

יחידה 10: הסתברות - דיאגרמת עץ

שיעור 1. חישוב הסתברויות בעזרת דיאגרמת עץ

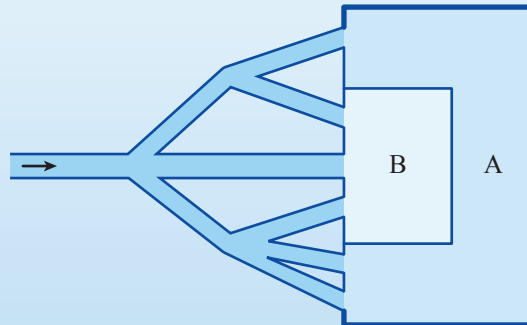
לפניכם שרטוט של מבוך.

בערב היתולי לקראת פורים שיחקו הבנות ואימותיהן במבוך.

כל אימא בוחרת באיזה חדר לעמוד (A או B).

כל בת עוברת במבוך. אם תגיע אל אימא, תזכה בפרס.

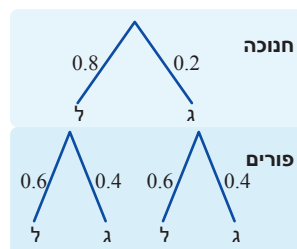
(בכל צומת, בחירת מסלול ההמשך נעשית באקראי.)



שערו: היכן כדאי לאימא לעמוד? הסבירו.

נכיר את דיאגרמת העץ לחישוב הסתברויות.

1. ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2, וההסתברות לגשם בערב פורים היא 0.4



		חנוכה	
		ג 0.2	ל 0.8
פורים	ג 0.4		
	ל 0.6		

העתיקו את דיאגרמת העץ ואת דיאגרמת השטח.

צבעו את השטח המתאים ואת המסלול המתאים וחשבו את ההסתברות של המאורעות הבאים:

- בשנה מסויימת יירד גשם בשני החגים.
- בשנה מסויימת יירד גשם בערב חנוכה ולא בערב פורים.
- בשנה מסויימת יירד גשם באחד משני החגים.





במשימה 1 הכרנו **דיאגרמת עץ**.

אפשר לחשב הסתברויות של מאורעות באמצעות **דיאגרמת עץ**.
בדיאגרמת עץ כל תוצאה מיוצגת על-ידי מסלול.

- ההסתברות של תוצאה מתקבלת על-ידי **כפל** ההסתברויות הרשומות לאורך המסלול.
דוגמה: במשימה 2 ההסתברות שיירד גשם בשני החגים היא $0.2 \cdot 0.4 = 0.08$

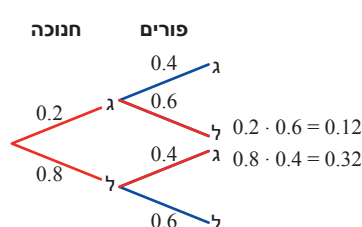


	ג	ל	
חגים	0.2	0.8	
ג	0.4		$0.8 \cdot 0.4 = 0.32$
ל	0.6		$0.2 \cdot 0.6 = 0.12$

- כדי לחשב את ההסתברות של מאורע שבו יותר מתוצאה אחת, **מחברים** את ההסתברויות של התוצאות המתאימות.

דוגמה: במשימה 2 ההסתברות שבאותה שנה יירד גשם רק באחד משני החגים היא:
ההסתברות שיירד גשם בחנוכה ולא בפורים או ההסתברות שיירד גשם בפורים ולא בחנוכה.

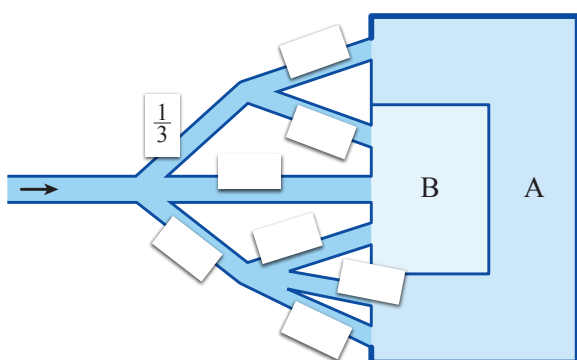
	ג	ל	
חגים	0.2	0.8	
ג	0.4		$0.8 \cdot 0.4 = 0.32$
ל	0.6		$0.2 \cdot 0.6 = 0.12$



המאורע כולל שתי אפשרויות. לכן ההסתברות שיירד גשם באחד משני החגים היא:
 $0.32 + 0.12 = 0.44$

2. נחזור למשימת הפתיחה.

א. שרטטו את הדיאגרמה של המבוק והוסיפו ליד כל מסלול את ההסתברות לבחור באותו מסלול.
דוגמה: בצומת הראשון יש פיצול לשלושה מסלולים.
לכן ההסתברות לבחור במסלול העליון היא $\frac{1}{3}$



- מה ההסתברות להגיע לחדר A דרך המסלול העליון?
- מה ההסתברות להגיע לחדר A דרך המסלול התחתון או זה שלידו?
- מה ההסתברות להגיע לחדר A?
- מה ההסתברות להגיע לחדר B?
- היכן כדאי לאימא לעמוד?

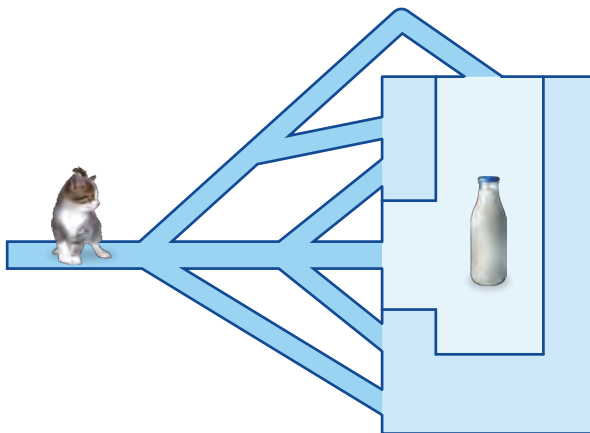
3. ההסתברות לפגוש ברחוב במדינת ישראל אדם שאוהב לאכול פלאפל היא 0.7
- א. מה ההסתברות שמבין שני אנשים שפוגשים ברחוב, האחד אוהב לאכול פלאפל, והאחר אינו אוהב פלאפל?
- ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מבין שני אנשים שפוגשים ברחוב, אוהב לאכול פלאפל?
- ג. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מבין שני אנשים שפוגשים ברחוב, אוהב לאכול פלאפל?



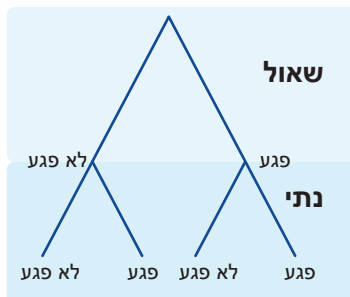
- משמעות הביטוי "לפחות [מספר]" היא המספר עצמו והמספרים הגדולים ממנו.
- משמעות הביטוי "לכל היותר [מספר]" היא המספר עצמו והמספרים הקטנים ממנו.



אוסף משימות



1. חתול עומד בתחילת השביל.
מה ההסתברות שהחתול יגיע אל כד החלב?
(מניחים כי בכל צומת ההסתברויות לבחור כל אחד מהמסלולים שוות).

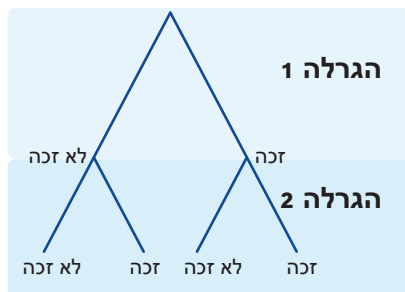


2. **שאל ונתי** יורים חץ למטרה.
- ההסתברות ש**שאל** יפגע במטרה היא 0.4
- ההסתברות ש**נתי** יפגע במטרה היא 0.3
- א. העתיקו את דיאגרמת העץ וכתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.
- ב. צבעו את המסלול המתאים להסתברות ששניהם יפגעו במטרה.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.
- ג. צבעו את המסלול המתאים להסתברות ששניהם **לא** יפגעו במטרה.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.



3. במחנה קיץ ערכו שתי הגרלות.

הגרלה אחת נערכה ביום הראשון של המחנה, ובה זכו $\frac{1}{5}$ מהמשתתפים.
הגרלה שנייה נערכה ביום האחרון של המחנה, ובה זכו 25% מהמשתתפים.
כל אחד השתתף בשתי ההגרלות.



א. העתיקו וכתבו על כל ענף, בדיאגרמת העץ, את ההסתברות המתאימה.

ב. צבעו את המסלול המתאים להסתברות ששתתף **לא יזכה** באף אחת משתי ההגרלות.

חשבו את ההסתברות של מאורע זה.

ג. צבעו בצבע אחר את המסלול המתאים להסתברות ששתתף **יזכה בשתי** ההגרלות.

חשבו את ההסתברות של מאורע זה.

ד. צבעו בצבע אחר את המסלולים המתאימים להסתברות ששתתף **יזכה** בהגרלה **אחת**.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.

ה. חשבו את סכום ההסתברויות של סעיפים ב-ד. נסחו במילים מה קיבלתם. הסבירו.



4. 80% מהתלמידות בכיתה ט כותבות רק ביד ימין, ו- 30% מהתלמידות מרכיבות משקפיים.
תלמידה נבחרת באקראי. (התלמידות בכיתה ט כותבות רק ביד ימין או רק ביד שמאל).
מה ההסתברות שהתלמידה שנבחרה כותבת רק ביד שמאל ומרכיבה משקפיים?
(היעזרו בדיאגרמת עץ או בדיאגרמת שטח מתאימות).



5. ההסתברות לפגוש אדם שגובהו מעל 180 ס"מ בעיר "גבהים" היא 0.4
ההסתברות לפגוש אדם שמרכיב משקפיים בעיר "גבהים" היא 0.2

א. שרטטו דיאגרמת עץ ורשמו הסתברויות מתאימות על הענפים.

ב. צבעו את המסלול המתאים להסתברות לפגוש אדם שגובהו פחות מ- 180 ס"מ והוא מרכיב משקפיים.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.

ג. צבעו את המסלול המתאים להסתברות לפגוש אדם שגובהו יותר מ- 180 ס"מ והוא מרכיב משקפיים.
חשבו את ההסתברות של מאורע זה.

ד. מהו סכום המאורעות בסעיפים ב ו- ג? הסבירו.



6. כדור נזרק לפתח העליון ויכול להגיע למסלול ה**אדום**, ה**כחול**, ה**ירוק** או ה**אפור**.

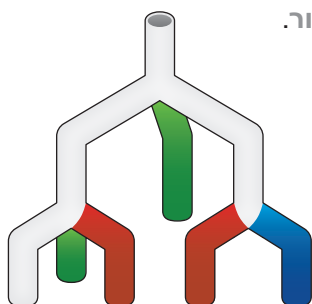
בכל צומת יש לכדור סיכוי זהה להיכנס לכל מסלול.

חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. הכדור יגיע למסלול ה**כחול**.

ב. הכדור יגיע למסלול ה**אפור**.

ג. הכדור יגיע למסלול ה**ירוק**.

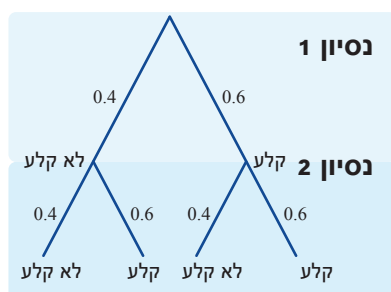


7. קלע יורה פעמיים למטרה.

מצאו מאורע מתאים (היעזרו בדיאגרמת העץ):

א. הסתברות המאורע 0.16

ב. הסתברות המאורע 0.48



8. ההסתברות ש**יוסף** יקלע לסל בכל זריקה היא 0.65

יוסף זורק כדור לסל פעמיים.

א. חשבו את ההסתברות ש**יוסף** יקלע לסל פעם אחת **לפחות**?

ב. חשבו את ההסתברות ש**יוסף** יקלע לסל פעם אחת **לכל היותר**?

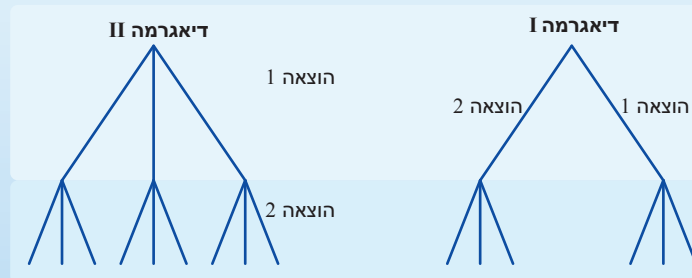


שיעור 2. הוצאות עם החזרות

בכד 20 כדורים: 6 כחולים, 12 לבנים ו-2 סגולים.

יפי מוציאה מתוך הכד בלי להסתכל כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לכד. היא מוציאה כדור נוסף בלי להסתכל ורושמת את צבעו.

איזו מבין דיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות להוצאת שני כדורים על-ידי **יפי**? הסבירו.



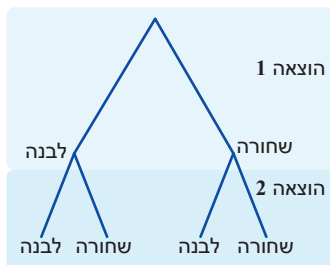
נמשיך לחשב הסתברויות בעזרת דיאגרמת עץ.

1 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

א. העתיקו את דיאגרמת העץ המתאימה והשלימו את ההסתברויות.

ב. חשבו את ההסתברות להוציא:

- שני כדורים **כחולים**.
- שני כדורים לבנים.
- שני כדורים בצבעים שונים.



2. בתוך שק ישנם 50 חולצות - 15 חולצות שחורות והשאר לבנות.

מיכל מוציאה מתוך השק באקראי חולצה אחת, רושמת את צבעה ומחזירה את החולצה לשק.

היא מוציאה באקראי חולצה נוספת ורושמת את צבעה.

א. השלימו את דיאגרמת העץ.

ב. חשבו את ההסתברות להוציא חולצות בצבעים האלה:

- להוציא שתי חולצות לבנות.
- להוציא שתי חולצות שחורות.
- להוציא שתי חולצות בצבעים שונים.

3. בתוך שק ישנם 25 כדורים: 11 כחולים, 9 ירוקים ו-5 כתומים.

יהודית מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לכד.

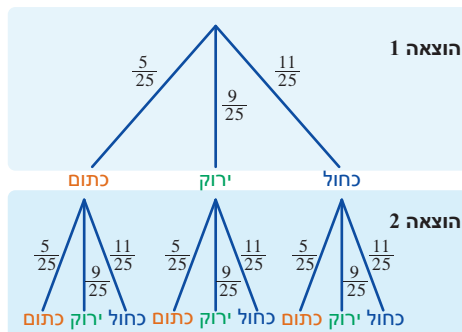
היא מוציאה באקראי כדור נוסף ורושמת את צבעו.

א. שרטטו דיאגרמת עץ.

ב. חשבו את ההסתברות:

- להוציא שני כדורים **כחולים**.
- להוציא שני כדורים בצבעים שונים.

4. בכד 30 כדורים חלקם **כחולים** וחלקם **אדומים**. ההסתברות להוציא באקראי כדור **כחול** מהכד היא $\frac{4}{5}$
- כמה כדורים **כחולים** בכד?
 - שרטטו דיאגרמת עץ.
 - חשבו את ההסתברות להוציא באקראי כדור **אדום**, להחזיר לכד ולהוציא באקראי כדור **אדום** נוסף.



בכל נקודת פיצול שבדיאגרמת עץ סכום ההסתברויות הוא 1.
מסקנה: במשימה 3 בכל נקודת פיצול ישנם שלושה ענפים.

סכום ההסתברויות על שלושת הענפים הוא

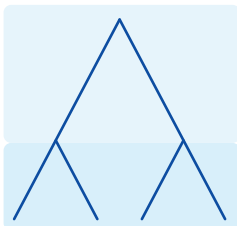
$$\frac{11}{25} + \frac{9}{25} + \frac{5}{25} = 1$$



אוסף משימות



1. בכד 20 כדורים: 8 **כחולים** ו-12 לבנים.
- ששית** מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לכד.
- ששית** מוציאה באקראי כדור נוסף ורושמת את צבעו.



- השלימו את דיאגרמת העץ.
- חשבו את ההסתברות:
 - להוציא שני כדורים **כחולים**.
 - להוציא שני כדורים לבנים.
 - להוציא שני כדורים בצבעים שונים.



2. בשק 32 כדורים: 12 כדורי-סל ו-20 כדורי-רגל.
- חני** מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את סוגו ומחזירה את הכדור לשק.
- חני** מוציאה כדור נוסף באקראי ורושמת את סוגו.
- שרטטו דיאגרמת עץ.
 - חשבו את ההסתברות להוציא שני כדורים מסוגים שונים.



3. בכד 48 כדורים חלקם **כתומים** וחלקם **סגולים**. ההסתברות להוציא באקראי כדור **כתום** מהכד היא $\frac{3}{4}$

א. כמה כדורים **כתומים** בכד?

ב. **אמונה** מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לשק.

אמונה מוציאה כדור נוסף באקראי ורושמת את צבעו.

חשבו את ההסתברות להוציא באקראי כדור **סגול** אחד **לכל היותר**.



4. בשק אטום 10 כדורים **אדומים** ו-8 כדורים **ירוקים**.

אסתי מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לכד.

אסתי מוציאה באקראי כדור נוסף ורושמת את צבעו.

חשבו את ההסתברות להוציא באקראי **לפחות** כדור **ירוק** אחד.



5. בכד 20 כדורים: 10 **כחולים**, 5 לבנים ו-5 **ירוקים**.

מירי מוציאה מתוך הכד באקראי כדור אחד, רושמת את צבעו ומחזירה את הכדור לכד.

מירי מוציאה באקראי כדור נוסף ורושמת את צבעו.

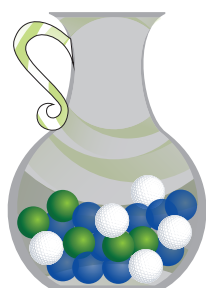
א. שרטטו דיאגרמת עץ.

ב. חשבו את ההסתברות:

- להוציא שני כדורים באותו צבע.

- להוציא **לפחות** כדור אחד לבן.

- להוציא **לכל היותר** כדור אחד לבן.



6. בקופסה 60 קלפים בצבעים שונים.

$\frac{1}{5}$ מהקלפים צבועים **באדום**.

20 מהקלפים צבועים **בכחול**.

א. אם נבחר באקראי קלף אחד מהקופסה,

מהי ההסתברות שהקלף יהיה בצבע שאינו **אדום** או **כחול** ?

ב. מוציאים מתוך הקופסה קלף אחד באקראי.

רושמים את צבעו ומחזירים את הקלף לקופסה.

מוציאים שוב ורושמים את צבעו.

מה ההסתברות שאחד הקלפים יהיה **אדום** והאחר **כחול** ?



שיעור 3. ענפים נוספים בעץ

אלי יוסי ואבי יורים למטרה לפי התור. כל אחד מהם יורה פעם אחת בלבד.



ההסתברות שאלי יפגע במטרה היא $\frac{1}{2}$

ההסתברות שיוסי יפגע במטרה היא $\frac{1}{3}$

ההסתברות שאבי יפגע במטרה היא $\frac{2}{5}$

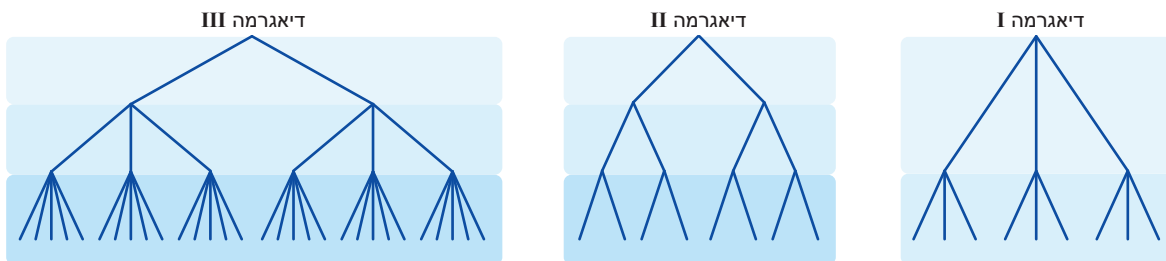
מה ההסתברות שלפחות אחד הקלעים יפגע במטרה?

נלמד להשתמש בדיאגרמת העץ לחישוב ההסתברויות של מאורעות מורכבים.

דיאגרמת עץ עם שלושה שלבים

נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

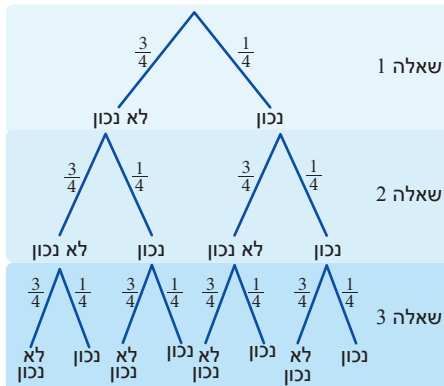
1. א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות של שלושת הקלעים? הסבירו. השלימו את ההסתברויות המתאימות על ענפי העץ בדיאגרמה שבחרתם.



- ב. מה ההסתברות ששלושת הקלעים יפגעו במטרה?
- ג. מה ההסתברות שלפחות אחד הקלעים יפגע במטרה?
- ד. מה ההסתברות שלכל היותר שני קלעים יפגעו במטרה?

2. במבחן רב-בִּרְרָה (אמריקני) 3 שאלות. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות, ורק אחת מהן נכונה. טובה אינה מתמצאת בנושא ולכן החליטה לסמן את התשובה הנכונה באופן אקראי. מה ההסתברות שטובה תענה נכון על כל שלוש השאלות?





דיאגרמת עץ נוחה במיוחד לשימוש במאורעות בעלי שלושה שלבים או יותר.

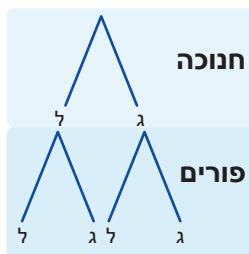
מל/3: במשימה 2 כל שאלה במבחן היא שלב בעץ.

כל שלב מפצלים לשני ענפים:

"תבחר בתשובה הנכונה" או "תבחר בתשובה לא נכונה".

ההסתברות **שטובה** תענה נכון על כל שלוש

השאלות היא $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$.



3. ההסתברות לגשם בערב חנוכה היא 0.2, ההסתברות לגשם

בערב פורים היא 0.4, וההסתברות לגשם בערב פסח היא 0.1

א. בשרטוט שני השלבים הראשונים בבניית דיאגרמת העץ.

העתיקו את הדיאגרמה וכתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.

ב. בשלב שלישי פצלו כל ענף לשתי אפשרויות: "גשם" או "לא גשם" בפסח.

שרטטו וכתבו על כל ענף את ההסתברות המתאימה.

ג. חשבו את ההסתברות שבאותה שנה יירד גשם בחנוכה, בפורים ובפסח.

ד. חשבו את ההסתברות שבאותה שנה יירד גשם רק באחד משלושת החגים.

ה. חשבו את ההסתברות שבאותה שנה יירד גשם לפחות באחד משלושת החגים.

(המאורע "יירד גשם לפחות בחג אחד" הוא מאורע משלים למאורע "לא יירד גשם באף אחד משלושת החגים").



תזכורת

סכום ההסתברויות של שני מאורעות משלימים הוא 1.



דיאגרמת השטח מתאימה למאורעות בעלי שני שלבים, ואילו דיאגרמת העץ מתאימה גם למאורעות עם יותר שלבים.

דוגמה: במשימה 3 מצאנו הסתברויות במאורעות בעלי שלושה שלבים.

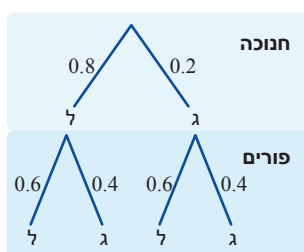
דיאגרמת עץ



דיאגרמת שטח

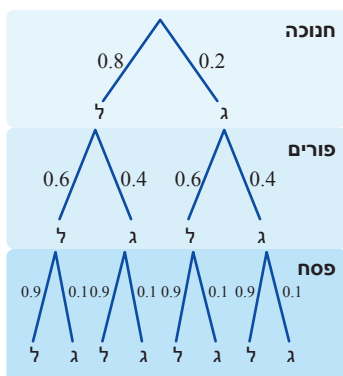
חנוכה	
ג	ל
0.2	0.8

שלב א - חנוכה



חנוכה			
ג	ל		
0.2	0.8		
ג	ל	0.4	0.6
פורים	ל	0.6	0.4

שלב ב - פורים



שלב ג - פסח





אוסף משימות



1. התפלגות האוכלוסייה בארץ לפי סוג דם היא:

40% – A 20% – B 5% – AB 35% – O

בחרים באקראי שני אנשים: **משה** ו**דניאל**.

מצאו את ההסתברויות של המאורעות הבאים (היעזרו בדיאגרמת השטח או בדיאגרמת עץ).

א. סוג הדם של שניהם O.

ב. סוג הדם של **משה** A ושל **דניאל** B.

ג. סוג הדם של אחד מהם A ושל השני B.

ד. לשניהם אותו סוג דם.



2. ההסתברות לזכות בכרטיס טיסה חינוך בחברת "שחקים" היא 0.1

משפחת מזל קנתה שלושה כרטיסים.

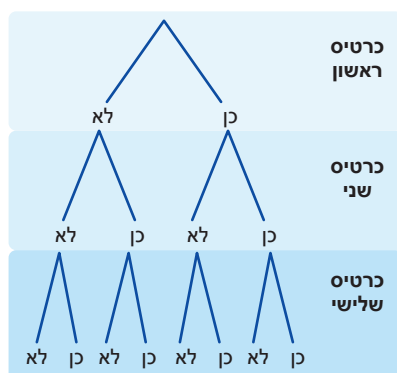
לפניכם דיאגרמת עץ המתאימה לסיפור.

א. רשמו על הענפים את ההסתברויות המתאימות לזכייה או

לא זכייה בכרטיס טיסה.

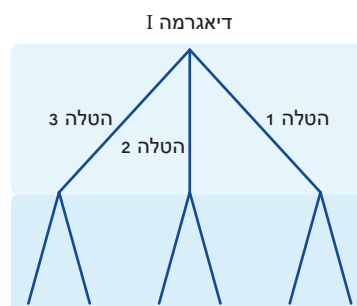
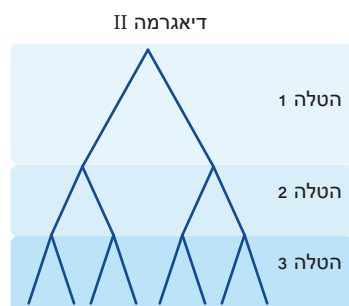
ב. מה ההסתברות ש**משפחת מזל** **לא** תזכה כלל בכרטיס חינוך?

ג. מה ההסתברות ש**משפחת מזל** תזכה בכרטיס חינוך אחד?



3. מטילים קוביית משחק 3 פעמים ובודקים כמה פעמים התקבל מספר זוגי.

א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברויות של שלוש הטלות הקובייה? הסבירו.



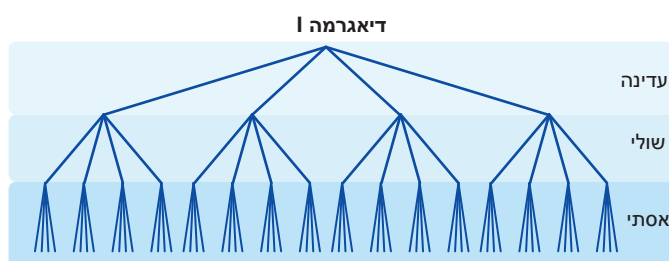
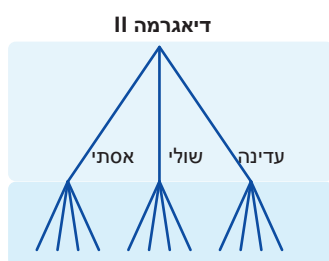
ב. מה ההסתברות לקבל בשלוש ההטלות מספרים זוגיים?



4. מטילים קוביית משחק 3 פעמים.
מה ההסתברות לקבל בשלוש ההטלות מספרים ראשוניים?



5. **עדינה, שולי ואסתי** מסובבות כל אחת סביבון לחנוכה, לפי התור.
א. איזו מדיאגרמות העץ שלפניכם מתאימה לתיאור ההסתברות של כל תוצאה אפשרית? הסבירו.



ב. מה ההסתברות ששלושת הסביבונים ייפלו על אותה אות?



6. מסובבים את המחוג של ה"שעון" בשרטוט שלוש פעמים.
היעזרו בדיאגרמת עץ וחשבו את ההסתברות לקבל בשלושת הסיבובים תוצאה שלילית.



7. מסובבים את המחוג של ה"שעון" בשרטוט שלוש פעמים.
היעזרו בדיאגרמת עץ וחשבו את ההסתברות לקבל בשלושת הסיבובים תוצאה שלילית.



שיעור 4. משימות נוספות



בהטלת מטבע, הסיכוי לקבל "עץ" שווה לסיכוי לקבל "מספר".
מה ההסתברות שאם הטילו את המטבע פעמיים,
יתקבל פעמיים "מספר"?

נחשב הסתברויות.

1. בהטלת מטבע שלוש פעמים, מה ההסתברות לקבל פעמיים "מספר" ופעם אחת "עץ" (בכל סדר שהוא)?

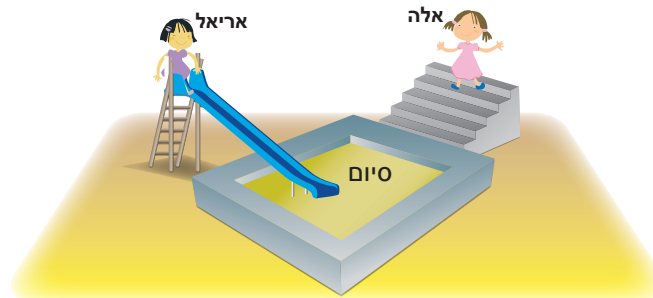
2. בהטלת מטבע ארבע פעמים, מה ההסתברות לקבל פעמיים "מספר" ופעמיים "עץ" (בכל סדר שהוא)?



3. מטילים קובייה.

אם מתקבל 6, **אסתי** יורדת במגלשה ומנצחת.

אם מתקבל מספר שונה מ-6, **דינה** יורדת מדרגה אחת.
(**דינה** צריכה לרדת 5 מדרגות כדי לנצח).



א. האם המשחק הוגן?

למי, לדעתכם, יש סיכוי גדול יותר לנצח?

ב. חשבו את ההסתברות של **אסתי** לנצח.

ג. חשבו את ההסתברות של **דינה** לנצח.

ד. בדקו כמה מדרגות צריכות להיות בדרכה של **דינה**, כדי שהמשחק יהיה הוגן ככל האפשר.



אוסף משימות



1. לפניכם "שעון" משחק.

מסובבים את מחוג ה"שעון" פעמיים ומכפילים את שני המספרים המתקבלים.

א. מה ההסתברות שהמכפלה תהיה אפס?

ב. באחד המשחקים המספר הראשון שעליו נעצר המחוג היה אפס.

מה ההסתברות שבמשחק זה תהיה המכפלה אפס?

מה ההסתברות שבמשחק זה תהיה המכפלה חיובית?

ג. במשחק אחר המספר הראשון שעליו נעצר המחוג היה 3.

מה ההסתברות שבמשחק זה תהיה המכפלה אפס?

מה ההסתברות שבמשחק זה תהיה המכפלה חיובית?

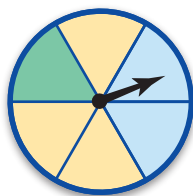


2. מסובבים פעמיים את המחוג של ה"שעון" שבשרטוט.

בכל סעיף חשבו את ההסתברות של המאורע הנתון:

א. לקבל פעמיים תכלת.

ב. לקבל תכלת וצהוב (לא חשוב הסדר).

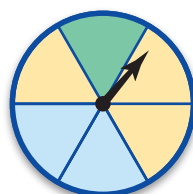


3. מסובבים פעמיים את המחוג של ה"שעון" שבשרטוט.

חשבו את ההסתברות:

א. לקבל פעמיים אותו צבע.

ב. לקבל שני צבעים שונים.



4. במפעל אלקטרוניקה היחס בין מספר העובדים החדשים לוותיקים הוא 5:2

בוחרים באקראי שני עובדים.

מה ההסתברות ששני העובדים שנבחרו יהיו חדשים?



5. בכיתה מסוימת חלק מהתלמידות הן שמאליות (כותבות רק ביד שמאל) וחלקן ימניות (כותבות רק ביד ימין)

ואין תלמידות שכותבות בשתי הידיים.

ההסתברות שבבחירה אקראית של שתי תלמידות מן הכיתה יהיו שתיהן ימניות, היא 0.64

מה אחוז התלמידות השמאליות בכיתה?