

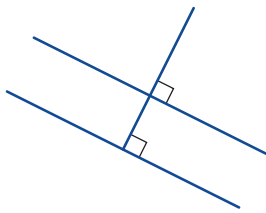
יחידה 34: ממשפט למשפט

שיעור 1. האם הישרים מקבילים?



דנה רוצה להכין תרשים מדויק לבניית חנוכיה. עם 4 זוגות של כְּנים מקבילים.

בהמשך נעזור לה לשרטט במדויק.



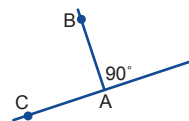
1. בכיתה ז הגדרנו ישרים מקבילים כך:

שני ישרים נקראים מקבילים אם הם מאונכים לאותו ישר.

תזכורת: שני ישרים היוצרים ביניהם זווית ישרה

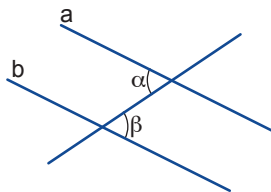
נקראים ישרים מאונכים.

מסמנים: $AC \perp AB$



כמו כן, כאשר נתונים שני ישרים וישר החותך אותם, הוכחנו כי:

אם הישרים מקבילים **אז** הזוויות המתחלפות, הנוצרות בין הישרים והישר החותך, **שוות** זו לזו (ראו שרטוט).

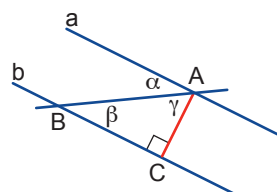


א. קרשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי.

ב. החליפו את הנתונים במסקנה וקרשמו בכתוב מתמטי.

ג. השלימו ניסוח של המשפט שהתקבל:

נתונים שני ישרים וישר החותך אותם: אם ...



נוכיח את המשפט שניסחתם במשימה 1 בסעיף ב.

משרטטים אנך מהנקודה A (על הישר a) לישר b.

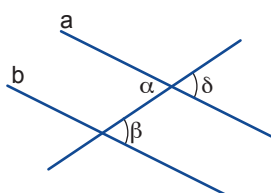
צריך להוכיח $a \parallel b$

כלומר, צריך להוכיח ש- AC מאונך גם לישר a. (ראו הגדרה).

$\beta + \gamma = 90^\circ$ (כי...) ($\alpha = \beta$ (נתון)

$$\alpha + \gamma = 90^\circ$$

לכן, $AC \perp a$



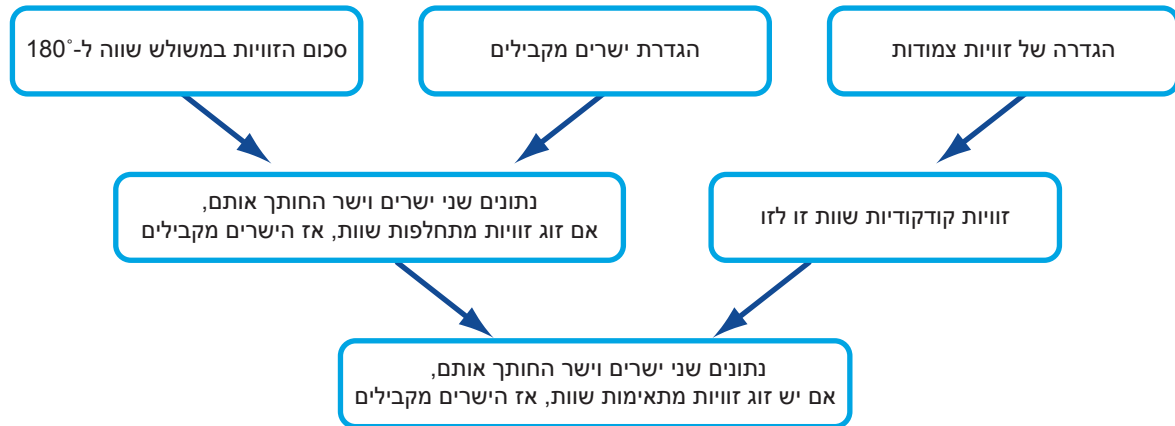
2. נתון: זוג זוויות מתאימות שוות, $\beta = \delta$.

האם אפשר להסיק שהישרים מקבילים? הוכיחו.



ראינו (במשימות 1 ו-2) שאפשר לקבוע שישרים מקבילים גם ללא שרטוט אנך. הוכחנו כי:

נתונים שני ישרים וישר החותך אותם, אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, או זוג זוויות מתאימות שוות, אז הישרים מקבילים.
לפניכם שרשרת המשפטים וההגדרות בהם השתמשנו להוכחת המשפט.



3. נחזור לתרשים החנוכיה של דנה.

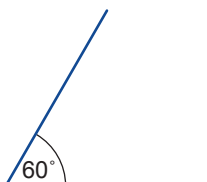


א. העתיקו את תחילת התרשים ושרטטו עוד 3 זוגות של כִּנִּים מקבילים, לזוג הכִּנים המשרטט. שימו לב למידות שבשרטוט.

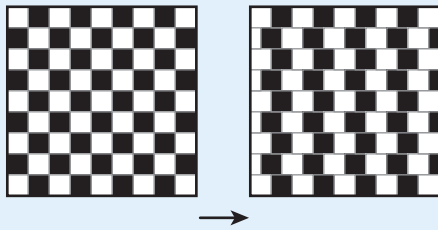
היעזרו בסרגל ובמד זווית, או העתיקו את הזווית של 60° על דף שקוף.



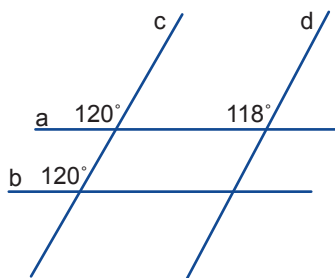
ב. כיצד אתם יודעים שהכִּנים מקבילים?



פינת התעתועים

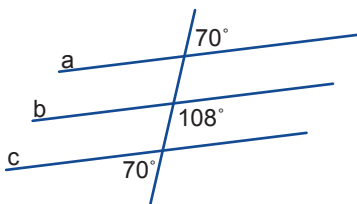


התעתוע נוצר על-ידי הזזת השורות של רשת משבצות ריבועיות. כתוצאה מהזזה זאת, הישרים נראים לא מקבילים. תוכלו להעתיק את הישרים לדף שקוף, וכך לוודא כי במציאות, הישרים נשארו מקבילים.

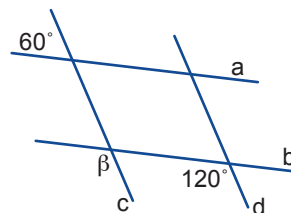


1. רשמו בין כל זוג ישרים: $\parallel$ או $\nparallel$ (מקבילים או לא מקבילים):

א. $c \text{ --- } d$ $a \text{ --- } b$

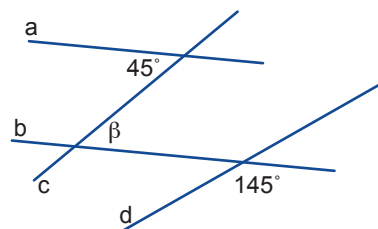


ב. $a \text{ --- } c$ $b \text{ --- } c$ $a \text{ --- } b$



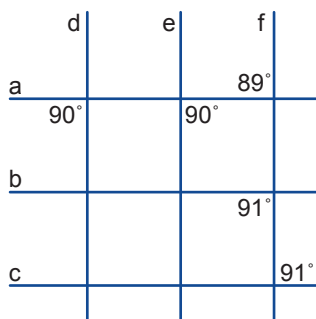
2. א. נתון: $b \parallel a$

- חשבו את הזווית β .
- האם $d \parallel c$? נמקו.



ב. נתון: $b \parallel a$

- חשבו את הזווית β .
- האם $d \parallel c$? נמקו.



3. רשמו בין כל זוג ישרים: $\parallel$ או $\nparallel$ (מקבילים או לא מקבילים):

$b \text{ --- } c$ $a \text{ --- } c$ $a \text{ --- } b$
 $d \text{ --- } f$ $e \text{ --- } f$ $d \text{ --- } e$



4. בכל סעיף, שרטטו לפי הנתונים ומצאו זוגות של ישרים מקבילים.

א. נתון: $a \perp b$ $c \perp b$

ב. נתון: $a \perp b$ $b \perp c$ $c \perp d$ $d \perp e$



5. נתון: $AB = CD$

$CB = AD$

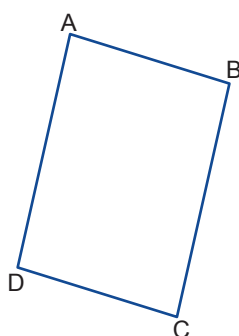
א. הוכיחו: $AB \parallel CD$ (שרטטו אלכסון)

$AD \parallel CB$

הוכחתם את המשפט: אם במרובע הצלעות הנגדיות שוות אז הן גם מקבילות.

ב. החליפו את הנתונים במסקנה הרשומים בסעיף א והוכיחו.

ג. נסחו את המשפט שהוכחתם בסעיף ב.

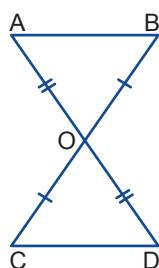


6. א. רשמו את הנתונים המסומנים בכתוב מתמטי.

ב. האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

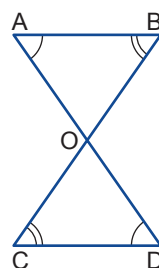
ג. האם אפשר להסיק $AB \parallel CD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



7. א. רשמו את הנתונים המסומנים בכתוב מתמטי.

ב. האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

ג. האם אפשר להסיק $AB \parallel CD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

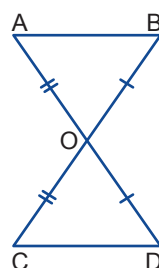


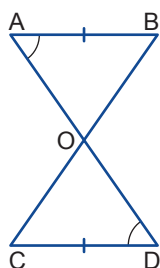
8. א. רשמו את הנתונים המסומנים בכתוב מתמטי.

ב. האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?

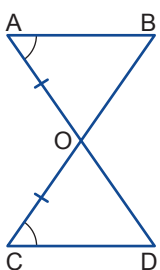
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

ג. האם אפשר להסיק $AB \parallel CD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

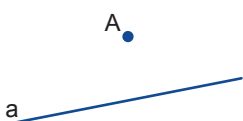




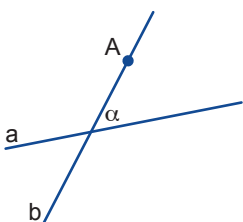
9. א. רשמו את הנתונים המסומנים בכתוב מתמטי.
 ב. האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
 ג. האם אפשר להסיק $AB \parallel CD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



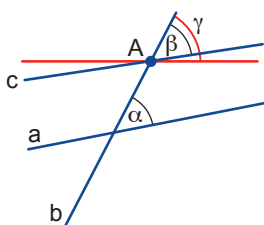
10. א. רשמו את הנתונים המסומנים בכתוב מתמטי.
 ב. האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
 ג. האם אפשר להסיק $AB \parallel CD$? אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



11. משפט: דרך נקודה מחוץ לישר עובר מקביל אחד ויחיד לישר a.
 א. רשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.

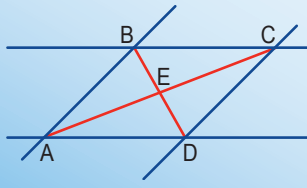


- ב. הישר b חותך את הישר a דרך הנקודה A. הישר b יוצר זווית α עם הישר a.
 - שרטטו ישר c דרך A, היוצר זווית β עם הישר b כך ש: $\beta = \alpha$.
 - האם $a \parallel c$? נמקו.



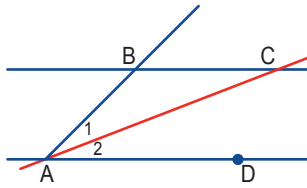
הסבירו מדוע אי אפשר לשרטט שני מקבילים ל- a דרך A.

שיעור 2. שרשרות של משפטים



נתון: $AD \parallel BC$, AC חוצה את $\angle BAD$ ו- BD חוצה את $\angle ABC$.
אילו מסקנות אפשר להוכיח על סמך הנתונים והמשפטים שלמדנו?

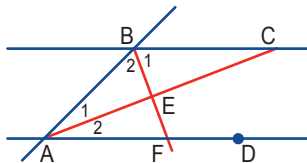
במשימות שלפניכם שרשרת של מסקנות הנובעות מהנתונים וממשפטים שלמדתם.
בכל משימה תוכלו להיעזר במסקנות שהוכחו במשימות הקודמות לה.



1. נתון: $BC \parallel AD$

AC חוצה את $\angle BAD$

הוכיחו: משולש ABC שווה שוקיים.



2. נתון: $BC \parallel AD$

AC חוצה את $\angle BAD$

BF חוצה את $\angle ABC$

א. $BE \perp AE$

ב. $AE = EC$

$BE = EF$

3. הנתונים כבמשימה 2.

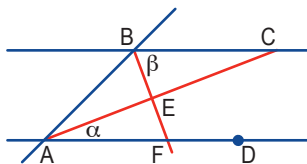
א. העתיקו את השרטוט.

סמנו ב- α זוויות השוות לזווית α שבשרטוט.

סמנו ב- β זוויות השוות לזווית β שבשרטוט.

ב. כמה משולשים ישרי זווית בשרטוט? רשמו אותם.

ג. כמה משולשים שווי שוקיים בשרטוט? רשמו אותם.



4. הנתונים כבמשימה 2.

חיברו את CF .

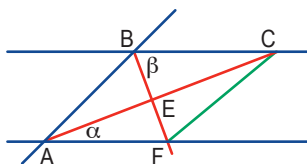
הוכיחו:

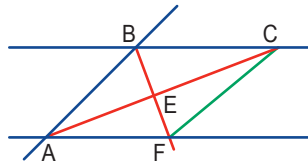
א. בשרטוט יש ארבעה משולשים חופפים זה לזה.

ב. AB מקביל ל- FC .

ג. ארבע הצלעות של מרובע $ABCD$ שוות זו לזו.

איך נקרא מרובע שכל צלעותיו שוות?





בגיאומטריה יוצאים מהנתונים ומוכיחים שרשרת של מסקנות המבוססות על הנתונים ועל מסקנות ומשפטים קודמים.

להלן, הנתונים, שרשרת המסקנות שהסקנו במשימות בשיעור, ומשפטים בהם השתמשנו:

נתונים:

$\angle ABC$ חוצה את BF

$\angle AFIIBC$
חוצה את BAF את AC

משפטים:

4. משפט חפיפה
צ.ז.צ. או צ.צ.צ.
5. נתונים שני ישרים
וישר החותך אותם.
אם יש זוג זוויות
מתחלפות שוות,
אז הישרים מקבילים.

3. חוצה זווית הראש
במשולש שווה שוקיים
הוא גם גובה וגם
תיכון לבסיס

1. נתונים שני ישרים
וישר החותך אותם.
אם הישרים מקבילים
אז הזוויות המתחלפות
הנוצרות בין הישרים
והישר החותך, שוות זו לזו.
2. אם במשולש יש 2 זוויות שוות
אז המשולש שווה שוקיים

מסקנות:

ארבעת המשולשים ישרי הזווית
חופפים זה לזה. CF מקביל ל- AB

$AC \perp BF$
 $EC = AE$
 $EF = BE$

$\triangle ABC$ שווה שוקיים



במשימות 1-8 שרשרת של טענות. המסקנות אינן מבוססות אחת על הקודמת לה, אך הוכחת הטענות דומה.

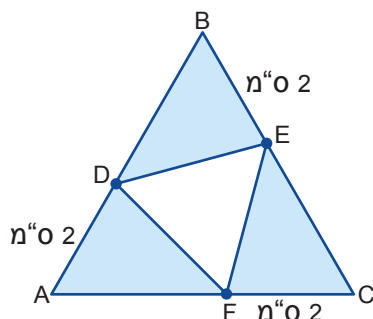


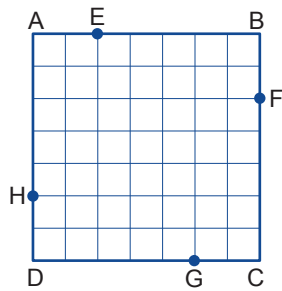
1. משולש ABC הוא משולש שווה צלעות. אורך כל אחת מצלעותיו 6 ס"מ.

על צלעות המשולש הקצו קטעים שווים בהתאמה, שאורך כל אחד מהם 2 ס"מ.
ראו שרטוט.

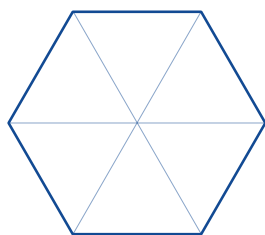
א. הסבירו מדוע המשולשים הצבועים חופפים.

ב. הסבירו מדוע משולש DEF שווה צלעות.

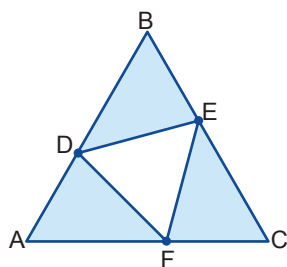




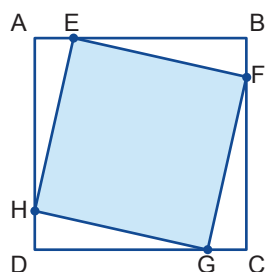
2. העתיקו את הריבוע (7×7 משבצות) על דף במחברת משובצת.
 על צלעות הריבוע סמנו קטעים: $AE = BF = CG = DH$.
 חברו למרובע EFGH.
 א. לפי איזה משפט חפיפה ארבעת המשולשים שהתקבלו?
 ב. הסבירו מדוע זוויות המרובע הפנימי הן זוויות ישרות.
 ג. מאיזה סוג המרובע EFGH?



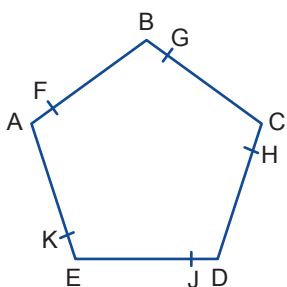
3. בשרטוט משושה משוכלל. גודל כל זווית במשושה משוכלל היא 120° . העתיקו אותו.
 א. סמנו וחברו את אמצעי הצלעות של המשושה.
 הסבירו מדוע הצלעות של המשושה הפנימי שוות זו לזו.
 ב. הסבירו מדוע כל זווית במשושה הפנימי היא 120° .
 ג. מאיזה סוג המשושה החדש שהתקבל?



4. משולש ABC הוא משולש שווה צלעות.
 על צלעות המשולש סמנו קטעים שווים: $AD = BE = CF$.
 מסקנה: משולש DEF שווה צלעות.
 א. קשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.
 ב. הוכיחו שהטענה נכונה.



5. על צלעות הריבוע ABCD, סמנו קטעים שווים: $AE = BF = CG = DH$.
 מאיזה סוג המרובע DFGH?
 הוכיחו את טענתכם.



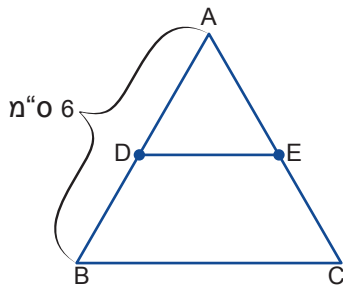
6. על צלעות המחומש המשוכלל ABCDE סמנו קטעים שווים:
 $AF = BG = CH = DJ = EK$
 א. העתיקו את המחומש והשלימו את השרטוט.
 ב. איזה מחומש התקבל?
 ג. הוכיחו את טענתכם.

7. שרטטו ונסחו טענה דומה לטענות שבמשימות הקודמות, לגבי משושה משוכלל. הוכיחו את הטענה שניסחתם.

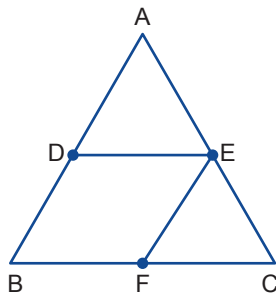


8. נסחו מסקנה כללית לגבי חיבור אמצעים של מצולע משוכלל בעל n צלעות.

במשימות 9-15 שרשרת של טענות. המסקנות מבוססות על הנתונים, על המסקנות של המשימות הקודמות, ועל משפטים שכבר הוכחתם.

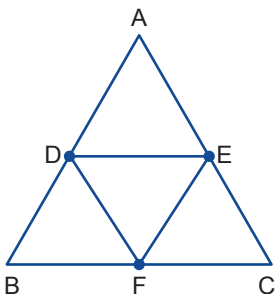


9. משולש ABC הוא משולש שווה צלעות. אורך כל צלע 6 ס"מ.
מאמצע הצלע AB העבירו קטע DE מקביל לצלע BC.
מסקנה: משולש ADE דומה למשולש ABC.
א. קשמו בכתב מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח.
ב. סמנו זוויות שוות והוכיחו את דמיון המשולשים: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$
ג. מה אורך AE? הסבירו.
ד. מה אורך DE? הסבירו.
ה. הסבירו מדוע משולש ADE הוא משולש שווה צלעות.



10. הנתונים ממשימה 9 וגם נתון: EF מקביל ל-AB.

- א. הוכיחו: $\triangle ECF \sim \triangle ACB$
ב. מה אורך CF? הסבירו.
ג. הוכיחו: $\triangle ECF \cong \triangle AED$



11. הנתונים כבמשימות הקודמות. חיברו את הנקודות F ו-D.

- א. הוכיחו שכל ארבעת המשולשים הם משולשים חופפים.
(העתיקו את המשולש וקשמו את הגדלים של הזוויות ואת אורכי הצלעות.)
ב. מה היחס בין השטח של כל אחד מהמשולשים הקטנים לשטח המשולש ABC?
$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = ?$$

ג. בעבר הוכחתם כי השטחים של מצולעים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע יחס הדמיון.
האם היחס שהתקבל בסעיף ב מתאים למשפט הזה?



12. מאמצע הצלע AB, של משולש ABC, העבירו קטע DE מקביל לצלע BC.

מסקנה: משולש ADE דומה למשולש ABC.

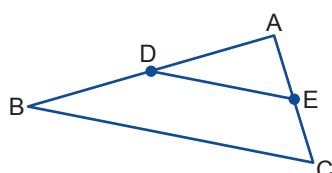
א. קשמו בכתיב מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. סמנו זוויות שוות והוכיחו את דמיון המשולשים: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

ג. מהו יחס הדמיון?

ד. מה היחס בין השטחים של שני המשולשים?

ה. הסבירו מדוע $AE = EC$.



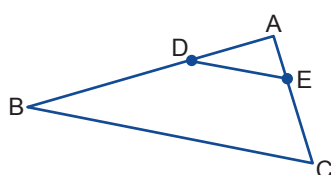
13. חילקו את הצלע של משולש ABC כך ש: $AD = \frac{1}{3}AB$

ושרטטו קטע DE מקביל ל-BC.

א. **הוכיחו:** משולש ADE דומה למשולש ABC.

ב. מהו יחס הדמיון?

ג. מה היחס בין השטחים של שני המשולשים?



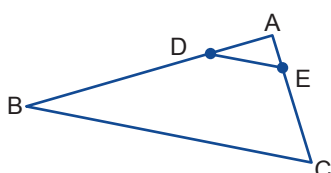
14. חילקו את הצלע של משולש ABC כך ש: $AD = \frac{1}{4}AB$

ושרטטו קטע DE מקביל ל-BC.

א. **הוכיחו:** משולש ADE דומה למשולש ABC.

ב. מהו יחס הדמיון?

ג. מה היחס בין השטחים של שני המשולשים?



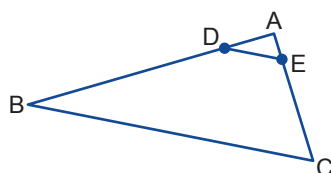
15. חילקו את הצלע של משולש ABC כך ש: $AD = \frac{1}{10}AB$

ושרטטו קטע DE מקביל ל-BC.

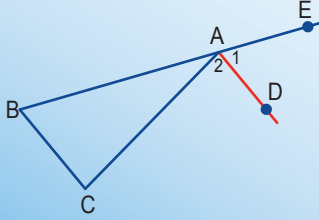
א. **הוכיחו:** משולש ADE דומה למשולש ABC.

ב. מהו יחס הדמיון?

ג. מה היחס בין השטחים של שני המשולשים?



שיעור 3. מחליפים בין נתונים למסקנות



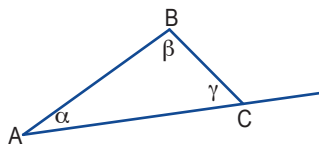
נתון: $AC = AB$

$\angle A1 = \angle A2$

מסקנה: $AD \parallel BC$

אם מחליפים אחד הנתונים במסקנה האם יתקבל משפט נכון?
האם המשפט המקורי נכון?
במהלך השיעור נבדוק החלפות כאלה.

1. **משפט:** זווית חיצונית במשולש שווה בגודלה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.



א. קשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. הוכיחו את המשפט.

2. במשולש שווה שוקיים שרטטו את חוצה הזווית החיצונית הצמודה לזווית הראש.

טענה: נוכיח כי חוצה הזווית מקביל לבסיס המשולש.

א. קשמו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. העתיקו את השרטוט וסמנו $\angle B = \alpha$

ג. קשמו את הזוויות הבאות בעזרת α ונמקו:

$$\angle C =$$

$$\angle EAC =$$

$$\angle A2 =$$



$$AD \parallel BC$$



לפניכם מהלך ההוכחה ושרשרת המשפטים בה השתמשנו להוכחת הטענה במשימה 2.

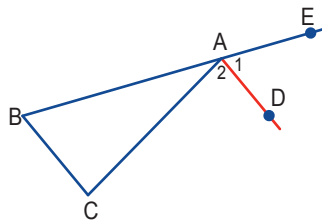
זווית חיצונית במשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה

במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו

נתונים שני ישרים וישר החותך אותם, אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות, אז הישרים מקבילים

במשולש שווה שוקיים, חוצה הזווית החיצונית הצמודה לזווית הראש, מקביל לבסיס

3. מחליפים בין נתון אחד ומה שצריך להוכיח במשפט שהוכחתם במשימה 2.



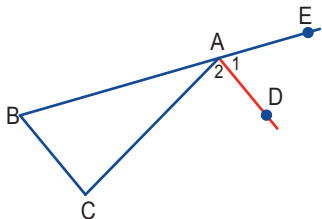
נתון: $AB = AC$

$AD \parallel BC$

א. הוכיחו: $\angle A_1 = \angle A_2$

ב. נסחו את המשפט שהוכחתם כאן.

4. מחליפים נתון אחר במה שצריך להוכיח, במשפט שהוכחתם במשימה 2:



נתון: $AD \parallel BC$

$\angle A_1 = \angle A_2$

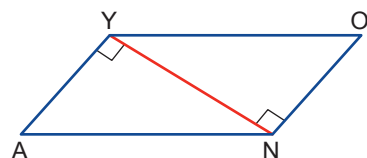
א. הוכיחו: $AC = AB$

ב. השלימו את ניסוח המשפט שהוכחתם:

אם חוצה זווית חיצונית של משולש מקביל לצלע שמול הזווית אז ...



אם מחליפים, אחד מהנתונים במה שצריך להוכיח, מתקבל משפט חדש שיש להוכיחו, או להראות שאינו נכון.



$ON = AY$

1. נתון:

$\angle AYN = \angle ONY = 90^\circ$

א. הוכיחו: $\triangle ONY \cong \triangle AYN$

ב. העתיקו את התרשים והשלימו את המשפט בו השתמשתם.

נתונים $\leftarrow$ $\leftarrow$ מסקנה



2. נתון: $\angle O = \angle A$

$\angle AYN = \angle ONY = 90^\circ$

א. הוכיחו: $\triangle ONY \cong \triangle AYN$

ב. העתיקו את התרשים והשלימו את המשפטים בהם השתמשתם.

נתונים $\leftarrow$ $\leftarrow$ מסקנה



3. נתון: $YO \parallel AN$

$$\angle AYN = \angle ONY = 90^\circ$$

א. הוכיחו: $\triangle ONY \cong \triangle AYN$

ב. העתיקו את התרשים והשלימו את המשפט בו השתמשתם.

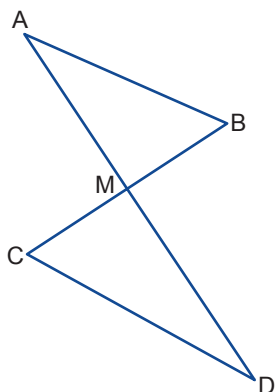


4. נתון: $AB \parallel CD$

האם אפשר להסיק $AM = MD$?

אם כן, הוכיחו.

אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

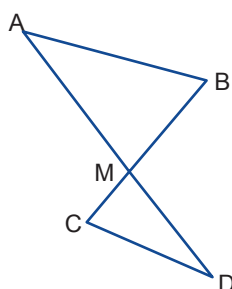


5. נתון: $AB \parallel CD$

א. הוכיחו: $\triangle AMB \sim \triangle DMC$

ב. נתון גם: $AB = 5$ ס"מ $DC = 4$ ס"מ

חשבו את היחס בין שטחי המשולשים.



1. המשולש הירוק חופף למשולש הכחול ושניהם

משולשים ישרי זווית, ובהם גם זווית חדה שגודלה 30° .

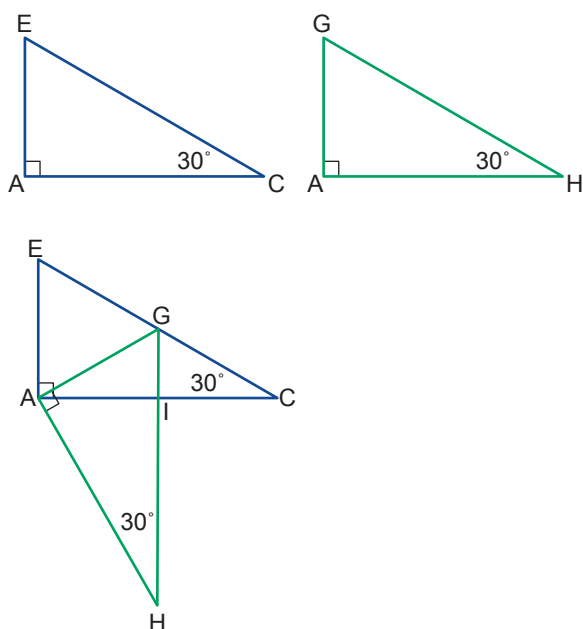
הניחו את המשולש הירוק על המשולש הכחול,

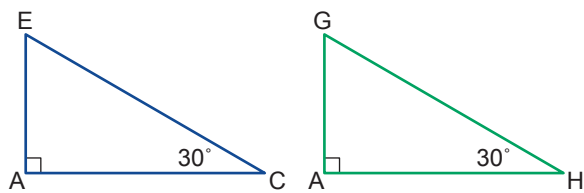
כך ש- $\angle GAH = 90^\circ$ (ראו שרטוט)

א. חשבו את כל הזוויות בשרטוט.

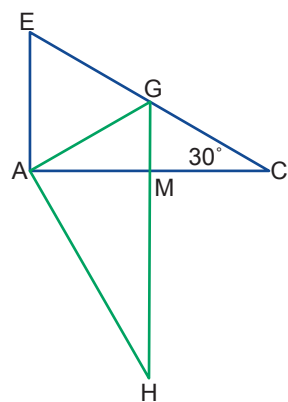
ב. מצאו בשרטוט משולש שווה צלעות ונמקו.

ג. מצאו בשרטוט זוגות של משולשים דומים.

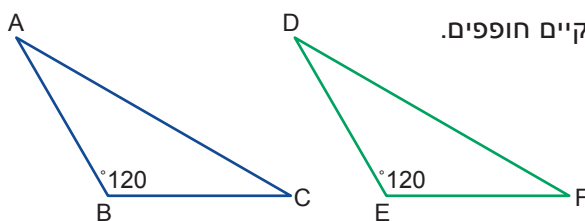




2. המשולש הירוק חופף למשולש הכחול ושניהם משולשים ישרי זווית. ובהם זווית חדה שגודלה 30° . הניחו את המשולש הירוק על המשולש הכחול כך ש- $\angle GHA = 90^\circ$ (ראו שרטוט).



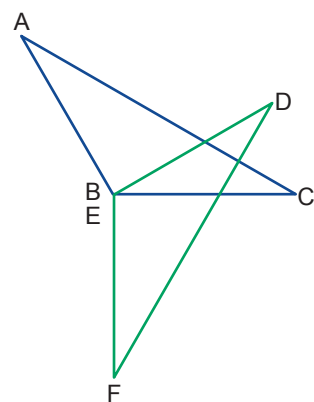
- א. חשבו את כל הזוויות בשרטוט.
ב. מצאו בשרטוט זוגות של משולשים דומים.
ג. מצאו בשרטוט משולש שווה צלעות ונמקו.
ד. הוכיחו $\triangle AGM \cong \triangle CGM$



3. המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle DEF$ הם משולשים שווי שוקיים חופפים.

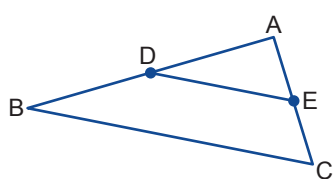
$$\angle DEF = \angle ABC = 120^\circ$$

- הניחו את המשולש הירוק על המשולש הכחול כך ש- $\angle ABD = 90^\circ$ (ראו שרטוט).
א. סמנו באותיות נקודות חיתוך נוספות.



חשבו את כל הזוויות בשרטוט.

- ב. רשמו את כל המשולשים ישרי הזווית שבשרטוט.
ג. רשמו את כל המשולשים שווי השוקיים ונמקו.



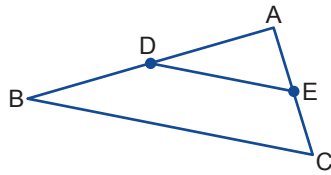
4. נתון: הנקודות D ו- E על הצלעות AB ו- AC של משולש ABC,

ו- DE מקביל לצלע BC.

- א. שרטטו ורשמו את הנתונים בכתיב מתמטי.
ב. הוכיחו: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.



5. **רני** החליף זה בזה את הנתונים והמסקנה במשפט שהוכחתם במשימה 4:

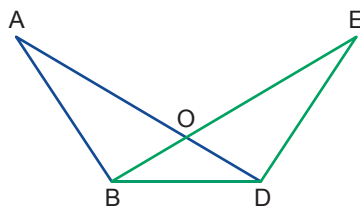


אם הנקודות D ו-E על צלעות של משולש ABC.
והמשולש שהתקבל דומה למשולש ABC.
אז DE מקביל ל-BC.
רמי טען שהמשפט אינו נכון ושרטטה דוגמה נגדית.
נסו לשרטט את הדוגמה הנגדית שלו.



6. לפניכם ניסוח אחר של המשפט ממשימה 5.

אם הנקודות D ו-E על צלעות של משולש ABC.
ו- $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. כך שקודקודי המשולשים רשומים בהתאמה.
אז: $AD \parallel BC$
שרטטו והוכיחו את המשפט.



7. **נתון:** $EB = AD$
 $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ADB$

א. העתיקו את השרטוט, סמנו את הנתונים.

ב. הוכיחו: $\triangle ABD \cong \triangle EDB$

ג. הוכיחו: $\triangle BOD$ שווה שוקיים.

ד. הוסיפו **נתון**: C אמצע BD.

הוכיחו: $EC = AC$

