

יחידה 15: דלתון

שיעור 1. תכונות דלתון



אילו מרובעים אפשר ליצור מחיבור 4 הרצועות שבתמונה משמאל?

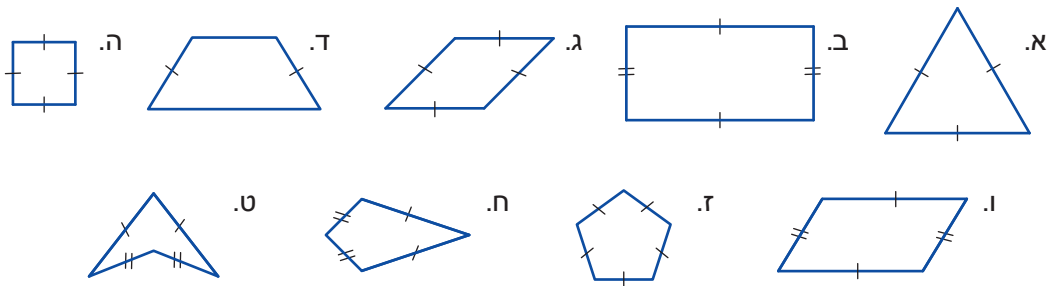
כמה סוגים שונים של מרובעים אפשר ליצור?
שרטטו ורשמו את שמם.

נכיר את הדלתון ואת תכונותיו.

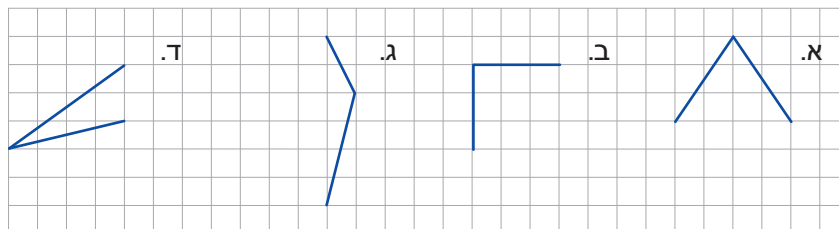


הגדרה: מרובע שבו שתי צלעות סמוכות שוות באורך וגם שתי הצלעות האחרות שוות באורך, נקרא **דלתון**.

1. במצולעים הבאים צלעות שוות באורך מסומנות באותו סימן. מצאו **דלתונים**. הסבירו מדוע הצורות האחרות אינן דלתונים.



2. בכל שרטוט שתי צלעות סמוכות של דלתון. העתיקו את השרטוטים לדף משובץ והשלימו לדלתונים.



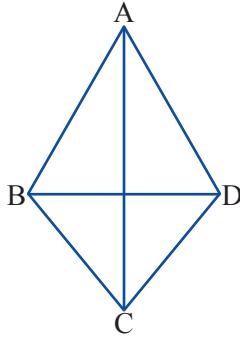
3. א. **הגדרה:** מרובע שכל צלעותיו שוות באורך נקרא **מעוין**.

האם מעוין הוא דלתון? הסבירו.

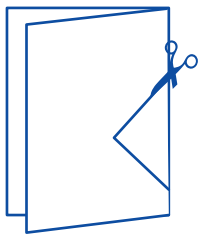
ב. האם ריבוע הוא דלתון? הסבירו.



קדקוד של דלתון, שהוא נקודת חיתוך של שתי צלעות סמוכות שוות באורכן, נקרא **קדקוד ראשי**. (קדקודים A ו-C בשרטוט). הזוויות בקדקודים אלה נקראות **זוויות הראש**. האלכסון המחבר את שני הקדקודים הראשיים של דלתון נקרא **אלכסון ראשי** (AC). האלכסון האחר נקרא **אלכסון משני** (BD). האלכסון הראשי בדלתון הוא **ציר סימטריה** של הדלתון. האלכסון המשני מחלק את הדלתון לשני משולשים שווים-שוקיים.

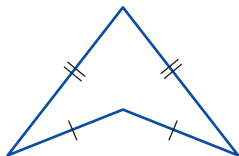


תכונות דלתון



4. קפלו דף נייר לשניים, וגזרו משולש כך שקו הקיפול ישמש כאחת מצלעות המשולש. פתחו את הקיפול. התקבל חלון מרובע בצורת דלתון. קו הקיפול הוא האלכסון הראשי. א. הוכיחו את החפיפה של שני המשולשים שנוצרו. ב. **הסקנה** קו הקיפול הוא ציר סימטריה של הדלתון. הסבירו. ג. אילו תכונות של הדלתון אפשר להסיק מן החפיפה? נמקו.

5. שרטטו דלתון ואת שני אלכסוניו. **הוכיחו:** האלכסון הראשי בדלתון חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.



6. **תזכורת:** מצולע שלפחות אחת מזוויותיו גדולה מזווית שטוחה, נקרא **מצולע קעור**.
- העתיקו את הדלתון שבשרטוט ושרטטו את אלכסוני הדלתון.
 - המשיכו את האלכסון הראשי עד שייפגש עם האלכסון המשני.
 - הסבירו מדוע כל תכונות הדלתון מתקיימות גם בדלתון קעור.



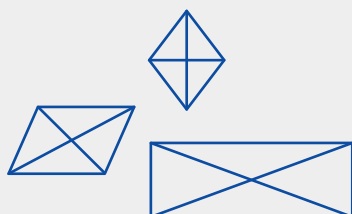
הגדרה: מרובע שבו שתי צלעות סמוכות שוות באורכן, וגם שתי הצלעות האחרות שוות באורכן נקרא **דלתון**.

תכונות הדלתון

אם מרובע הוא דלתון,
אז האלכסון הראשי מאונך
לאלכסון המשני וחוצה אותו.

אם מרובע הוא דלתון,
אז האלכסון הראשי חוצה
את זוויות הראש.

אם מרובע הוא דלתון,
אז הזוויות שמול
האלכסון הראשי שוות בגודלן.



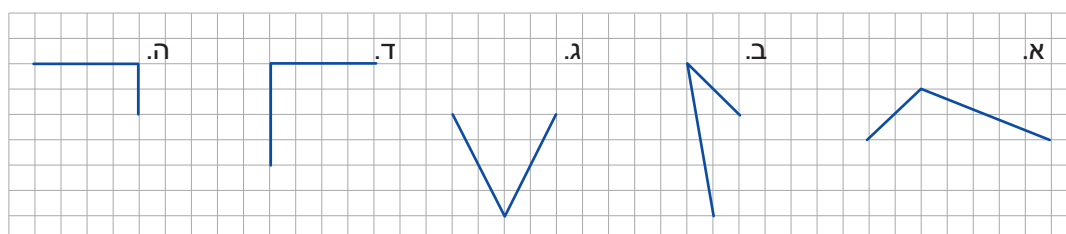
למילה **אלכסון** יש משמעות שונה בשימוש היומיומי ובגאומטרייה. בשפת היומיום, **אלכסון** הוא קו נטוי שאינו מאוזן או אנכי. למשל: חוצים את הכביש ישר ולא **באלכסון**. בגאומטרייה, **אלכסון** הוא קטע המחבר שני קדקודים שאינם סמוכים במצולע. **אלכסון** במצולע הוא לעתים נטוי לעתים מאוזן ולעתים אנכי. האם תוכלו למצוא מילים נוספות בעברית שהמשמעות שלהן במתמטיקה שונה מהמשמעות שלהן בשפת היומיום?



אוסף משימות

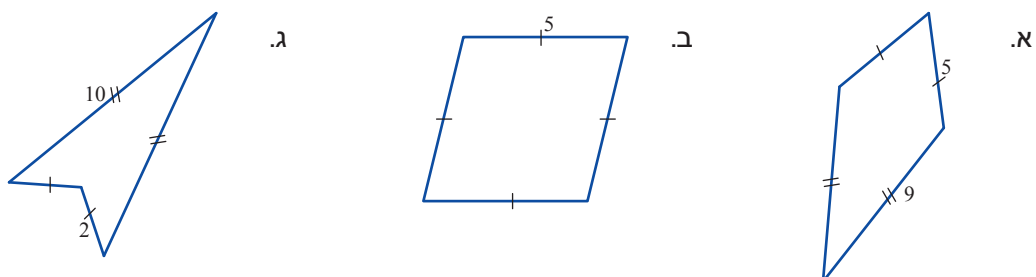


1. בכל שרטוט שתי צלעות סמוכות של דלתון. העתיקו כל שרטוט לדף משובץ והשלימו לדלתון.

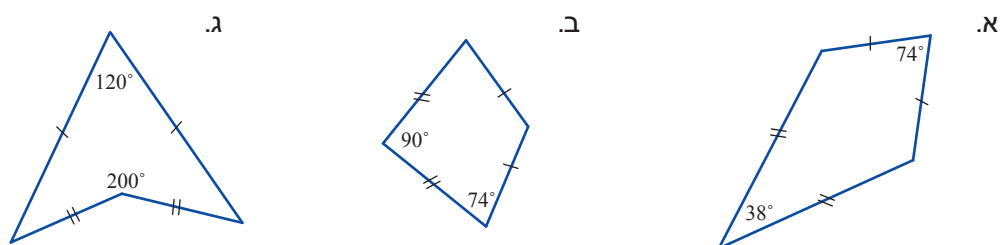




2. מצאו את אורכי הצלעות שאינם נתונים.



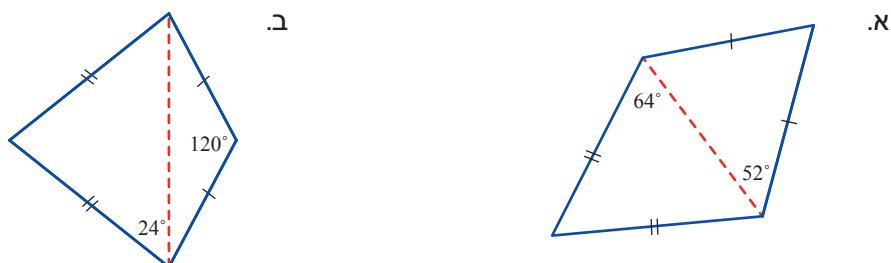
3. מצאו את הגדלים של הזוויות שאינם נתונים.



4. חשבו את אורכי צלעות הדלתון לפי הנתונים.



5. מצאו את הגדלים של כל זוויות הדלתון לפי הנתונים בשרטוט.





6. **ניתן/** מרובע ABCD הוא דלתון

$$AB = AD = 10 \text{ ס"מ}$$

$$BC = CD$$

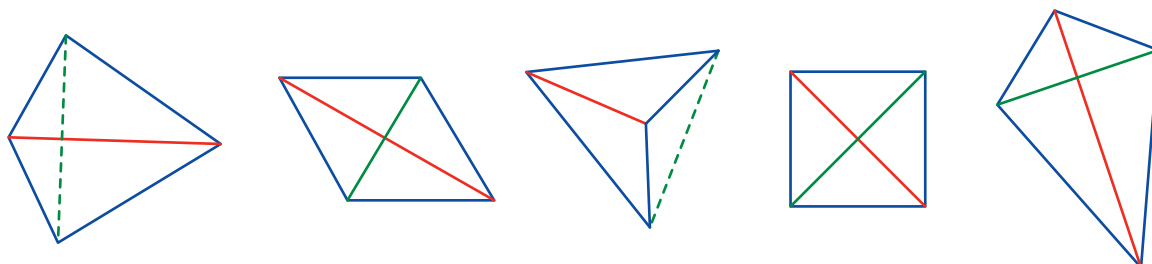
אורך האלכסון הראשי 20 ס"מ, ואורך האלכסון המשני 12 ס"מ.

א. שרטטו דלתון ורשמו על הקטעים המתאימים את האורכים שלהם.

ב. חשבו את אורך הצלע BC.



7. לפיכם שרטוטים של מספר דלתונים ואלכסוניהם.



אילו מהתכונות הבאות מתקיימות בכל הדלתונים?

א. יש זוג זוויות שוות בגודלן.

ב. כל הצלעות שוות באורך.

ג. אחד האלכסונים חוצה את הזוויות.

ד. האלכסונים חוצים זה את זה.

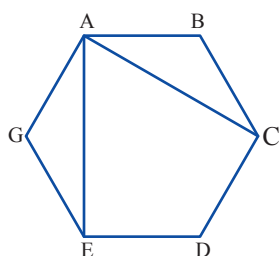
ה. האלכסונים מאונכים זה לזה.

ו. אחד האלכסונים חוצה את השני.



8. המצולע ABCDEG הוא משושה משוכלל.

הוכיחו: ACDE דלתון.

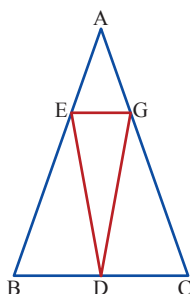


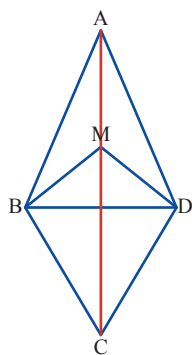
9. **ניתן/** $\triangle ABC$ הוא משולש שווה-שוקיים

D אמצע הבסיס BC

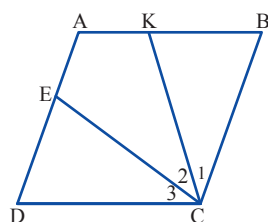
E ו-G נקודות על שוקי המשולש כך ש: $AE = AG$

הוכיחו: AEDG דלתון.

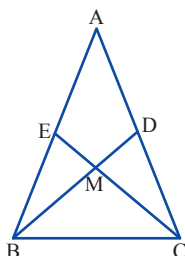




- 10.** המרובע ABCD הוא דלתון.
M נקודה על האלכסון הראשי AC (ראו שרטוט).
א. הוכיחו: $\triangle BMD$ משולש שווה-שוקיים.
ב. כמה דלתונים בשרטוט? הוכיחו.



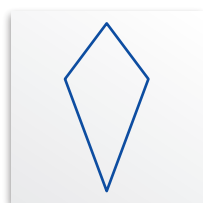
- 11.** ABCD הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.
א. הסבירו מדוע $\angle B = \angle D$
ב. $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3 = \alpha$ /נניח/
הוכיחו: AECK דלתון.
ג. נתון גם $AB = CK$ מהו סוג $\triangle KCB$?
מצאו את α במקרה זה.



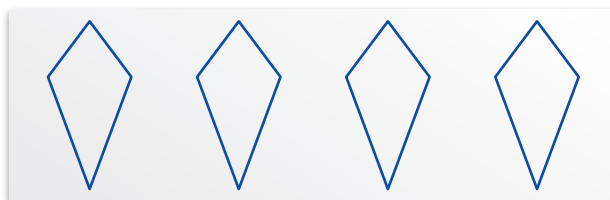
- 12.** משולש ABC שווה-שוקיים ($AC = AB$)
BD ו-CE תיכונים לשוקי המשולש
הוכיחו: המרובע AEMD הוא דלתון.



- 13.** א. קפלו נייר וגזרו משולש כך שתקבלו חלון בצורת דלתון.



- ב. כמה פעמים יש לקפל את הדף, כדי לגזור משולש אחד ולקבל 4 דלתונים?



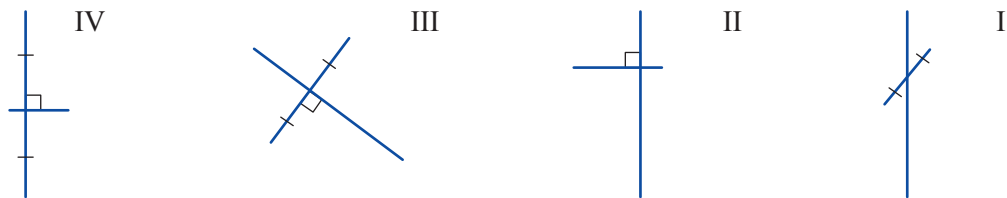
שיעור 2. מזהים דלתון



אבי וגבי בנו עפיפונים בצורה של דלתונים. הם יצרו את השלד משני מקלות באורך 40 ס"מ ו- 28 ס"מ. האם אפשר להסיק ששניהם בנו עפיפונים זהים? הסבירו.

נכיר תנאים מספיקים לזיהוי דלתון.

1. יוסי אסף זוגות של מקלות לבניית שלד לעפיפון בצורת דלתון.
א. באילו מהשרטוטים נמצא שלד שיכול להתאים? הסבירו.



ב. מה משותף לשרטוטים שיכולים להתאים לבניית עפיפון?



2. טען אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה, ואלכסון אחד חוצה את האחר, אז המרובע הוא **דלתון**.

שרטטו שרטוט מתאים, כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח והוכיחו את המשפט.

שימו לב! כדי להוכיח שהמרובע הוא דלתון, יש להוכיח שהוא מקיים את תנאי ההגדרה - כלומר, שיש בו שתי צלעות סמוכות שוות באורכן וגם שתי הצלעות האחרות שוות באורכן.



3. רק אחת הטענות הבאות נכונה. איזו היא?

- הסבירו באמצעות דוגמאות נגדיות, מדוע כל אחת מהטענות האחרות אינה נכונה.
- א. אם אחד האלכסונים של מרובע מחלק אותו לשני משולשים חופפים, אז המרובע הוא דלתון.
- ב. אם במרובע יש שני זוגות של צלעות שוות באורכן, אז המרובע הוא דלתון.
- ג. אם האלכסונים של מרובע מאונכים זה לזה, אז המרובע הוא דלתון.
- ד. אם אחד האלכסונים של מרובע חוצה את הזוויות, אז המרובע הוא דלתון.
- ה. אם במרובע יש זוג זוויות נגדיות שוות בגודלן, אז המרובע הוא דלתון.

4. במשימה 3 מצאתם טענה אחת נכונה.

שרטטו שרטוט מתאים, כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח והוכיחו אותה.



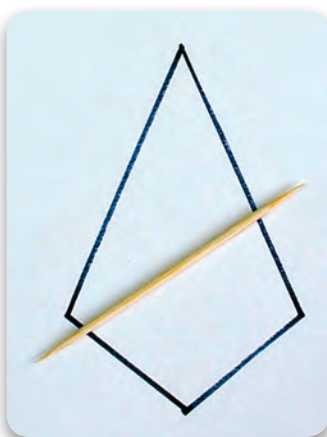
- במשימות 2 ו-4 ראינו כי כדי להוכיח שמרובע הוא דלתון, מספיק להראות שמתקיים אחד התנאים האלה:
- אלכסוני המרובע מאונכים זה לזה, ואלכסון אחד חוצה את האחר.
 - אלכסון אחד במרובע חוצה שתי זוויות.



5. מניחים קיסם על הדלתון שבתמונה כך שיחלק אותו לשתי צורות.

בכל סעיף שרטטו דלתון וקיסם המחלק אותו לצורות המתאימות.

- א. לשני מרובעים.
- ב. למחומש ולמשולש.
- ג. לשני משולשים חופפים.
- ד. לשני משולשים שווי-שוקיים.





הגדרה: מרובע שבו שתי צלעות סמוכות שוות באורכן, וגם שתי הצלעות האחרות שוות באורכן, נקרא **דלתון**.

תנאים מספיקים לזיהוי דלתון

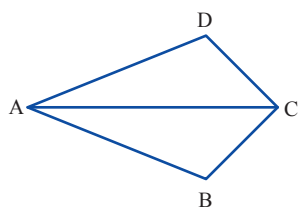
- אם במרובע אחד האלכסונים חוצה את הזוויות, אז המרובע הוא דלתון.
- אם במרובע האלכסונים מאונכים זה לזה, ואחד האלכסונים חוצה את האחר, אז המרובע הוא דלתון.

תכונות הדלתון

- אם מרובע הוא דלתון, אז האלכסון הראשי חוצה את זוויות הראש.
- אם מרובע הוא דלתון, אז האלכסון הראשי מאונך לאלכסון המשני וחוצה אותו.
- אם מרובע הוא דלתון, אז הזוויות שמול האלכסון הראשי שוות בגודלן.

הפוכים זה לזה

הפוכים זה לזה



אוסף משימות



1. **נתון** מרובע ABCD

$$AB = AD$$

האלכסון AC חוצה את הזווית A
הוכיחו: המרובע ABCD הוא דלתון.



2. **הוכיחו:** אם במרובע אלכסון אחד מאונך לאלכסון האחר וגם חוצה את אחת הזוויות, אז המרובע הוא דלתון.



3. **רק** אחת משתי הטענות הבאות נכונה. איזו מהן?

הסבירו על ידי דוגמה נגדית מדוע הטענה האחרת אינה נכונה.

א. אם אחד האלכסונים במרובע הוא **בסיס משותף** של שני משולשים שווי-שוקיים, אז המרובע הוא דלתון.

ב. אם אחד האלכסונים במרובע מחלק את המרובע לשני משולשים שווי-שוקיים, אז המרובע הוא דלתון.



4. בכל סעיף קבעו אם הטענה נכונה.

אם כן, הוכיחו.

אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

- אם אלכסון במרובע חוצה את הזוויות, אז המרובע הוא דלתון.
- אם האלכסונים במרובע חוצים זה את זה, אז המרובע הוא דלתון.
- אם במרובע כל הצלעות שוות באורכן, אז המרובע הוא דלתון.
- מרובע ששלוש מצלעותיו שוות באורכן הוא דלתון.



5. בכל סעיף קבעו אם קיים דלתון המתאים לנתונים.

אם קיים, נמקו את תשובתכם בעזרת שרטוט מתאים. אם לא קיים, הסבירו.

- האם קיים דלתון שיש בו רק זווית ישרה אחת?
- האם קיים דלתון שיש בו בדיוק שתי זוויות ישרות?
- האם קיים דלתון שיש בו בדיוק שלוש זוויות ישרות?
- האם קיים דלתון שכל זוויותיו ישרות?



6. בכל סעיף קבעו אם אפשר להסיק, על-סמך הנתונים, שהמרובע הוא דלתון.

אם כן, הוכיחו.

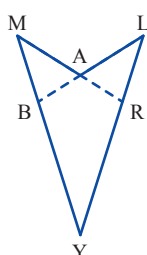
אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

- | | | |
|---------------------------------------|--|--|
| א. ☐ $AB = AD$ | ב. ☐ מרובע ABCD | ג. ☐ מרובע ABCD |
| האלכסון AC חוצה את | $\angle B = \angle D$ | $\angle B = \angle D$ |
| האלכסון BD | ו- AC חוצה את A | BD חוצה את B |



7. ☐ דלתון MALY

- המשיכו את LA עד לנקודת החיתוך עם MY וסימנו אותה ב-B.
- המשיכו את MA עד לנקודת החיתוך עם LY וסימנו אותה ב-R.
- האם אפשר להסיק שהמרובע BARY הוא דלתון?
- אם כן, הוכיחו.
- אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.





8. **ניתן** $\angle A = \angle C$

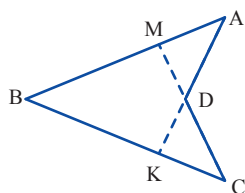
$$AB = BC$$

א. **הוכיחו:** $\triangle ABK \cong \triangle CBM$

ב. **הוכיחו:** $KC = AM$

ג. **הוכיחו:** $DC = DA$

ד. האם יש דלתונים בשרטוט? אם כן, אילו הם?



9. המרובע ABCD הוא דלתון.

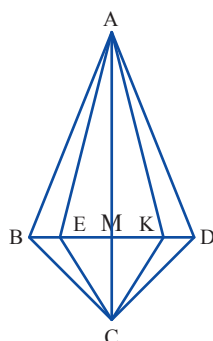
$$BE = KD \text{ (ראו שרטוט.)}$$

נסקנה מרובע AECK הוא דלתון.

א. כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. אילו זוגות משולשים צריך לחפוף כדי להוכיח?

ג. **הוכיחו:** מרובע AECK הוא דלתון.

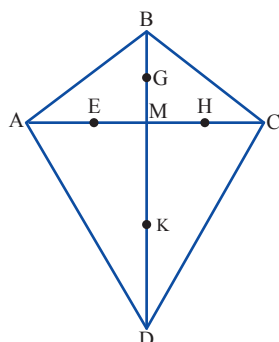


10. **ניתן** המרובע ABCD הוא דלתון

הנקודות E, G, H, K הן אמצעי הקטעים המחברים את קדקודי הדלתון

עם M (נקודת החיתוך של האלכסונים)

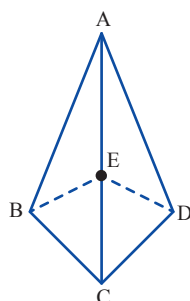
הוכיחו: המרובע KHGE הוא דלתון.



11. **ניתן** המרובע ABCD הוא דלתון

E נקודה על האלכסון הראשי AC

הוכיחו: המרובעים ABED ו-BCDE הם דלתונים.



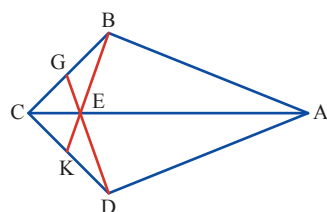
12. **ניתן** המרובע ABCD הוא דלתון.

E נקודה על האלכסון הראשי AC

המשך הישר BE חותך את DC בנקודה K

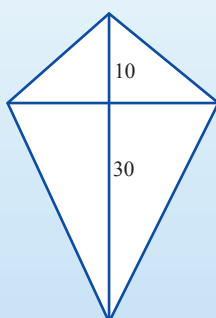
המשך הישר DE חותך את BC בנקודה G

הוכיחו: מרובע CGEK הוא דלתון.

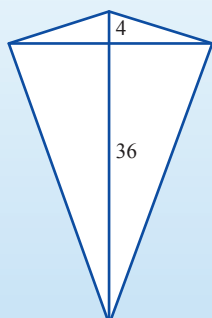


שיעור 3. שטח דלתון

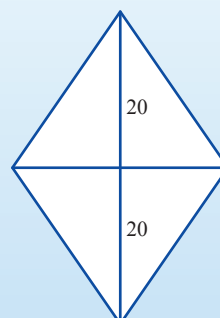
הכינו שלושה עיפונים משני מקלות מאונכים.
 בכל עיפון המקל הארוך שאורכו 40 ס"מ
 חוצה את המקל הקצר שאורכו 30 ס"מ.
 (ראו שרטוטים להדגמה).



III



II



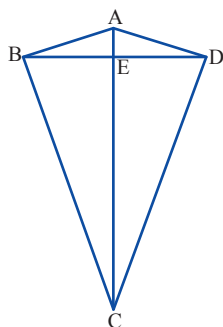
I

האם לכל העיפונים אותו שטח? האם לכל העיפונים אותו היקף?

נחשב שטח והיקף של דלתון.

1. נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

- חשבו את השטח של שלושת העיפונים. (חשבו שטחי משולשים).
 האם לכל העיפונים אותו שטח? אם לא, שטחו של איזה עיפון הוא הגדול ביותר?
- חשבו את אורכי הצלעות של הדלתונים I ו-II ואת ההיקפים שלהם.
 האם לשני העיפונים אותו היקף? אם לא, לאיזה עיפון היקף גדול יותר?

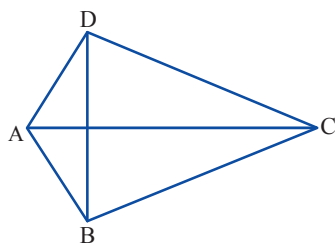


- בטאו את שטח $\triangle ABD$ באמצעות BD ו-AE.
 - בטאו את שטח $\triangle CBD$ באמצעות BD ו-CE.
 - בטאו את שטח הדלתון כסכום שטחי המשולשים.
 - הראו כי שטח דלתון שווה למחצית מכפלת אורכי האלכסונים.



שטח דלתון שווה למחצית מכפלת אורכי האלכסונים.

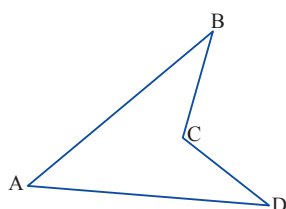
זמנה: שטח הדלתון ABCD שבשרטוט הוא: $S = \frac{AC \cdot BD}{2}$



3. דרך הקדקודים של דלתון שרטטו ישרים מקבילים לאלכסונים והתקבל מלבן ששטחו 12 סמ"ר. מה שטח הדלתון? הסבירו.



4. האם גם שטח דלתון קעור שווה למחצית מכפלת אורכי האלכסונים? אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.



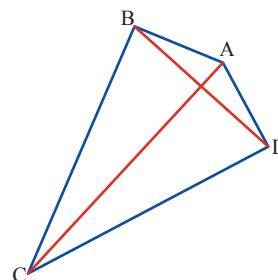
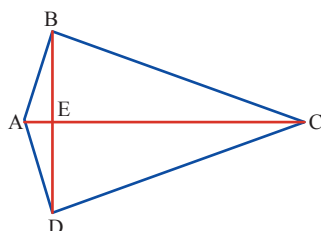
אוסף משימות



1. חשבו את שטחי הדלתונים לפי הנתונים.

ב. $AE = 6, EC = 15, BD = 10$

א. $AC = 24, BD = 10$



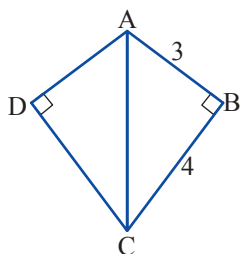
2. שטח דלתון הוא 42 סמ"ר. אורך אחד האלכסונים הוא 7 ס"מ. מצאו את אורך האלכסון השני.



3. שרטטו על דף משובץ שני דלתונים שונים ששטחם 12 משבצות.



4. בדלתון ABCD שתי זוויות ישרות, ואורכי צלעותיו נתונים בשרטוט. (השרטוט הוא להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.)



- א. מה שטח הדלתון?
- ב. חשבו את אורכי האלכסונים.



5. הוכיחו: שטח כל מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה שווה למחצית מכפלת אורכי האלכסונים.



6. אורכו של האלכסון הראשי בדלתון 32 ס"מ, ואורכו של האלכסון המשני 18 ס"מ. האלכסון המשני מחלק את האלכסון הראשי ביחס של 5:3

- א. מצאו את שטח הדלתון.
- ב. מצאו את היקף הדלתון.
- ג. מה היחס בין שטחיהם של שני המשולשים שווי-השוקיים, שהאלכסון המשני הוא בסיסם המשותף.



7. הנקודות $(0, 4)$, $(3, 0)$, ו- $(0, -6)$ הן שלושה קדקודים של דלתון. שרטטו את הדלתון במערכת צירים משובצת (כל יחידה על הצירים היא אורך צלע משבצת). מה שטח הדלתון? (יחידת השטח היא משבצת.)



8. הנקודות $A(-4, 0)$ ו- $B(6, 0)$ הן קצות אלכסון של דלתון. א. שרטטו שני דלתונים שונים: באחד מהם AB אלכסון ראשי, ובשני AB אלכסון משני, ולשניהם אותו שטח. הסבירו.

ב. האם תוכלו לשרטט דלתון שבו AB הוא אחד האלכסונים, ושני האלכסונים שווים באורכם?



9. המרובע ELAD הוא דלתון.

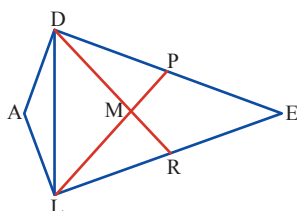
$$EL = ED$$

$$AL = AD$$

LP תיכון לצלע ED במשולש $\triangle LED$.

DR תיכון לצלע LE במשולש $\triangle LED$.

M נקודת מפגש התיכונים



א. מהו סוג המרובע PERM? הוכיחו. (רמז: הוכיחו תחילה $\triangle ELP \cong \triangle EDR$.)

ב. כמה דלתונים בשרטוט? הוכיחו.



שומרים על כושר

בעיות מילוליות בשני משתנים

1. **מיכל** קנתה כוסות וצלחות, בסך הכל 21 פריטים. היא שילמה 152 שקלים. מחיר כל כוס 6 שקלים, ומחיר כל צלחת 8 שקלים.
א. אילו ערכים מתאימים למספר הצלחות ולמספר הכוסות?
ב. מצאו כמה כוסות וכמה צלחות קנתה **מיכל**. הסבירו.
2. 4 עטים ו- 2 עפרונות עולים יחד 17 שקלים.
2 עטים ו- 4 עפרונות עולים 13 שקלים.
א. אילו ערכים מתאימים למספר העטים ולמספר העפרונות?
ב. מצאו מה מחיר עט אחד ומה מחיר עיפרון אחד. הסבירו.
3. 8 כרטיסים זולים להופעה ו- 5 כרטיסים יקרים עולים 116 שקלים.
מחיר 3 כרטיסים יקרים גדול ב- 8 שקלים ממחיר 4 כרטיסים זולים.
א. אילו ערכים מתאימים למחיר כרטיס להופעה?
ב. מצאו מהו התשלום בעבור 3 כרטיסים זולים ו- 2 כרטיסים יקרים. הסבירו.
4. בפנימייה שני סוגי חדרים: חדרים גדולים וחדרים קטנים.
בכל סוג של חדר יש מספר שווה של מיטות.
בקומה הראשונה 5 חדרים גדולים ו- 3 חדרים קטנים. בקומה זאת יש מקום ל- 29 ילדים.
בקומה השנייה 4 חדרים גדולים ו- 4 חדרים קטנים. בקומה זאת מקום ל- 28 ילדים.
א. קבעו, אם אפשר, מהו המספר הגדול ביותר ומהו המספר הקטן ביותר האפשרי של מיטות בכל חדר קטן ובכל חדר גדול. הסבירו.
ב. מצאו כמה מיטות יש בחדר גדול וכמה מיטות יש בחדר קטן. הסבירו.
ג. בקומה הראשונה יש חדר קטן ריק ובקומה השנייה, באחד החדרים הגדולים יש 3 ילדים בלבד. כמה ילדים יש בשתי הקומות? הסבירו.
5. **יוסי וראובן** רצו לקנות משחק מחשב בסכום של 600 שקלים.
שניהם רצו להשתמש בחסכונותיהם, אך לאף אחד מהם לא היה די כסף לקנות את המשחק בעצמו.
יוסי אמר: אם תתן לי $\frac{3}{5}$ מכספך, יהיה לי סכום כסף המספיק בדיוק לקניית המשחק.
ראובן אמר: אם תתן לי $\frac{1}{3}$ מכספך, יהיה לי סכום כסף, המספיק בדיוק לקניית המשחק.
א. תארו מה יכולים להיות הסכומים שהיו לכל אחד מהם.
ב. מצאו כמה כסף היה לכל אחד.