לדיונים במבנה.
- מזהים מהם הנתונים, המשפטים שהובילו אל המסקנות שוב במטרה להכיר מבנה.
- לומדים לזהות ישרים מקבילים לפי זוגות של זוויות מתחלפות או מתאימות שוות.

שיעור 1. האם הישרים מקבילים?



דנה רוצה להכין תרשים מדויק לבניית חנוכיה. עם 4 זוגות של כנים מקבילים.

בהמשך נעזור לה לשרטט במדויק.



1. בכיתה ז הגדרנו ישרים מקבילים כך:

שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מאונכים לאותו ישר.

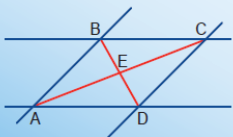
כמו כן, כאשר נתונים שני ישרים וישר החותך אותם, הוכחנו כי:

אם הישרים מקבילים אז הזוויות המתחלפות, הנוצרות בין הישרים והישר החותך, שוות זו לזו

כעת מנסחים משפט שבו התנאי והמסקנה מוחלפים ומוכיחים אותו
כעת יש משפט העוזר לקבוע הקבלה על סמך שוויון זוויות.

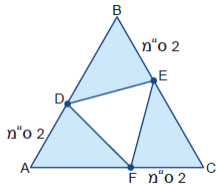
אוסף המשימות כולל משימות זיהוי, חישוב, שרטוט, בדיקת נכונות של טענות, הוכחת הטענות הנכונות והפרכה של הלא נכונות.

שיעור 2. שרשרות של משפטים



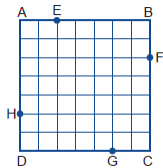
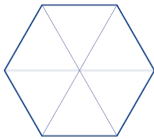
נתון: $AD \parallel BC$, חוצה AC את $\angle BAD$ ו- BD חוצה את $\angle ABC$.
אילו מסקנות אפשר להוכיח על סמך הנתונים והמשפטים שלמדנו?

אוסף המשימות כולל שרשרת נוספות כאלה פשוטות יותר, וגם מסוג שונה:
דוגמה:



1. משולש ABC הוא משולש שווה צלעות. אורך כל אחת מצלעותיו 6 ס"מ.
על צלעות המשולש הקצו קטעים שווים בהתאמה, שאורך כל אחד מהם 2 ס"מ.
ראו שרטוט.
- א. הסבירו מדוע המשולשים הצבועים חופפים.
- ב. הסבירו מדוע משולש DEF שווה צלעות.

ושאלות דומות לגבי ריבוע ומשושה



לרמה משימות דומות רק פחות מפורט וכולל גם מחומש.

יחידות 35 ו- 36 עוסקות במשפט פיתגורס במרחב

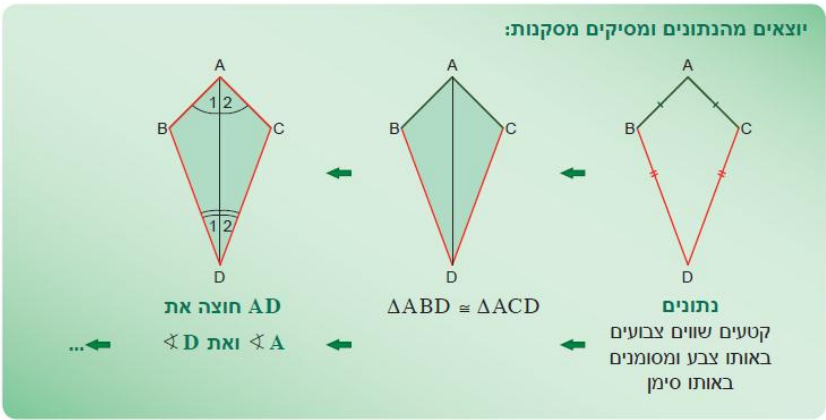
ומה בירוק?

יחידה 31: כיצד מוכיחים?

- ❖ אומנם היחידה נקראת כיצד מוכיחים אך התלמידים לא נדרשים להוכיח בעצמם.
- ❖ ביחידה 31 במסלול הירוק משלבים את הנושאים והעקרונות המופיעים ביחידות 31 ו- 34 במסלול הכחול ומתאימים למסלול זה.
- ❖ מחשבים, מנמקים בעזרת משפטים פשוטים (משפטי חפיפה וסכום זוויות...)

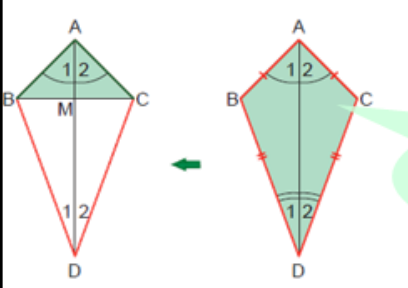
שיעור 1. לפי איזה משפט?

יוצאים מהנתונים ומסיקים מסקנות:



2. האם שני המשולשים הצבועים בירוק חופפים?
ךשמו את החפיפה והסבירו.

תיקון: אלה לא צריכים להיות צבועים את חפיפתם הסברנו במשימה 1.



3. הראו כי AD מאונך ל-BC.
ךשמו בכתב מתמטי והסבירו.

התלמידים נדרשים רק לציין את משפט החפיפה אך נחשפים לשרשרת הטענות.

ראינו שרשרת של מסקנות הנובעות מהנתונים ומהמסקנות הקודמות:

מהנתונים הסקנו

כי AD חוצה זוויות

מהחפיפה הסקנו

מכאן הסקנו

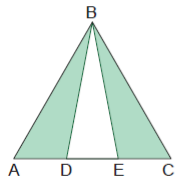
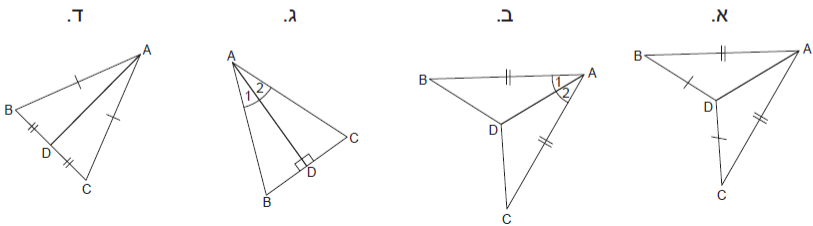
שהאלכסונים מאונכים

מהחפיפה השנייה הסקנו

באוסף המשימות נדרשים לרשום נתונים המסומנים בשרטוט, ולהיפך: לסמן על סמך נתונים רשומים.
כמוכן, מציינים את המשפט עליו מסתמכים. ולציין את המשפט, אך לא נדרשים להוכיח.. דוגמאות:



1. לפי הנתונים המסומנים בשרטוט המשולשים חופפים.
רשמו את הנתונים והמסקנה בכתיב מתמטי.
ציינו על סמך איזה משפט חפיפה מבוססת המסקנה.



5. נתון: משולש ABC שווה צלעות.

$$AD= EC$$

מסקנה: $\triangle ABD \cong \triangle BCE$

סמנו לפי הנתונים קטעים וזוויות שוות.
הסבירו מדוע המשולשים חופפים.

שיעור 2. קווים מיוחדים במשולש



שתי משפחות גרות בבית דו משפחתי עם חצר משותפת בצורת משולש.

לפני תכנון הגינה המשפחות החליטו להקים מחיצה שתחלק את החצר לשני חלקים **שווי שטח**.



הציעו להם כיצד לעשות זאת.

הטיפול בתיכון דומה לזה שבספר הכחול. אלא שאין הוכחות, והמשימות הן בעיקר משימות של זיהוי, שרטוט, וחישוב.

אבל המשפט "התיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח" מתקבל בעיקר מחישובים:

שיעור 3. האם הישרים מקבילים?



בספר "עליזה בארץ הפלאות" מסופר על שיחה, שהתקיימה במסיבת התה של הכובען המטורף:

א. "אם כן, צריכה את לומר מה את חושבת", המשיך ארנב האביב.

"הרי אני אומרת זאת" נחפזה עליזה לענות.

"בכל אופן - חושבת אני מה שאני אומרת - וזה הרי אותו דבר".

ב. "כלל לא אותו דבר" אמר הכובען.

"אם כך תוכלי לומר גם, **שעיני רואות מה שאני אוכלת** זה כמו

אני אוכלת מה שעיני רואות!"

ג. "אם כן הרי תוכלי לומר גם" הוסיף הארנב,

"אני רוצה מה שנותנים לי זה כמו נותנים לי מה שאני רוצה".



מה ניסו האורחים במסיבת התה להסביר לעליזה?

בשיעור זה התלמידים לומדים להחליף נתונים ומסקנות ורואים שהמשפט המתקבל אינו בהכרח משפט נכון. הדוגמאות מאד פשוטות והמשפטים הנתונים מנוסחים בעזרת "אם" ו"אז".

2. לפניכם משפטים נכונים. החליפו את הנתון והמסקנה ובדקו אם המשפט המתקבל הוא משפט נכון.

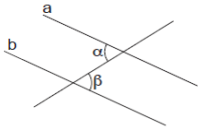
א. אם אדם גר בתל-אביב, אז הוא גר במדינת ישראל.

ב. אם היום פורים אז החודש הוא חודש אדר.

המטרה העיקרית להחליף את הנתונים והמסקנה במשפט על זוויות בין מקבילים ולקבל את המשפט המאפשר זיהוי מקבילים על סמך שוויון זוויות,

4. לפניכם משפט שהכרתם בעבר:

נתונים שני ישרים וישר החותך אותם: אם הישרים מקבילים אז הזוויות המתחלפות, הנוצרות בין הישרים והישר החותך, שוות זו לזו (ראו שרטוט).



א. השלימו:

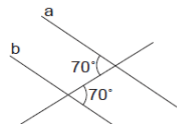
נתון: _____ || _____

מסקנה: _____ = _____

ב. החליפו את הנתון והמסקנה.

נתון:

מסקנה:



יחידה 32: משולשים

כמו בספר הכחול, עוסקת בשטח של משולש מלבן מקבילית וטרפז, והפעם עם הוכחות.

יחידה 33: משולשים שווי שוקיים

כמו בספר הכחול עוסקת בתכונות של משולש שווה שוקיים.

יחידה 34: שרטוטים וחישובים במרחב

מקבילה ליחידות 35 ו-36 ובה עוסקים בחישובים באמצעות משפט פיתגורס במרחב, בעיקר בתיבות.

סיכום:

הרעיון המרכזי ביחידות האלה, הוא ללמד לרשום הוכחות פשוטות, כפי שנעשה במחצית השנייה של כיתה ח', גם לפי התכנית הישנה.

אבל לא רק זה: המטרה, ככתוב בתכנית הלימודים, לחשוף את התלמידים למבנה של הגיאומטריה אך עדיין לא למבנה המבוסס על אכסיומות אלא באופן שמאפשר לתלמידים להיות מעורבים ולבצע בעצמם משימות הממחישות את העקרונות:

- ❖ משפט נכון רק אם הוא נכון תמיד וכל דוגמה נגדית פוסלת את המשפט. לכן, בודקים נכונות של טענות, אם הן נכונות מוכיחים אותן ואם אינן נכונות פוסלים אותן בעזרת דוגמאות.
- ❖ הגיאומטריה בנויה נדבך על נדבך, כל משפט מבוסס על הנתונים ועל משפטים קודמים, לכן, התלמידים מוכיחים שרשרות פשוטות של משפטים שכל משפט מבוסס על קודמיו. התרשימים מדגישים את המבנה הזה.

❖ כשמחליפים נתון במסקנה (או נתונים במסקנות) במשפט נכון המשפט המתקבל אינו בהכרח משפט נכון. לכן, במקביל לזיהוי נתונים ומסקנות במשפט נתון, מחליפים נתונים במסקנות, בודקים נכונות ורק אז מוכיחים, או פוסלים באמצעות דוגמה.

ואשר לתוכן:

ביחידות 30, 31, ו- 34 עוסקים בחפיפת משולשים, בסכום זוויות פנימיות וחיצוניות במצולעים, בהקבלה והפעם גם בזיהוי הקבלה על סמך שוויון זוויות. ביחידות 32 עוסקים בשטחים של משולשים ומרובעים, הפעם עם הוכחות, והתייחסות למבנה. ביחידה 33 עוסקים בתכונות של משולש שווה שוקיים, שוב כולל הוכחות וכל העקרונות שנזכרו לעיל.

ובמסלול הירוק:

עוסקים באופן דומה בעקרונות הנ"ל: גם ברמה זו ניתן לזהות טענות שאינן נכונות, לרשום נתונים ומסקנות, להחליף נתונים ומסקנות אלה באלה, אך ללא דרישה לרישום הוכחות.

התלמידים מזהים נתונים ומסקנות, מסבירים, מזהים את המשפטים עליהם מבוססות המסקנות, משרטטים, ומבצעים חישובים בהתבסס על המשפטים.

ואשר לתוכן:

עוסקים באותם תכנים כמו במסלול הכחול.

בהצלחה ולהתראות