

הוכחות ותפקידן

תשובות של תלמידים

- ❖ כי זה מה שעושים במתמטיקה.
- ❖ כי משפטים צריך להוכיח.
- ❖ כי זה מפתח את השכל.
- ❖ כי זה יעזור לנו בהמשך.
- ❖ כי המורה שלי אמר שצריך להוכיח.
- ❖ זה כמו לשחק במשחק עם כללים מסוימים: אסור להסתמך על מה שרואים, או מודדים, או חושבים שזה נכון.

"הצלחות"

מחקרים שנעשו בעולם דיווחו על חוסר הצלחה של תלמידים בבנייה של הוכחות ובהבנה של משמעות ההוכחה ותפקידיה.

(Senk 1985) דיווחה על מחקר רחב היקף שערכה בין תלמידי כיתות י' בארה"ב שלמדו להוכיח בגיאומטריה במשך שנה שלמה. היא מצאה כי רק 31% מהתלמידים הצליחו להוכיח 3 מתוך 4 הטענות שניתנו להם. 50% מהתלמידים לא הצליחו לבנות אף הוכחה, או שהצליחו לבנות רק הוכחה אחת שהייתה למעשה קצרה ופשוטה ביותר. כמסקנה, טוענת החוקרת, כי אימון ודרישה להוכיח עוד ועוד משפטים מאותו סוג אינה מוכיחה את עצמה וחייבת להשתנות.

❖ מחקר מקיף שנערך באנגליה מראה כי תלמידי תיכון מאמצים דפוסי הוכחה בהתאם למה שלמדו, בין אם הדפוס מתאים ובין אם לאו, אינם רואים הוכחה כמקנה נכונות אוניברסלית לטענה, ומשתמשים בדוגמאות כדי להוכיח (Hoyles, 1997; Jones, 1997).

אז מה עושים?

פעילויות העוסקות, במקביל להוכחת טענות נכונות, בהפרכת
טענות שאינן נכונות באמצעות דוגמאות נגדיות.

קבעו איזה מרובע מתקבל על סמך הנתונים והוכיחו. (ריבוע,
מלבן, מעוין, מקבילית, דלתון, טרפז או מרובע אחר.)

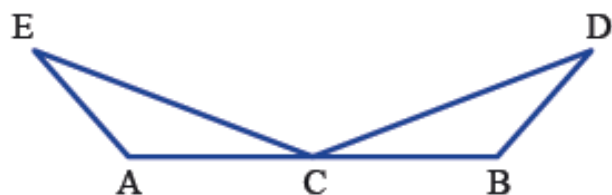
מרובע שאלכסוניו מאונכים ושווים זה לזה.

מרובע שאלכסוניו מאונכים זה לזה ואחד מהם חוצה את השני.

מרובע ששלוש מצלעותיו שוות זו לזו.

מרובע שיש לו זוג צלעות נגדיות שוות וזוג זוויות נגדיות שוות.

פעילויות העוסקות, במקביל להוכחת טענות נכונות, בהפרכת טענות שאינן נכונות באמצעות בנייה של דוגמאות נגדיות.



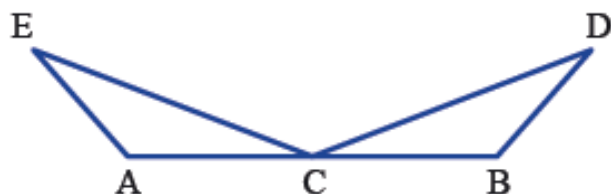
8. א. $EA = DB$ נכון

$\angle A = \angle B$

העתיקו וסמנו את הנתונים בשרטוט.

האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



9. ב. $EA = DB$ נכון

$\angle A = \angle B$

C אמצע AB

העתיקו וסמנו את הנתונים בשרטוט.

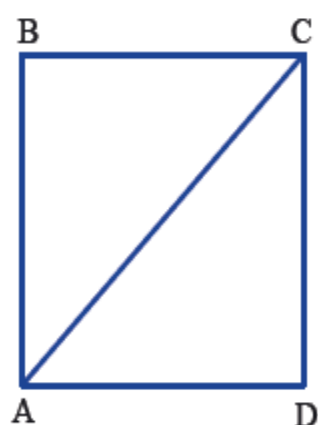
האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?



שאלה

5.

אם המרובע ABCD הוא ריבוע, אז האלכסון AC חוצה את הזוויות A ו- C.



א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח, והוכיחו.

ב. נסחו טענה הפוכה למשפט הנתון.

ג. האם הטענה ההפוכה, היא טענה נכונה?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



6.

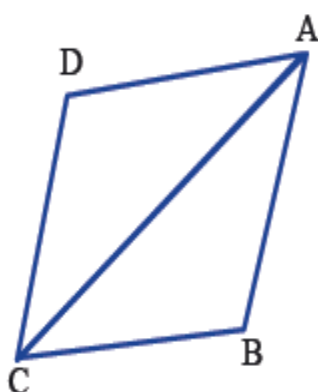
א. הוכיחו את המשפט: אם במרובע ABCD כל הצלעות שוות,

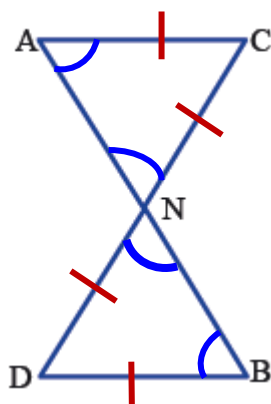
אז האלכסון AC חוצה את הזוויות A ו- C.

ב. נסחו טענה הפוכה למשפט הנתון.

ג. האם הטענה ההפוכה, היא טענה נכונה?

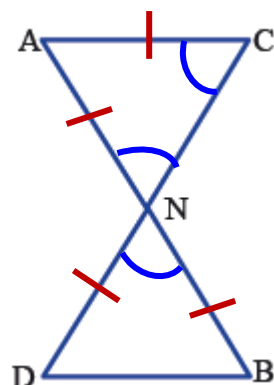
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.





9*. נתון/ $AC = DN = DB$
 $\angle CAN = \angle DNB$

- א. האם אפשר להסיק ש- $\triangle ANC$ הוא משולש שווה-שוקיים?
 אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- ב. האם אפשר להסיק ש- $\triangle ACN \cong \triangle BDN$?
 אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- שם המשימה החלופית באתר: "האם אפשר להסיק?"



10*. נתון/ $NB = AC = DN$
 $\angle ACN = \angle BND$

- א. האם אפשר להסיק ש- $\triangle ANC$ הוא משולש שווה-שוקיים?
 אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- ב. האם אפשר להסיק ש- $\triangle ACN \cong \triangle BDN$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- שם המשימה החלופית באתר: "האם אפשר להסיק?"

פעילויות המעוצבות בדרך הגורמת להפתעה ויוצרות מוטיבציה
להסביר מדוע התקבלה התוצאה המפתיעה.

ופעילויות המעוררות אי וודאות הניתנת ליישוב רק בעזרת
הוכחות או הפרכות.

סכום זוויות פנימיות וחיצוניות במצולעים קמורים

חלק ראשון

1. סכום הזוויות הפנימיות במשולש הוא _____.

נעבור למצולעים שמספר צלעותיהם גדול מ-3.

מה סכום הזוויות הפנימיות במרובע?

נבדוק באמצעות התוכנה מה סכום הזוויות הפנימיות במחומש?

נבדוק באמצעות תוכנה מה סכום הזוויות הפנימיות במשושה?

שערו מה יהיה הסכום הזוויות הפנימיות במצולע קמור עם 7 צלעות. בדקו.

מה מצאנו?

סכום זוויות פנימיות במשולש: 180°

סכום זוויות פנימיות במרובע: 360°

סכום זוויות פנימיות במחומש: 540°

סכום זוויות פנימיות במשושה: 720°

סכום זוויות פנימיות במשובע: $\underline{\hspace{2cm}}^{\circ}$

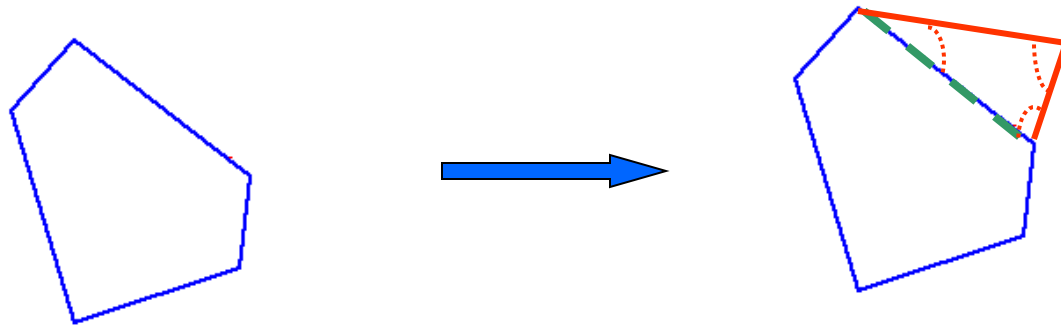
סכום זוויות פנימיות במתומן: $\underline{\hspace{2cm}}^{\circ}$

תארו כיצד משתנה סכום הזוויות הפנימיות של מצולעים
קמורים שמספר צלעותיהם הולך וגדל. הסבירו מדוע.

כל התלמידים הכלילו מהעבודה במחשב:
כל פעם כשמוסיפים צלע למצולע סכום הזוויות הפנימיות גדל ב- 180° .

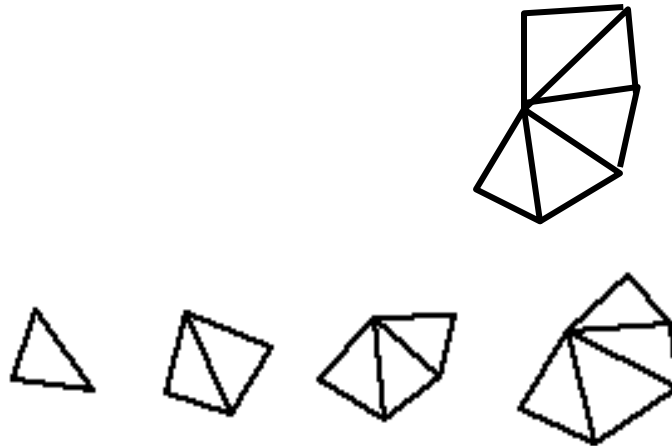
הסברים של תלמידים למסקנה

1. כשמוסיפים צלע כאילו מחלקים את אחת הצלעות, (מקווקו בירוק) ואז נוסף משולש (אדום). ונוספות 3 הזוויות שלו.



לכן, הסכום גדל ב- 180° .

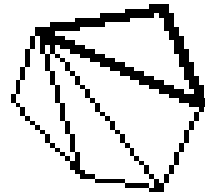
2. מתחילים במשולש (180°) אח"כ מרובע (360°), מחומש (540°) וכו':



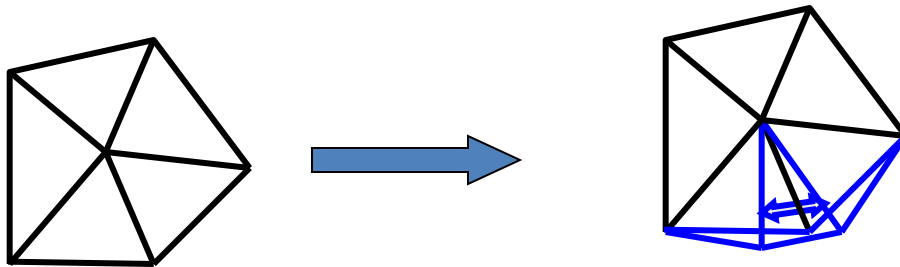
3. ויש תלמידים שהסבירו רק באמצעות שרטוטים:

$$\triangle + \triangle = \text{parallelogram} \quad (\text{א})$$

$$\triangle + \text{parallelogram} = \triangle + \triangle + \triangle = \text{cube}$$



(ב)

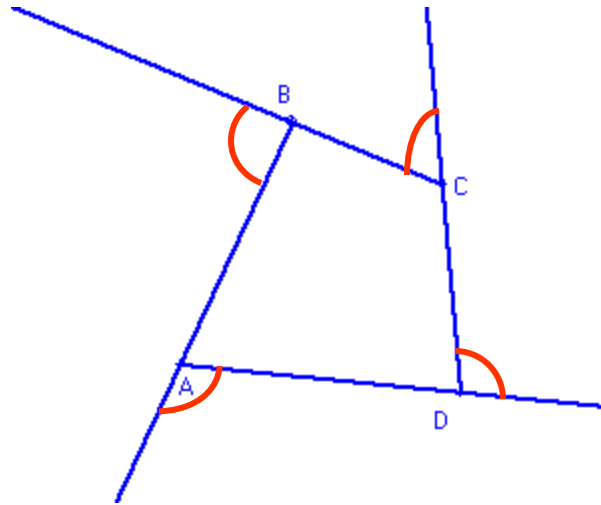


(ג)

מעבר ממחומש
למעשה בצדק שונה:

חלק שני

נחקור כעת את סכום הזוויות החיצוניות במצולעים קמורים. (זווית אחת ליד כל קודקוד).
נתחיל שוב במרובע.



- ❖ ואם נגדיל את מספר הצלעות? מה יהיה סכום הזוויות החיצוניות במחומש? במשושה?
- ❖ תארו כיצד משתנה סכום הזוויות החיצוניות של מצולעים קמורים שמספר צלעותיהם הולך וגדל.

מה מצאנו?

מתוך 49 שהשתתפו במחקר, 37 שיערו שהסכום יגדל.

רובם תארו את ההשתנות בדומה להשתנות הזוויות הפנימיות, (כשתוסף צלע הסכום יגדל ב- 180°).

חלק טענו שסכום החיצוניות יהיה תמיד שווה לסכום הפנימיות כמו שראינו במרובע.

שתי הטענות האלה למעשה מובילות לאותה מסקנה:

360° , 540° , 720° , וכו'

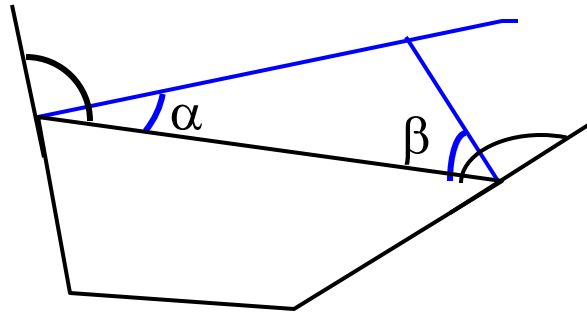
והיו שגם לאחר בדיקה לא האמינו והמשיכו לבדוק....

הפתעה כתוצאה של ניגודים בין השערות לממצאים

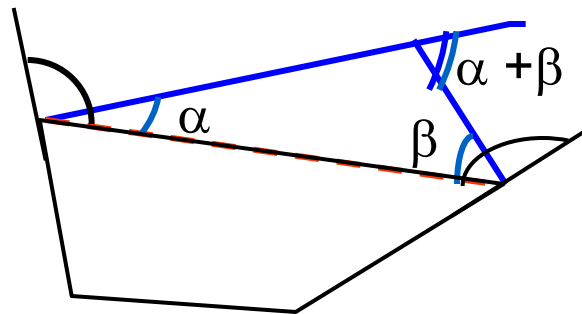


צורך בהסבר

הסברים של תלמידים



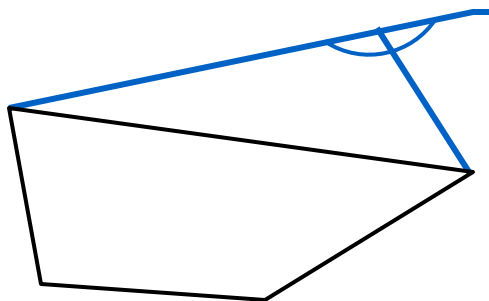
1. כשעוברים ממרובע למחומש על ידי תוספת צלע α ו- β שהיו חלק מהחיצוניות במרובע הופכות להיות חלק מהפנימיות במחומש כך שמסכום החיצוניות יורד $\alpha + \beta$ וזה בדיוק גודל הזווית החיצונית שנוספה בקודקוד החדש שנוצר. (כי למדנו שזווית חיצונית שווה ל....)



שתי תלמידות יצרו טבלה:

מרובע	$180^\circ \cdot 4 - 360^\circ = 360^\circ$
מחומש	$180^\circ \cdot 5 - 540^\circ = 360^\circ$
משושה	$180^\circ \cdot 6 - 720^\circ = 360^\circ$
משובע	$180^\circ \cdot 7 - 900^\circ = 360^\circ$

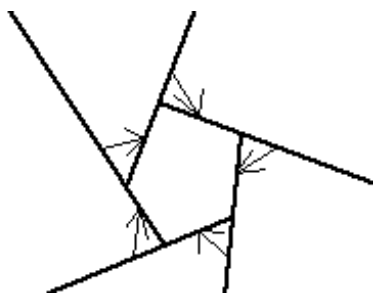
בסוף הן אמרו: אבל אנחנו עדיין לא יודעות למה!?



3. כשנוסף קודקוד נוסף זוג של זוויות צמודות: זווית חיצונית ופנימית. כך שלסכום הזוויות החיצוניות והפנימיות יחד נוסף 180° .

אבל מצאנו קודם שכשמוסיפים קודקוד סכום הזוויות הפנימיות גדל ב- 180° ... לכן "לא נשאר כלום שיכול להתווסף לחיצוניות".

ואחר כך הוסיפו:
ובמשולש סכום החיצוניות הוא 360° , אז זה יישאר סכום החיצוניות בכל המצולעים.



4. והיו גם 2 תלמידים שהציעו את ההסבר הבא:

בספר של כיתה ח

במצולע שבשרטוט 7 צלעות.

האם אפשר למצוא ללא מדידה, את סכום הזוויות החיצוניות המסומנות בנקודה?



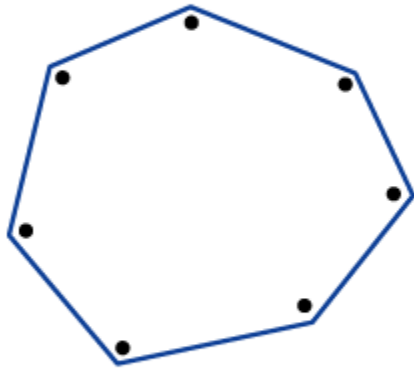
נבדוק מהו סכום הזוויות החיצוניות במצולעים שונים.



תזכורת

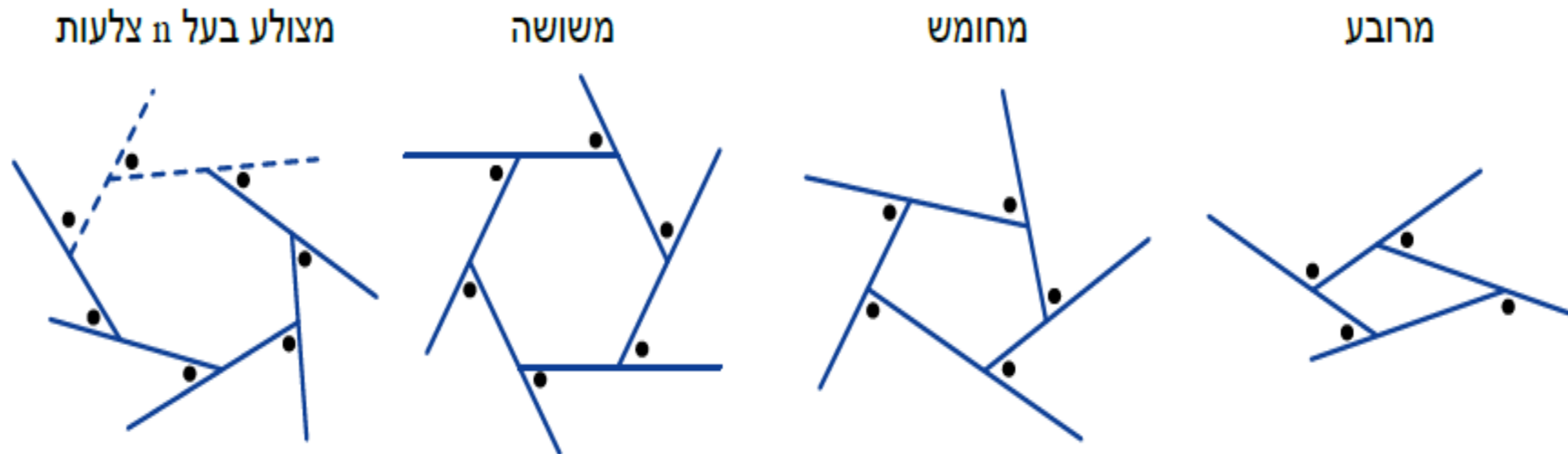
- סכום הזוויות הפנימיות במצולע (במעלות) שווה ל- $180 \cdot (n - 2)$

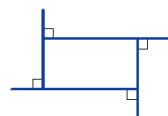
- מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו באורכן, וכל זוויותיו שוות זו לזו בגודלן.



1. א. חשבו את סכום הזוויות במצולע בעל 5 צלעות?
 מה גודל כל זווית במצולע משוכלל שיש בו 5 צלעות?
 ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 15 צלעות?
 מה גודל כל זווית במצולע משוכלל בעל 15 צלעות?

2. לפניכם שרטוטים של מצולעים קמורים שזוויותיהם החיצוניות מסומנות בנקודה.
 שִׁעְרוּ כיצד משתנה סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור כשמספר הצלעות של המצולע גדל.





3. **דני** אמר: ראיתי שבמלבן סכום הזוויות החיצוניות 360° .

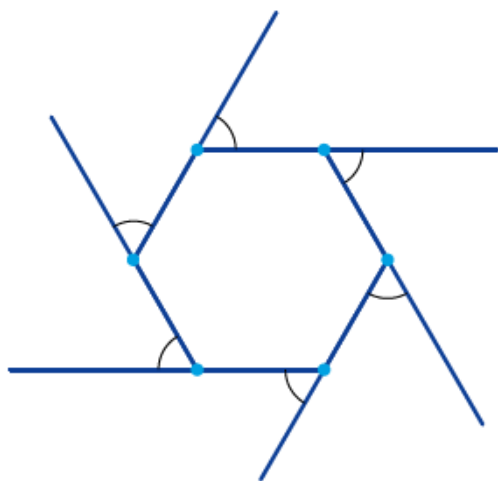
לכן, אני חושב כי בכל מצולע, סכום הזוויות החיצוניות שווה לסכום הזוויות הפנימיות של אותו מצולע: במחומש 540° , במשושה 720° וכו'.

רועי אמר: מצאנו שסכום הזוויות במחומש 540° ושגודל כל זווית פנימית

במחומש משוכלל הוא $108^\circ = \frac{540}{5}$ לכן, גודל כל אחת מהחיצוניות

הצמודות לפנימיות, 72° , והסכום יוצא $72 \times 5 = 360^\circ$

מי משניהם צודק?



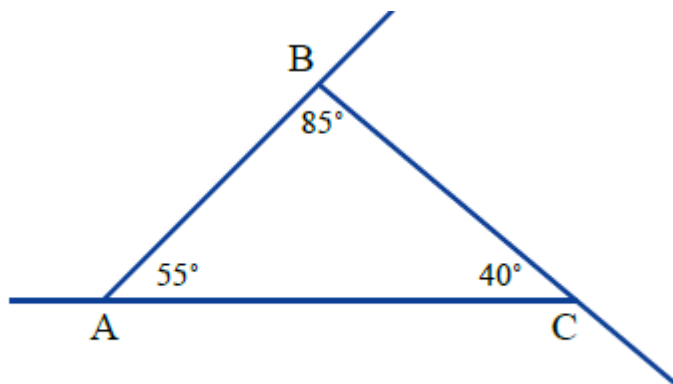
4. א. מצאו את סכום הזוויות במשושה.

ב. מצאו גודל של כל זווית במשושה משוכלל.

ג. מצאו גודל של כל זווית חיצונית במשושה משוכלל.

ד. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

5. מצאו את הגודל של כל זווית חיצונית במשולש המשורטט, ואת סכום הזוויות האלה.

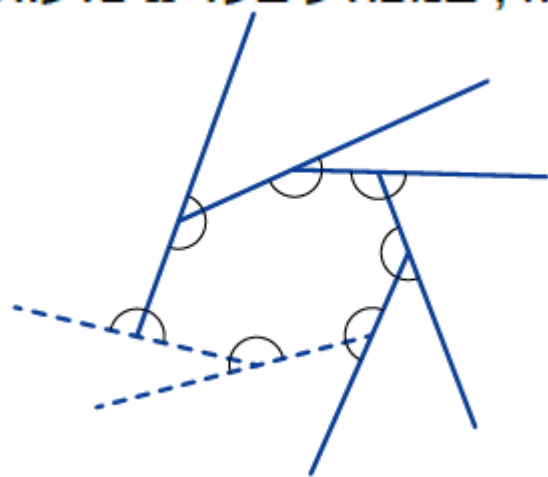


6. שֵׁעֶרוּ: האם ייתכן שסכום הזוויות החיצוניות בכל מצולע קבוע ושווה תמיד ל- 360° ?

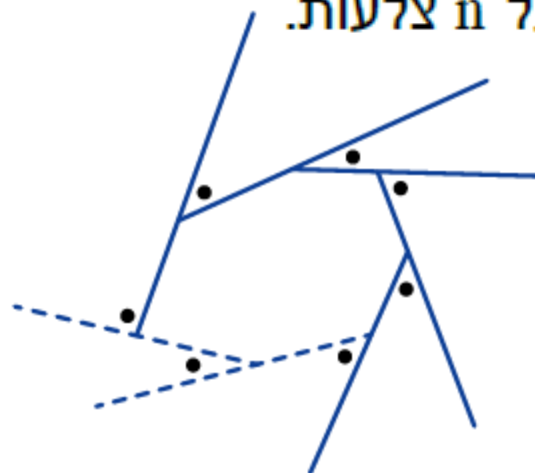
באתר "מתמטיקה משולבת, במדור "חומרי למידה נוספים - גיאומטריה לכיתה ח", תמצאו פעילות הנקראת "סכום זוויות חיצוניות במצולע". בפעילות תמצאו תשובה והסבר לתשובה. בצעו את הפעילות לפי ההוראות.

8. והסבר שונה:

סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא: $180 \cdot (n - 2)$.
מהו סכום הזוויות ה**צמודות** שליד כל קודקוד, במצולע בעל n צלעות?



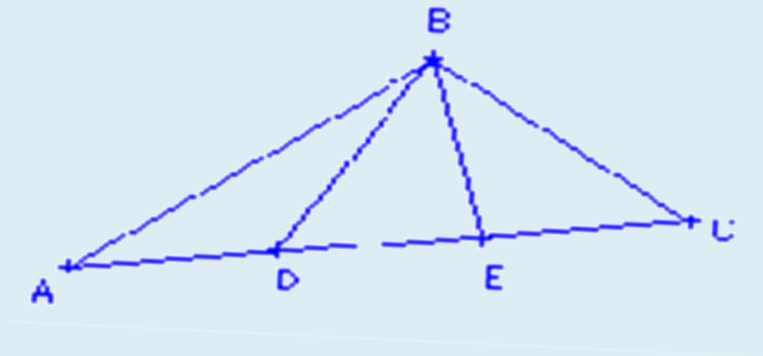
בטאו את סכום הזוויות החיצוניות במצולע בעל n צלעות.



פעילויות המביאות יצירת דילמות

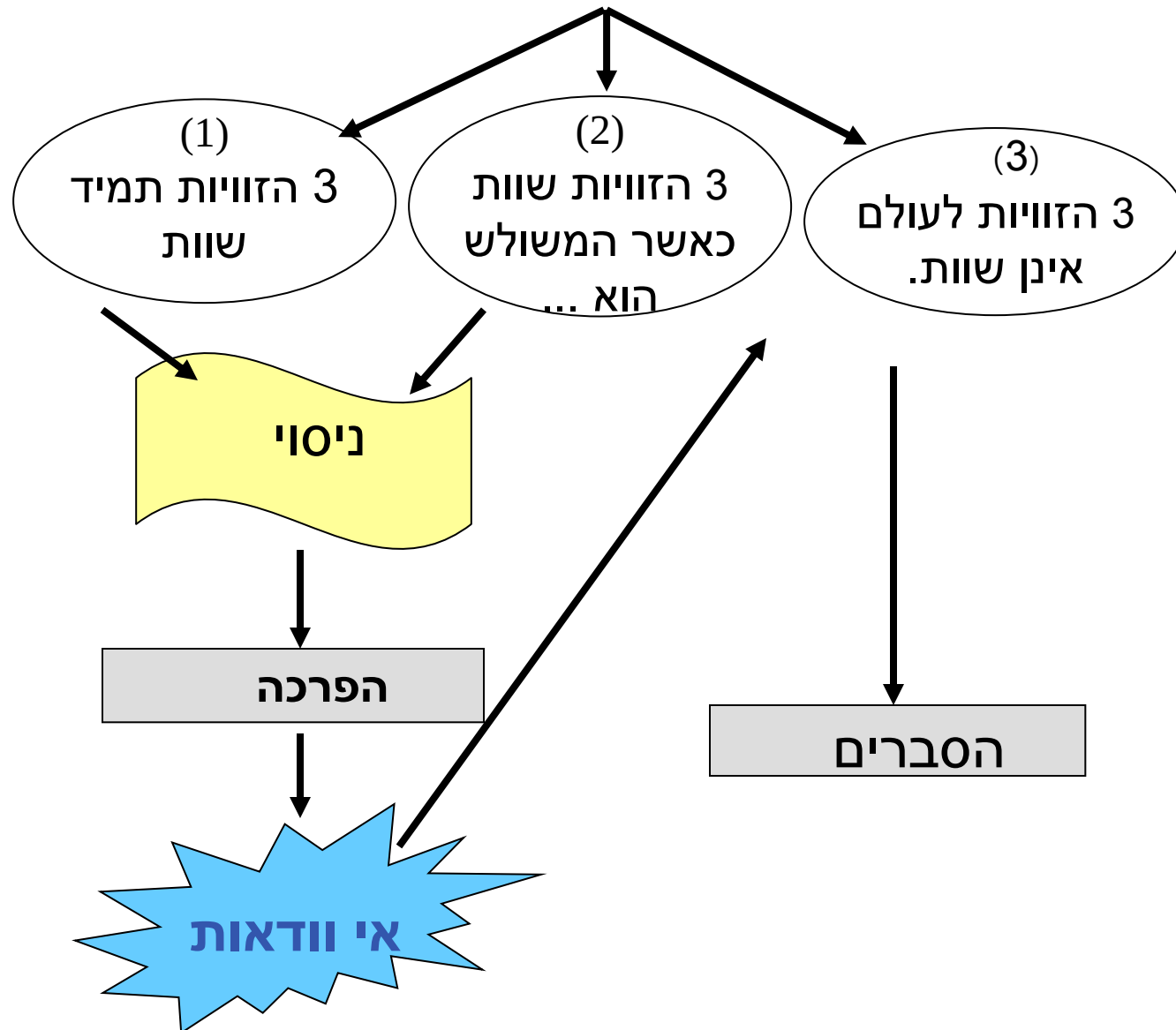
חילקו את הצלע AC של משולש ABC לשלושה חלקים שווים, וחיברו את הקודקוד B עם נקודות החלוקה שנוצרו.

מה ניתן לדעתכם לומר על 3 הזוויות שנוצרו בקודקוד B?



פעילויות המביאות לעימות עם סיטואציות בלתי אפשריות

האם הזוויות שוות?

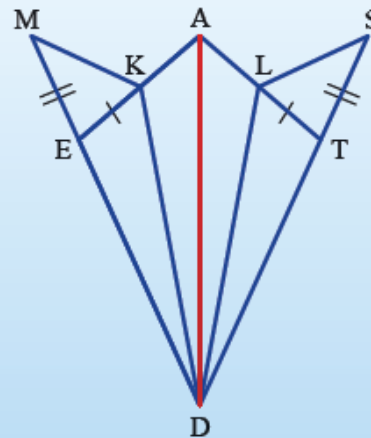


אז מה ראינו?

- פעילויות העוסקות, במקביל להוכחת טענות נכונות, בהפרכת טענות שאינן נכונות באמצעות בנייה של דוגמאות נגדיות.
 - פעילויות המעוצבות בדרך הגורמת להפתעה ויוצרות מוטיבציה להסביר מדוע התקבלה התוצאה המפתיעה
 - פעילויות המעוררות אי וודאות הניתנת ליישוב רק בעזרת הוכחות.
 - פעילויות המביאות לעימות עם סיטואציות בלתי אפשריות.
- וכל זאת במטרה לעודד צורך בהוכחה, ולהמחיש שתפקידיה העיקריים הם להסביר למה הטענה נכונה ולשכנע בנכונותה.

הכרות עם תהליכים דדוקטיביים

שיעור 3. שרשרות של הוכחות



בשרטוט שלפניכם AD חוצה את הזווית A ואת הזווית KDL.
נתונים נוספים מסומנים בשרטוט. (קטעים שווים מסומנים באותו סימון).
כמה זוגות של משולשים חופפים בשרטוט?

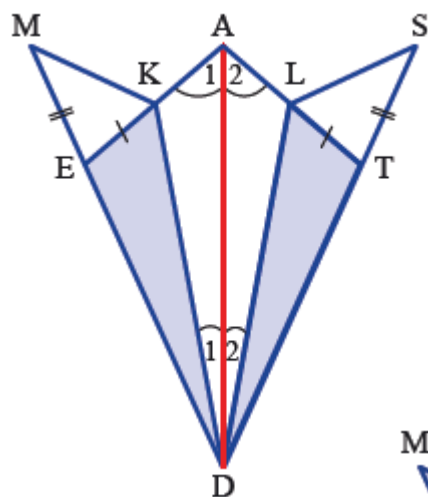
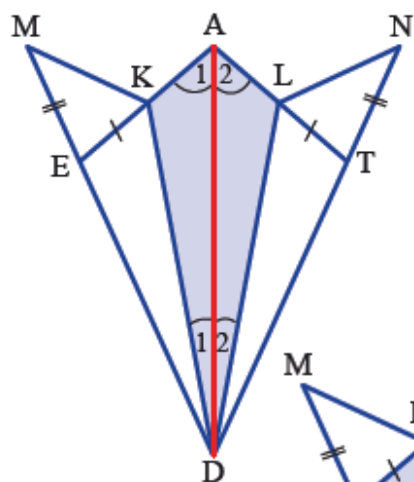
נזהה משולשים חופפים, נוכיח ונסיק מסקנות.

במשימות 1 - 4 נתייחס לשרטוט במשימת הפתיחה.

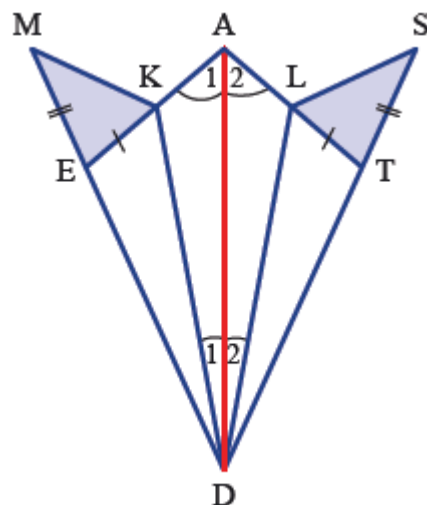
1. רשמו בכתב מתמטי את כל זוגות המשולשים החופפים שמצאתם, בכתב מתמטי: $\Delta _____ = \Delta _____$.
הקפידו על רישום הקדקודים בהתאמה.

2. העתיקו את השרטוט.

AD חוצה את הזוויות A ו-D במרובע AKDL.
נוכיח כי משולש AKD חופף למשולש ALD.



3. א. רשמו שלושה תנאים המוכיחים כי $\triangle TLD \cong \triangle EKD$
(היעזרו במסקנה מהחפיפה במשימה 2.)

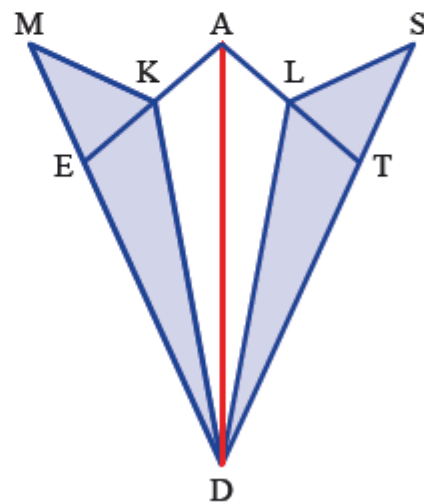


ב. הוכיחו: $\triangle SLT \cong \triangle MKE$

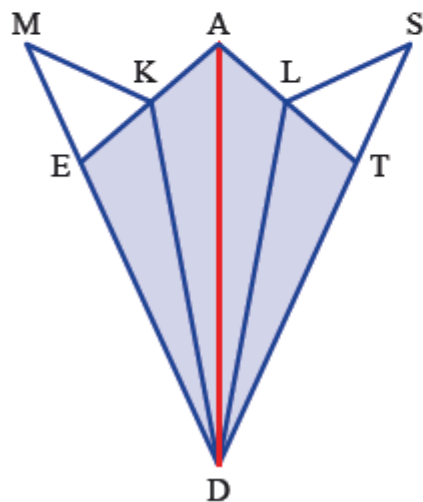


4. הוכיחו את החפיפה של זוגות משולשים נוספים.
(היעזרו במסקנות מהחפיפות שהוכחתם.)

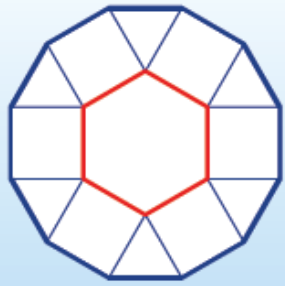
א. $\triangle SLD \cong \triangle MKD$



ב. $\triangle ATD \cong \triangle AED$

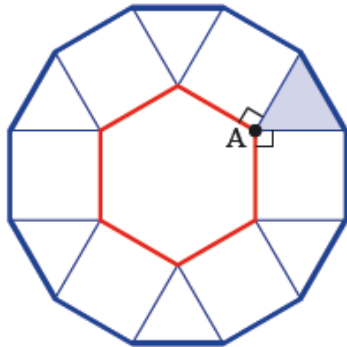


הוכחה במילים והוכחה בכתיב מתמטי



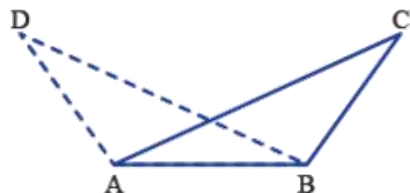
המצולע הכחול הוא מצולע משוכלל בעל 12 צלעות.
על שש מצלעותיו שרטטו ריבועים, והתקבל משושה צבוע **באדום**. (ראו שרטוט).
האם המשושה הוא משושה משוכלל?

נדון בסוגים של הוכחות.



יאיר הוכיח כי המשושה הצבוע אדום הוא משושה משוכלל.
השלימו את הנימוקים בהוכחה של יאיר:

- כל הצלעות של המשושה שוות באורכן, כי...
- כל המשולשים שווי-צלעות, כי...
- כל הזוויות של המשושה שוות בגודלן, כי...



3. $\angle DAB = \angle CBA$ **נתון**

$AD = BC$

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$ **לפי**

לפניכם שתי הצעות להוכחה:

דניאל הוכיח במילים: לשני המשולשים צלע משותפת AB.

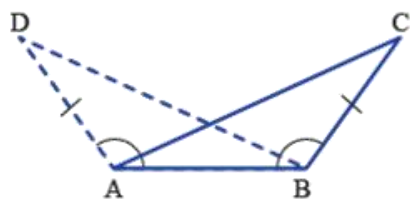
לכן יחד עם שני הנתונים, המשולשים חופפים, לפי משפט חפיפה צ.ז.צ.

יעל הוכיחה בכתוב מתמטי: $AD = BC$ נתון

$AB = AB$ צלע משותפת

$\angle DAB = \angle CBA$ נתון

$\triangle ABC \cong \triangle BAD$ לפי צ.ז.צ.



האם שני הילדים הוכיחו את החפיפה?



יש דרכים שונות לרשום הוכחה:

- הוכחה באמצעות רישום מתמטי (כמו ההוכחה של **יעל**),
- הוכחה מילולית (כמו ההוכחה של **דניאל**),
- הוכחה מילולית הנעזרת בשרטוטים (כמו ההוכחה של **יאיר** במשימה 2).