

יחידה 35: פיתגורס במרחב

שיעור 1. אנך למישור

מי ניצב (מאונך) לקרקע?



1. הסתכלו בפינה אחת של החדר, כמה זוויות ישרות אתם רואים שם?

2. הניחו את העיפרון כך שיהיה מאונך:

א. לשולחן ב. לדף נייר ג. לרצפה ד. לקיר



הניחו דף נייר על השולחן. דמיינו שהוא ממשיך לכל הכיוונים ללא סוף. דמיינתם מישור. מישור הוא מושג יסודי (כמו הנקודה והישר) שאנו מקבלים אותו ללא הגדרה.

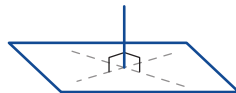
3. א. סמנו נקודה A על דף נייר (דף הנייר משמש כמישור).

הניחו את העיפרון בנקודה A, כך שיהיה מאונך למישור של דף הנייר.

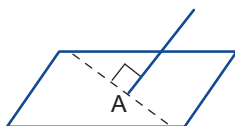
יהודית אמרה: שרטטתי ישר העובר דרך הנקודה A על דף הנייר. העיפרון מאונך לישר זה.

שולי אמרה: שרטטתי ישר אחר על דף הנייר העובר דרך הנקודה A. העיפרון מאונך גם לישר זה.

ב. מה מאפיין ישר שמאונך למישור, לדעתכם?



ישר המאונך לכל הישרים במישור שעוברים בנקודת החיתוך שלו עם המישור, נקרא **אנך למישור**.



4. שושי שרטטה ישר על דף נייר וסימן עליו נקודה A.

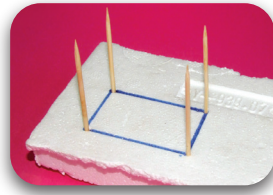
היא הניחה דוק לא על מישור הנייר, כך שהוא מאונך לישר.

שושי אמרה: הדוק מאונך למישור, כי הוא מאונך לישר שעל המישור.

האם שושי צודקת? הסבירו.



5. **בנו דגם של תיבה (על קלקר):**



א. שרטטו על הקלקר מלבן ונעצו 4 קיסמים (או דוקים) בקודקודי המלבן, כך שיתקבל חלק משלד של תיבה.

ב. כמה קיסמים מאונכים למישור המלבן?

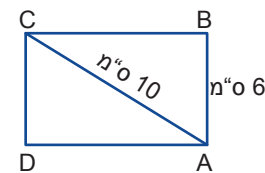
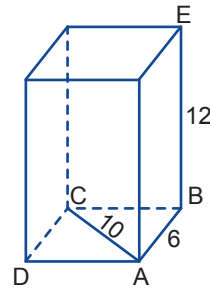
ג. איזו צורה יש לכל פאה בתיבה?

בהמשך גופא אהיפצי בדגם שפניגם.

6. נתייחס לפאה ABCD של התיבה.

אורך האלכסון הפאה הוא 10 ס"מ,

ואורך AB הוא 6 ס"מ.



א. בשרטוט פאה ABCD "מחוץ" לתיבה.

חשבו את אורך הצלע הנוספת של הפאה.

ב. חשבו את נפח התיבה.



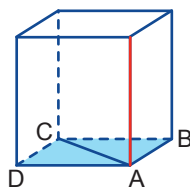
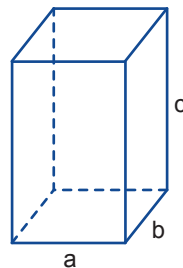
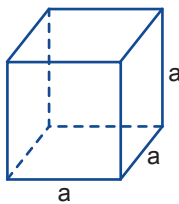
תזכורת:

נפח תיבה שצלעותיה (בס"מ) a , b , c הוא $a \cdot b \cdot c$ (סמ"ק).

בקובייה כל הצלעות שוות.

נפח הקובייה הוא a^3 (סמ"ק), אם אורך הצלע a (בס"מ).

הערה: לצלע התיבה קוראים גם מקצוע.



7. האם הצלע האדומה בתיבה מאונכת לפאה ABCD? (היעזרו בדגם של התיבה,

ורשמו על הקלקר את האותיות כפי שהן רשומות בשרטוט.)

רשמו קטעים במישור ABCD המאונכים לצלע האדומה.

שרטטו בדגם קטע אחר במישור ABCD המאונך לצלע האדומה.

כמה קטעים כאלה אפשר לשרטט?

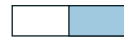
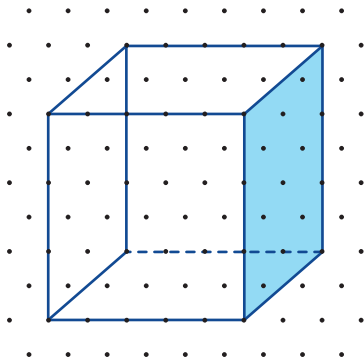
8. א. שרטטו את התיבה על דף נקודות איזומטרי (אפשר לצלם את הדף

מהאתר "מתמטיקה משולבת").

ב. צבעו את כל הצלעות המאונכות למישור הצבוע בתכלת.

ג. סמנו את הזוויות הישרות בין אחת הצלעות

שצבעתם, עם הצלעות במישור הצבוע בתכלת.



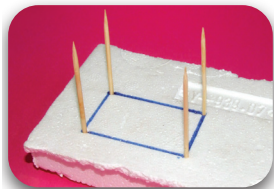
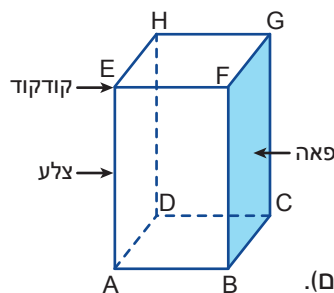
1. לפניכם שרטוט של תיבה.

א. כמה קודקודים יש לתיבה?

ב. כמה צלעות (מקצועות) יש לתיבה?

ג. כמה פאות יש לתיבה?

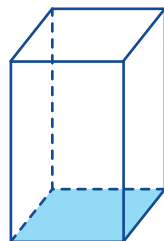
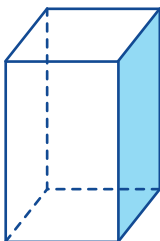
ד. רשמו זוגות של פאות חופפות (היעזרו בדגם).



2. העתיקו את התיבות למחברת.

צבעו את כל הצלעות המאונכות למישור הצבוע

(היעזרו בדגם התיבה, שבניתם).



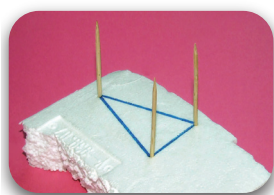
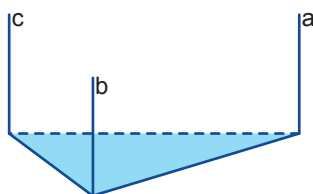
3. a, b, c אנכים למישור הצבוע.

(אפשר לשרטט משולש על הקלקר ולנעוץ

בקודקודי המשולש 3 קיסמים המאונכים למישור הקלקר.)

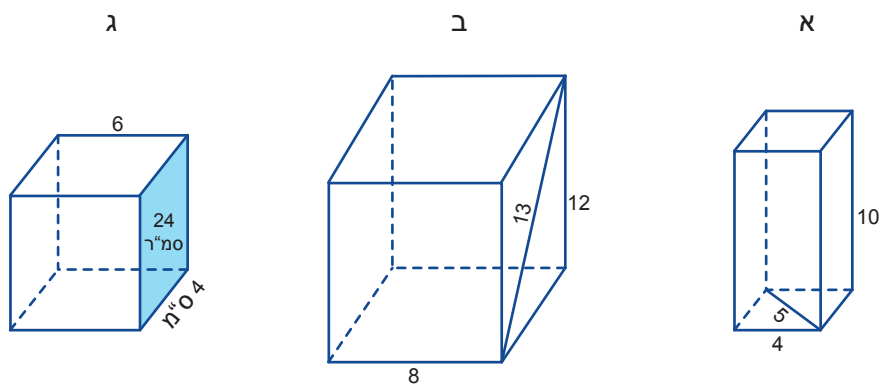
העתיקו את השרטוט למחברת.

סמנו את כל הזוויות הישרות שבשרטוט.

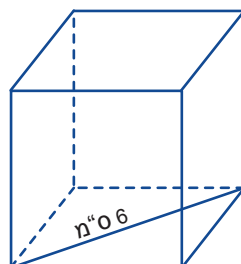




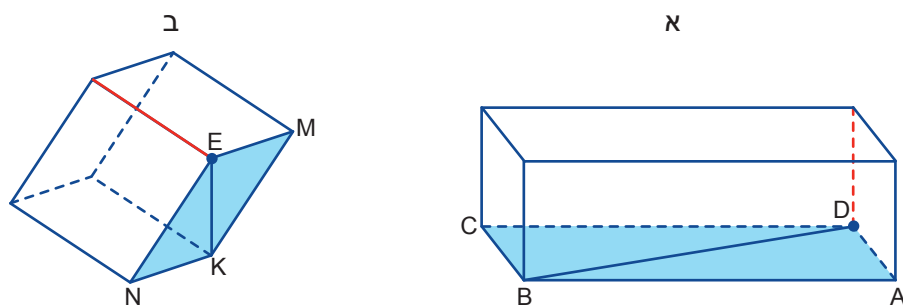
4. חשבו את נפח התיבה (היחידות הרשומות בשרטוט בס"מ). מצאו תחילה את הצלע הלא ידועה.
(אפשר להיעזר בדגם של התיבה.)



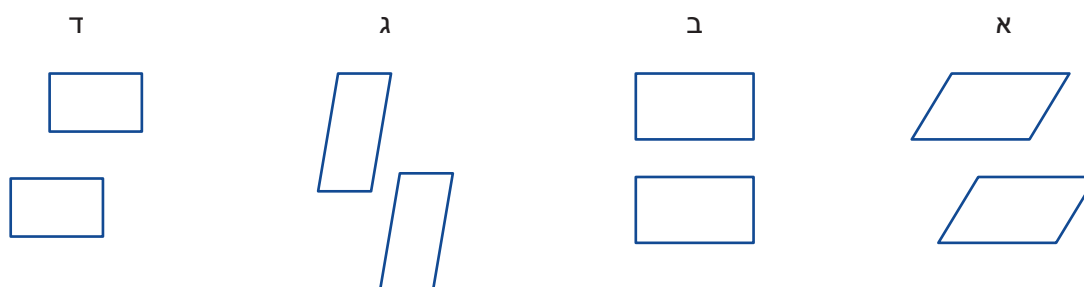
5. חשבו את נפח הקובייה.



6. ציינו את כל הקטעים במישור הצבוע, המאונכים לצלע האדומה. וקצה אחד שלהם הוא הקודקוד המודגש.

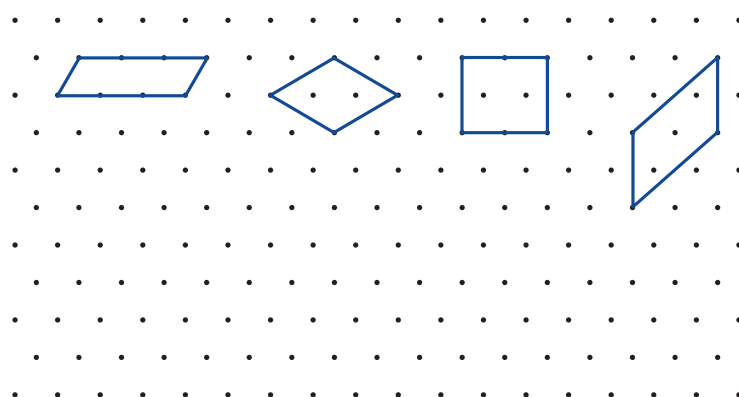


7. לכל תיבה משורטטות שתי פאות. השלימו, אם אפשר, את שרטוט התיבה.



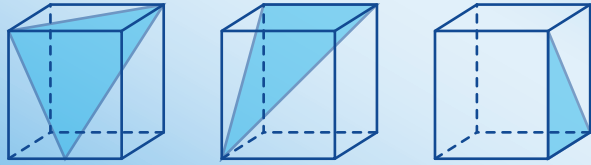


8. שרטטו כל פאה על דף נקודות והשלימו אותה לתיבה. (היעזרו בדף נקודות איזומטרי).



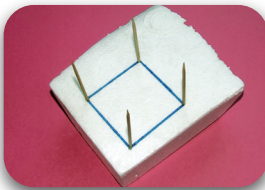
שיעור 2. משולשים ומרובעים בתיבה

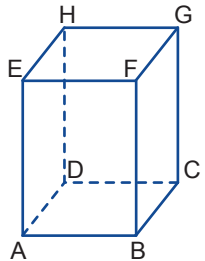
לשיעור זה הכינו "שלד" של קובייה ושל תיבה (שאינה קובייה) על קלקר בעזרת קיסמים, או היעזרו בדגם של תיבה שקופה.



משורטטות קוביות.

האם המשולשים הצבועים הם ישרי זווית?
אם כן, היכן הזווית הישרה?





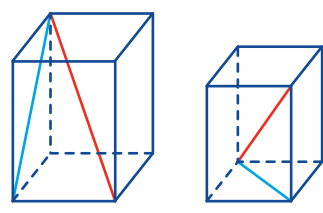
1. א. האם הקודקודים H ו-G נמצאים על פאה משותפת?
- ב. האם הקודקודים H ו-A נמצאים על פאה משותפת?
- ג. האם הקודקודים H ו-B נמצאים על פאה משותפת?



אלכסון של תיבה הוא קטע, המחבר שני קודקודים שאין להם פאה משותפת.

דוגמאות:

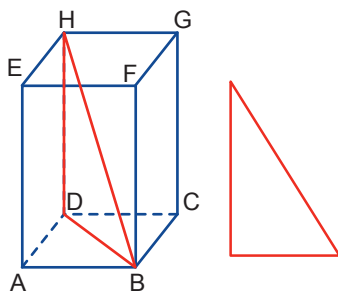
- הקטע האדום הוא אלכסון של התיבה.
- הקטע התכלת אינו אלכסון של תיבה כי שתי קצותיו על אותה פאה, לכן הוא אלכסון של הפאה.



ד. אילו מבין הקטעים הבאים הם אלכסונים של התיבה: CH, DB, DF, HF, AC, EC?

ה. כמה אלכסונים לתיבה?

ו. קרשמו זוגות של אלכסוני פאה שווים. הסבירו.



2. א. מהו סוג המשולש הצבוע בתוך התיבה?

ב. המשולש הצבוע משורטט גם מחוץ לתיבה. העתיקו את המשולש למחברת וקרשמו את האות המתאימה ליד כל קודקוד.

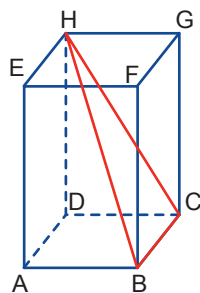
ג. ציינו לגבי כל צלע במשולש אם היא:

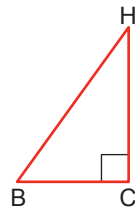
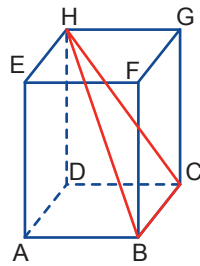
אלכסון פאה, אלכסון תיבה או צלע של תיבה.

ד. בשרטוט משולש $\triangle HCB$ אחר עם אלכסון התיבה (HB).

מהו סוג המשולש? (אפשר לבנות את המשולש בדגם ולשרטטו מחוץ לתיבה).

ה. האם משולש HDB חופף למשולש HCB? נמקו.

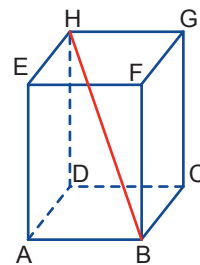
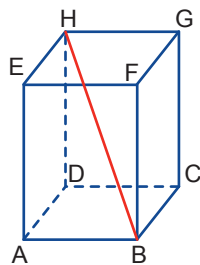
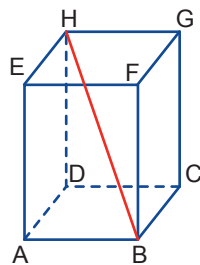




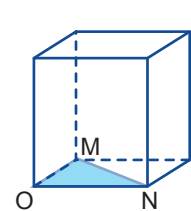
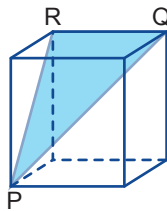
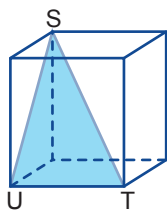
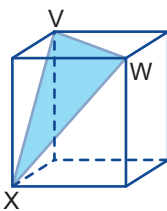
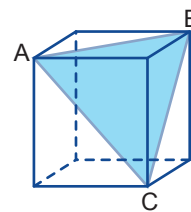
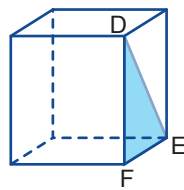
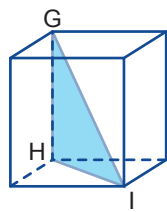
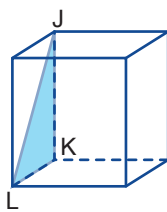
המשולש הנוצר מאלכסון תיבה, אלכסון פאה
וצלע תיבה, הוא משולש ישר זווית.



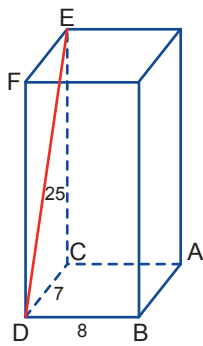
3. הניחו ניר שקוף על השרטוטים של התיבות.
שרטטו משולשים רבים ככל האפשר שצלעותיהם:
אלכסון התיבה HB, אלכסון פאה וצלע תיבה. (כדאי להיעזר בדגם של תיבה.)



4. א. בכל סעיף משורטטת קובייה. זהו את סוג המשולש המסומן (ישר זווית, שווה שוקיים, שווה צלעות).
(אפשר להיעזר בדגם של תיבה ולבנות את המשולש על הקלקר.)



- ב. מצאו זוגות של משולשים חופפים. הוכיחו.



5. אורך האלכסון של הפאה DCEF הוא 25 ס"מ, אורך הצלע DC הוא 7 ס"מ, אורך הצלע DB הוא 8 ס"מ
- א. חשבו את הצלע השנייה של הפאה DCEF.
- כדאי לשרטט את הפאה DCEF מחוץ לתיבה כפי שהיא נראית במישור.

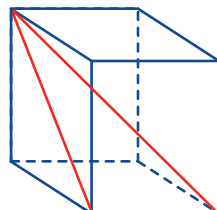
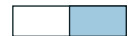
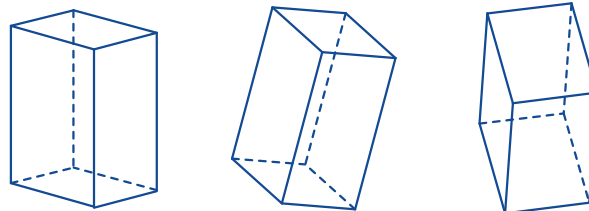
ב. חשבו את שטח הפנים של התיבה.



תזכורת: לסכום שטחי הפאות של תיבה קוראים **שטח פנים** של התיבה.



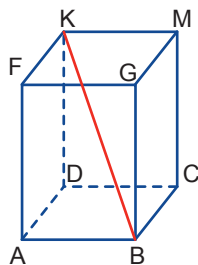
1. הניחו דף שקוף על שרטוטי התיבות. שרטטו בכל תיבה אלכסון פאה ואלכסון פאה היוצאים מאותו קודקוד.



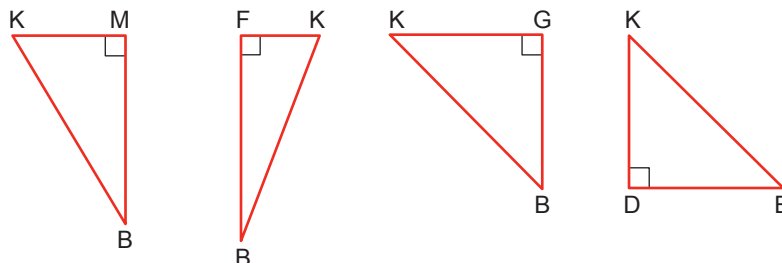
2. זהו את סוג המשולש הצבוע.
- (אפשר להיעזר בדגם של תיבה ושל המשולש על קלקר ולשרטט את המשולש כפי שהוא נראה בדגם.)



3. בשרטוט צבוע אלכסון התיבה KB .



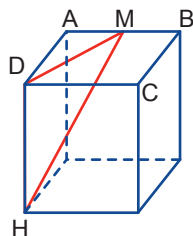
- א. שרטטו משולש שצלעותיו: אלכסון התיבה KB , אלכסון פאה וצלע תיבה.
 מהו סוג המשולש? (אפשר להיעזר בדגם של תיבה, לבנות את המשולש בדגם ולשרטט את המשולש מחוץ לתיבה).
 ב. לפניכם ארבעה משולשים שצלעותיהם: אלכסון תיבה (KB) , אלכסון של פאה וצלע של תיבה.



- האם אחד מהמשולשים זהה למשולש ששרטטם בסעיף א? אם כן, מיהו?
 ג. האם מבין ארבעת משולשים יש משולשים חופפים? אם כן, רשמו אותם והוכיחו.
 ד. מה אפשר לומר על המשולשים הבנויים מאלכסון קובייה, אלכסון פאה, וצלע הקובייה? הסבירו.



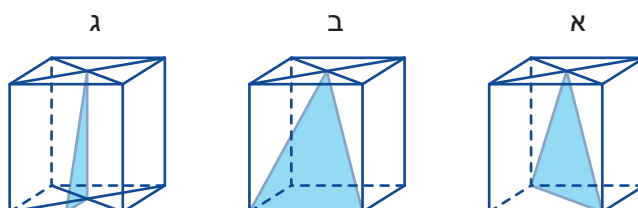
4. בשרטוט M אמצע AB .



- א. איזו זווית היא ישרה במשולש DMH ? (אפשר להיעזר בדגם של תיבה, לבנות בדגם את המשולש DMH ולשרטטו במחברת כפי שהוא נראה בדגם).
 ב. הניחו דף שקוף על שרטוט התיבה ושרטטו משולש חופף למשולש DMH .
 הסבירו.

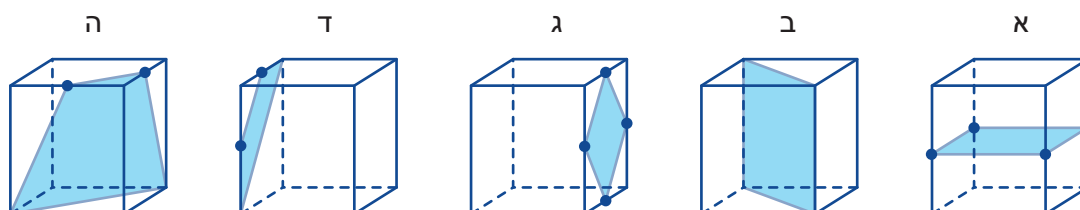


5. לפניכם שלושה שרטוטים של קובייה. בכל שרטוט, זהו את סוג המשולש הצבוע (אפשר לבנות דגם של קובייה ושל המשולש על קלקר ולשרטט את המשולש כפי שהוא נראה במישור).

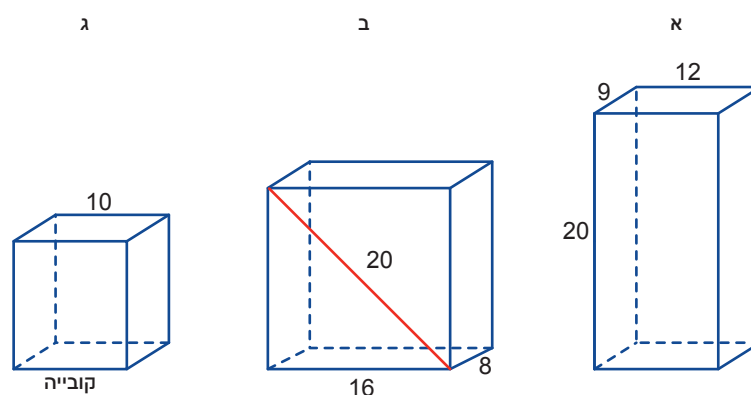




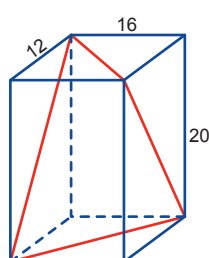
6. בכל קובייה הנקודות המודגשות הן אמצעי הצלעות.
בכל שרטוט, זהו את המרובע הצבוע (מקבילית, מלבן, ריבוע, מעוין, טרפז). הסבירו.
(אפשר להיעזר בדגם של קובייה).



7. חשבו את שטח הפנים של כל אחת מהתיבות הבאות. יחידות האורך בס"מ.



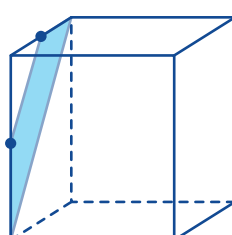
8. שרון קנתה מתנה לחברתה ושמה אותה בקופסה.
והדביקה סרט אדום - ראו שרטוט.
א. מה אורך הסרט? יחידות האורך בס"מ.
ב. האם לדעתכם, הצורה שנוצרה על ידי הסרט היא מרובע?

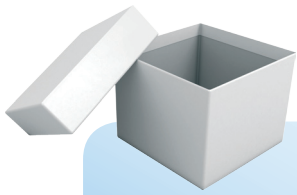


שימו לב: בכל חישוב דייקו עד ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.



9. א. הנקודות המודגשות בקובייה הן אמצעי צלעות.
זהו את סוג המרובע הצבוע? הסבירו.
ב. אורך צלע הקובייה הוא 10 ס"מ. חשבו את היקף המרובע הצבוע.



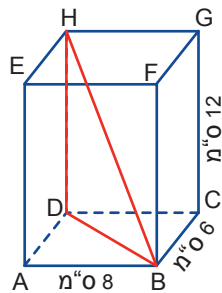
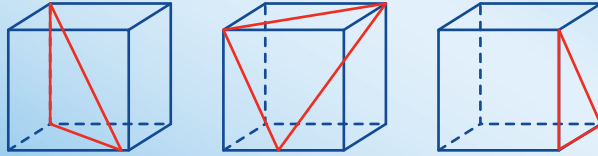


שיעור 3. משפט פיתגורס במשולשים במרחב

לפניכם שלושה שרטוטים של קוביות זהות ובתוך כל קובייה שרטוט של משולש.

שערו:

לאיזה משולש היקף גדול יותר?
לאיזה משולש היקף קטן ביותר?



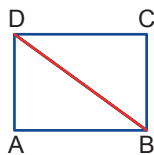
1. א. איזה סוג המשולש HDB?

חשבו את אורך אלכסון התיבה HB.

ב. הפאה ABCD משורטטת כפי שהיא נראית במישור.

העתיקו את השרטוט למחברת ורשמו בשרטוט את הנתונים.

חשבו את אורך אלכסון DB.



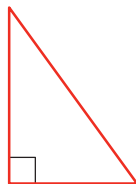
ג. המשולש שבשרטוט הוא משולש HDB כפי שהוא נראה במישור.

העתיקו את השרטוט למחברת.

רשמו את קודקודי המשולש ורשמו את הגדלים הידועים.

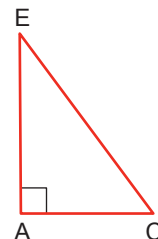
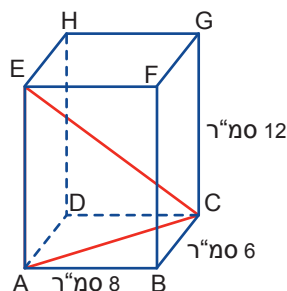
חשבו את אורך האלכסון HB.

שימו לב: בכל חישוב דייקו עד ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.



ד. משולש EAC משורטט מחוץ לתיבה.

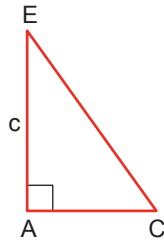
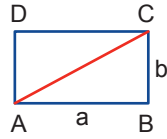
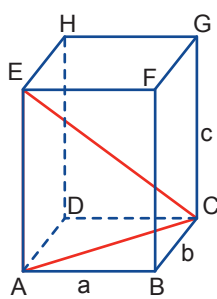
האם הוא חופף למשולש HDB? הסבירו.



חשבו את אורך אלכסון התיבה EC (חשבו תחילה את אורך AC). השוו למה שקיבלתם בסעיף ג.



בלקבל...



2. א. שרטטו את הפאה ABCD.

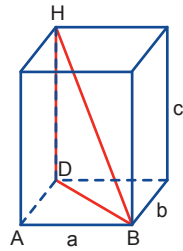
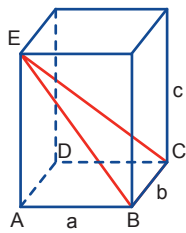
ב. רשמו את אורך אלכסון הפאה בריבוע (AC^2) באמצעות a, b.

ב. רשמו את EC^2 בעזרת AE ו-AC.

היעזרו במה שקיבלתם בסעיף א והסבירו מדוע:

$$EC^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

ג. הסבירו מדוע נקבל ביטוי זהה גם עבור שלושת אלכסוני התיבה האחרים: FD, GA, HB.



לפניכם שני שרטוטים לאותה תיבה.

$$EC^2 = EB^2 + BC^2 = c^2 + a^2 + b^2$$

בתיבה שמשמאל:

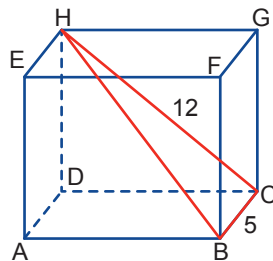
$$HB^2 = HD^2 + DB^2 = c^2 + a^2 + b^2$$

בתיבה שמימין:

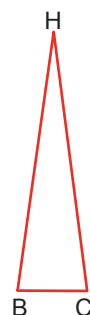
אפשר לקבל אותו ביטוי גם לשני האלכסונים האחרים.

ארבעת אלכסוני התיבה שווים זה לזה.

3. א. איזה סוג המשולש HBC?



שחר שרטט את משולש HBC כך:



ב. טל שרטט את משולש HBC כך:

איזה שרטוט (של טל או שחר)

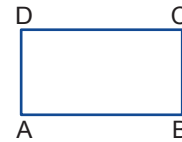
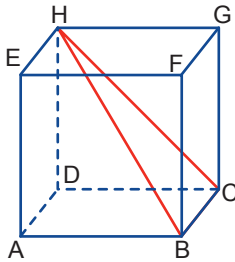
תבחרו כדי לחשב את אלכסון התיבה HB? בחרו שרטוט, רשמו את הנתונים וחשבו את אורך HB.



אם משרטטים גוף תלת מימדי במישור (דו מימדי) השרטוט שונה משרטוט צורה דו ממדית.

דוגמה: בשרטוט התיבה משולש CBH שהוא ישר זווית נראה כמשולש שווה שוקיים והמלבן DCBA נראה כמקבילית.

כאשר משרטטים צורות אלה מחוץ לתיבה, משרטטים אותן כפי שהן נראות במישור.

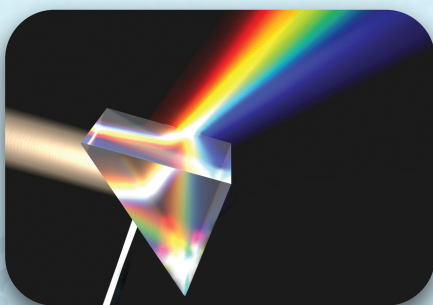
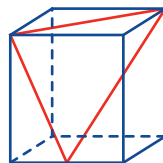
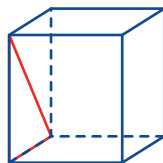
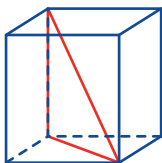


דוגמה:

4. לפניכם השרטטים של שלוש הקוביות משאלת הפתיחה. אורך צלע של כל קובייה הוא 12 ס"מ.

א. חשבו בכל שרטוט את היקף המשולש.

ב. בדקו אם החישובים מתאימים להשערתכם בשאלת הפתיחה.



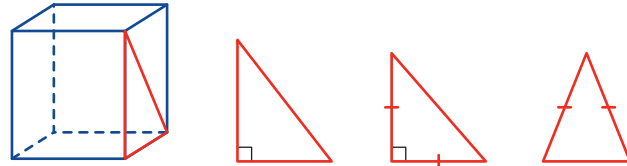
המדען האנגלי הדגול אייזיק ניוטון, שחי לפני כ- 300 שנה גילה לאחר שערך ניסויים רבים, כי אלומת אור העוברת דרך מנסרה מזכוכית, מתפצלת לאלומות אור בצבעי הקשת: סגול, כחול, ירוק, צהוב, כתום ואדום.

ניוטון הסביר זאת בכך ש"האור הלבן" מורכב מאלומות צבעוניות המתפשטות במקביל זו לזו. כתוצאה מכך, העין אינה יכולה להבחין בצבעים, ואנחנו מקבלים תחושה של "אור לבן".

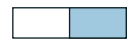
אם האור הלבן עובר דרך מנסרה מזכוכית, האלומות הצבעוניות השונות מתפשטות בכיוונים שונים, ואז העין יכולה להבחין בצבעים המרכיבים אותו.



1. א. בחרו את המשולש המתאים למשולש האדום המודגש בקובייה.

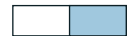
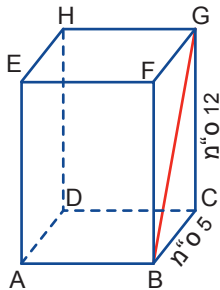


ב. נתון: אורך צלע הקובייה הוא 10 ס"מ. קשמו את הנתונים במשולש שבחרתם וקשבו את הצלעות.

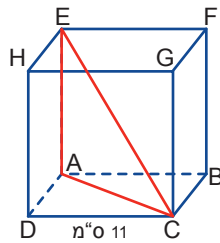


2. א. שרטטו את הפאה BCGF וקשבו את האלכסון BG.

ב. האם יש פאות אחרות בהן האלכסון שווה ל-BG? אם כן, קשמו אותן.

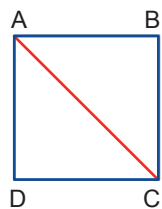


3. א. בשרטוט קובייה ומשולש EAC. מהו סוג המשולש?



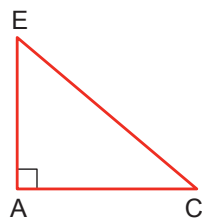
ב. בשרטוט הפאה ABCD כפי שהיא נראית במישור.

העתיקו את הריבוע, קשמו את הנתונים בשרטוט וקשבו את אורך האלכסון AC.



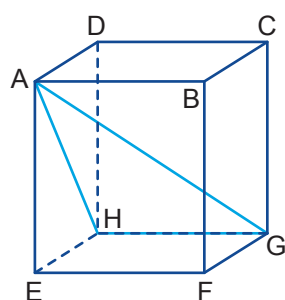
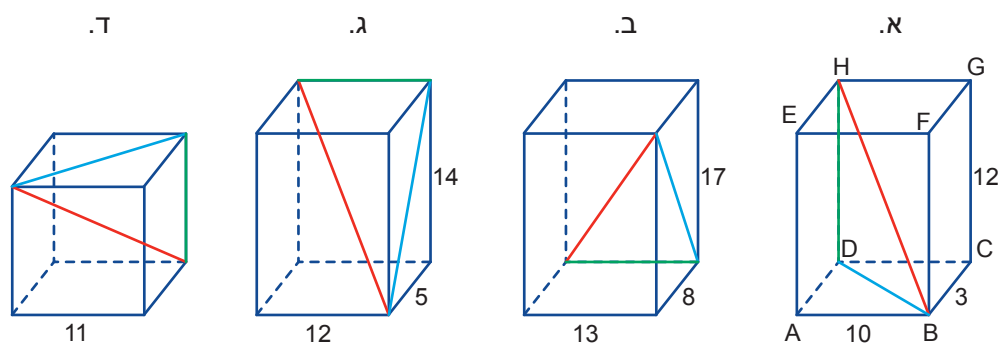
ג. בשרטוט $\triangle EAC$ כפי שהוא נראה במישור.

העתיקו אותו למחברת, קשמו את הגדלים הידועים וקשבו את אורך אלכסון הקוביה EC.

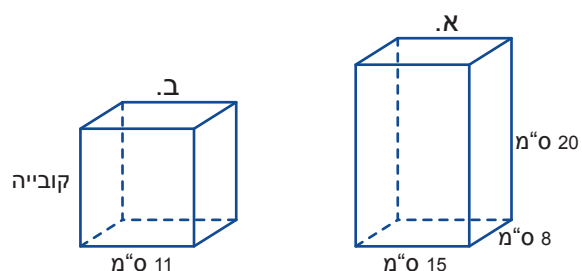




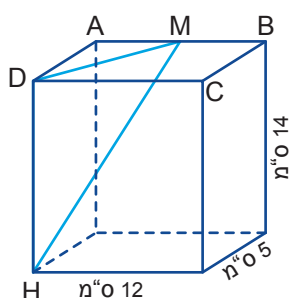
4. חשבו בכל שרטוט את אלכסון התיבה (צבוע באדום). (יחידות האורך בס"מ).
(אפשר להיעזר בדגם תיבה ולבנות את המשולש הצבוע. כדאי לשרטט מחוץ לתיבה, את הפאה בה משורטט אלכסון פאה (צבוע בתכלת), ואת המשולש הצבוע.)



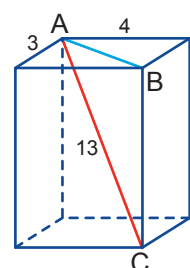
5. אורך צלע הקוביה הוא 17 ס"מ.
חשבו את אורך אלכסון הקוביה.
(אפשר לשרטט מחוץ לתיבה את הפיאה ADHE ואת משולש AHG, כפי שהם נראים במישור.)



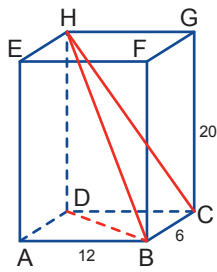
6. בכל שרטוט. חשבו את אורך אלכסון התיבה.



7. א. מהו סוג המשולש MDH? (M אמצע צלע התיבה)
ב. שרטטו את משולש ADM מחוץ לתיבה, וחשבו את אורך DM.
ג. שרטטו את משולש MDH מחוץ לתיבה, וחשבו את אורך MH.



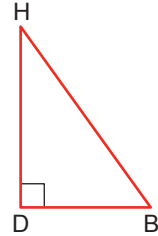
8. א. חשבו את אורך אלכסון הפאה (AB). (יחידות האורך בס"מ)
ב. חשבו את הצלע הלא ידועה של התיבה.
ג. חשבו את נפח התיבה.



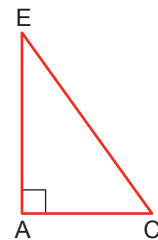
9. משורטטת תיבה שמימדיה $20 \times 6 \times 12$ (ראו שרטוט). (יחידות האורך בס"מ)

א. חשבו את אורך אלכסון התיבה.

ב. **דני** אמר: אני חישבתי את אורך אלכסון HB במשולש HDB.



יותם אמר: אני חישבתי את אורך האלכסון EC במשולש EAC.



האם דני ויותם קיבלו תוצאות שונות? הסבירו.



10. האם אפשר להניח מטריה שאורכה 75 ס"מ.

בתוך מזוודה שמימדיה $25 \times 60 \times 40$ (היחידות בס"מ)?

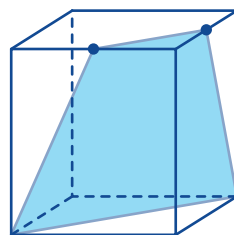
11. חשבו את היקפי המרובעים הצבועים.

הנקודות המודגשות בקובייה ב הן אמצעי הצלעות.

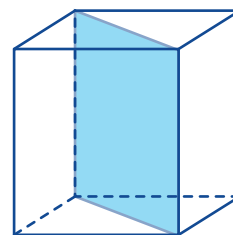
אורך צלע הקובייה הוא 10 ס"מ.

(אפשר לשרטט בצד את הפאות שבהן משורטטות צלעות המרובע.)

ב.



א.



12. אורך צלע הקובייה הוא 10 ס"מ.

נקודות המודגשות בקובייה הן אמצעי הצלעות.

א. מהו סוג המרובע הצבוע?

ב. חשבו את היקפו.

ג. חשבו את שטחו.

