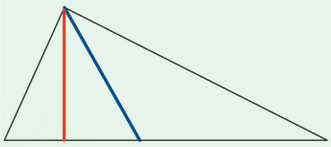
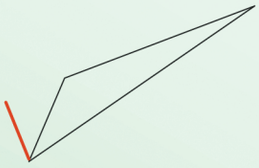


יחידה 30: הגדרות, משפטים והוכחות

שיעור 1: על מושגים והגדרות



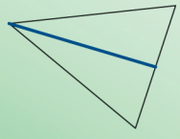
הקטע **ה**אדום הוא **גובה** במשולש.
הקטע **ה**כחול הוא **חוצה זווית** במשולש.



- האם גם במשולש זה הקטע האדום הוא גובה?



- היכן עובר הגובה לצלע המודגשת במשולש ישר הזווית?
- האם חוצה הזווית יכול לעבור מחוץ למשולש?



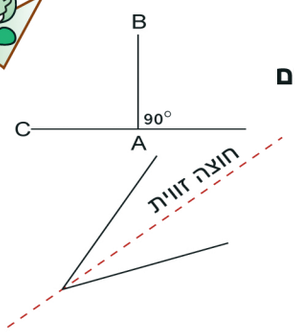
- האם במשולש שבשרטוט, הקטע הכחול הוא גובה או חוצה זווית?

בהמשך השיעור נבדוק שאלות אלה.



תזכורת:

- שני ישרים היוצרים ביניהם זווית ישרה נקראים **ישרים מאונכים** זה לזה. מסמנים $AB \perp AC$.

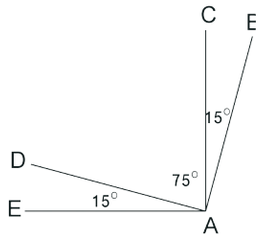


- ישר העובר דרך קודקוד של זווית ומחלק אותה לשתי זוויות שוות נקרא **חוצה זווית**.

1. מִצאו בכל שרטוט, זוגות של ישרים מאונכים והַשלימו את הרישום.

א. *דוגמה:* $AD \perp AE$

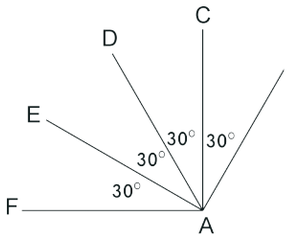
___ ⊥ ___



ב.

___ ⊥ ___

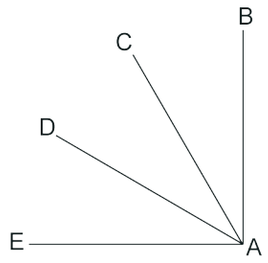
___ ⊥ ___



2. הַשלימו לפי השרטוט. (רִשמו כל זווית בעזרת 3 אותיות - הקודקוד באמצע).

AC חוצה את _____ $\sphericalangle$

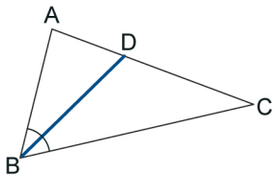
AD חוצה את _____ $\sphericalangle$



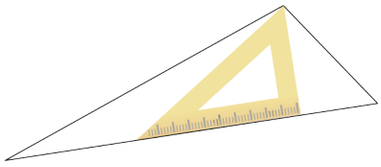


תזכורת:

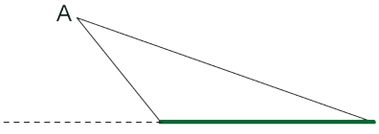
- אנך מקודקוד של משולש לצלע שמולו נקרא **גובה במשולש**.
  בכתיב מתמטי נרשום: $AD \perp BC$.
- קטע החוצה זווית של משולש נקרא **חוצה זווית במשולש**.
  בכתיב מתמטי נרשום: $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABD$.

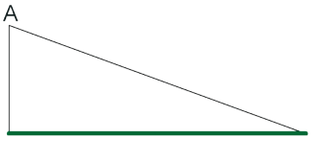


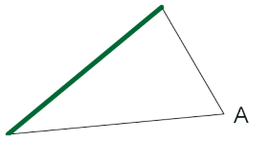
3. כדי לשרטט גובה משתמשים בזווית ישרה
(של סרגל או משולש, או ספר).



א. בכל משולש, שַרטטו, גובה מהקודקוד A לצלע המודגשת.



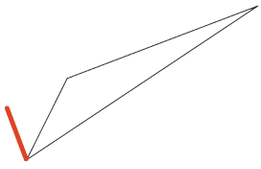




ב. בכל משולש, שַרטטו את חוצה הזווית A, בצבע שונה מזה ששרטטתם את הגובה.

4. נחזור לשאלות **שבמסגרת הירוקה** שבתחילת השיעור:

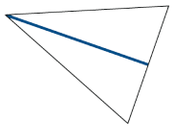
א. האם הקטע **האדום** הוא גובה במשולש שבשרטוט?
המשיכו את הצלע, ובִדקו.





ב. שַרטטו את הגובה לצלע המודגשת במשולש ישר הזווית?

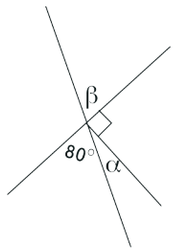
ג. האם **חוצה הזווית** יכול לעבור מחוץ למשולש?



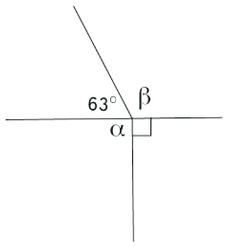
ד. האם הקטע **הכחול** יכול להיות גם גובה וגם חוצה זווית במשולש שבשרטוט? בִדקו בעזרת מד מעלות וסרגל.

1. חָשבו את הזוויות α ו- β על פי הנתונים:

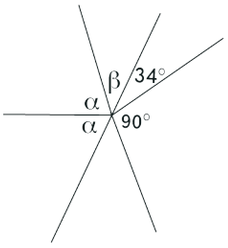
א.



ב.

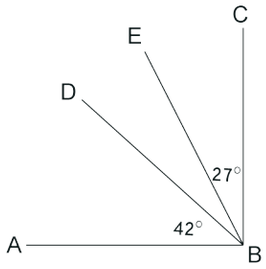


ג.



2. נתון: $BC \perp AB$.

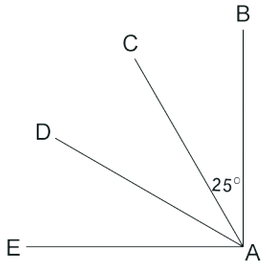
חַשבו את $\sphericalangle DBE$.



3. נתון: $AB \perp AE$.

AC חוצה את זווית BAD.

חַשבו את $\sphericalangle DAE$.



4. א. מְצאו בשרטוט זוגות של ישרים מאונכים.

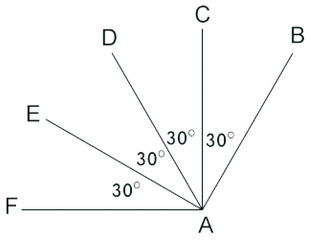
ב. הַשלימו את הרישום:

AD חוצה את ____ $\sphericalangle$

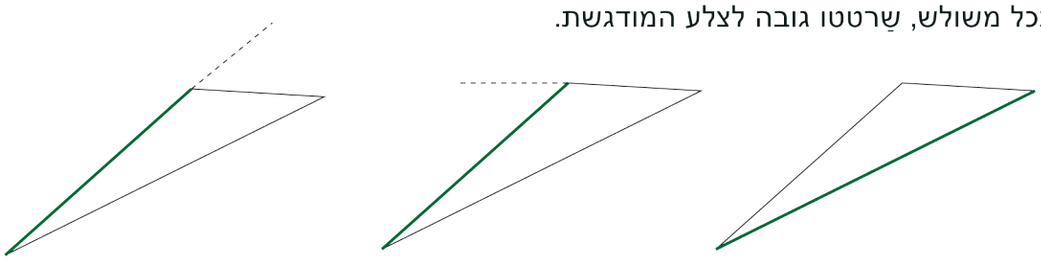
AD חוצה גם את ____ $\sphericalangle$

AC חוצה את ____ $\sphericalangle$

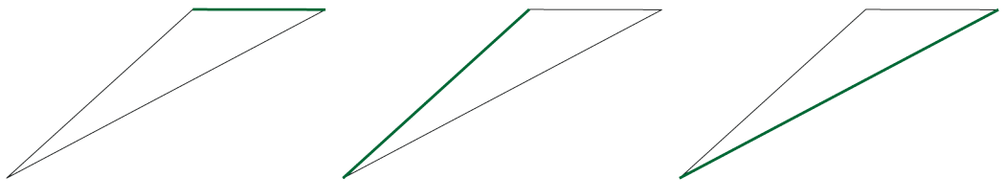
AE חוצה את ____ $\sphericalangle$



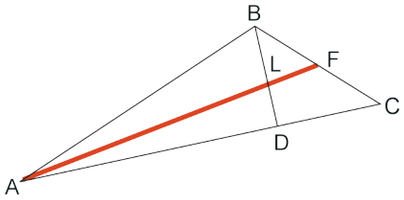
5. בכל משולש, שַרטטו גובה לצלע המודגשת.



6. בכל משולש, שַׂרטטו גובה לצלע המודגשת. אם יש צורך הַאריכו את הצלע מחוץ למשולש.



7. נתון: BD גובה במשולש. AF חוצה את זווית A.



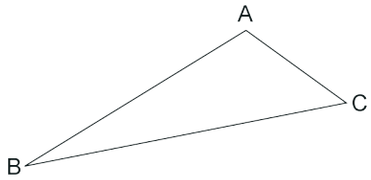
א. רִשמו את הנתונים בכתיב מתמטי.

ב. אילו מהטענות הבאות נכונות?

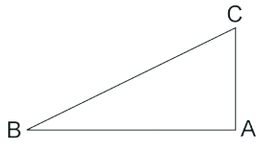
- AL חוצה זווית במשולש BAD.
- BD חוצה זווית במשולש ABC.
- AL גובה במשולש BAD.
- BL גובה במשולש ABF.

8. א. שַׂרטטו את חוצה זווית A.
(היעזרו במד מעלות.)

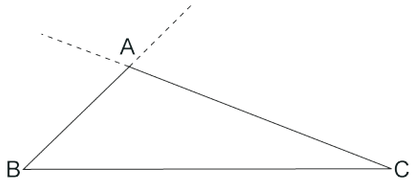
ב. שַׂרטטו גובה מקודקוד A לצלע BC.



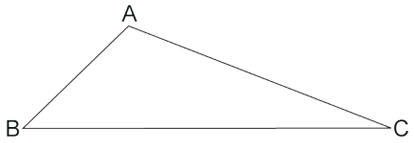
9. שַׂרטטו את חוצי הזוויות B ו- C במשולש.



10. שַׂרטטו גובה מכל קודקוד של המשולש לצלע שמולו.



11. שַׂרטטו את שלושת חוצי הזוויות של המשולש.



שיעור 2: מהו משפט במתמטיקה?

במהלך לימוד גאומטריה ניסחנו משפטים (משפטי חפיפה, משפט דמיון, ועוד).

מהו משפט?



האם **אפשר לשאול** אם ההיגדים הבאים נכונים או לא?

א. "מה הסכום של 24 ו- 76?"

ב. "אם יורד שלג, הטמפרטורה נמוכה מ- 2 מעלות".

משפט במתמטיקה הוא היגד שאפשר לשאול לגביו האם הוא נכון או לא נכון.

נלמד עוד על משפטים במתמטיקה.

1. בכל סעיף, רשום היגד: בדקו אם **אפשר** או **אי-אפשר** לשאול אם הוא "נכון או לא נכון".
   ציינו ליד ההיגד: "**אפשר**" או "**אי-אפשר**".

א. **אם** יורד גשם **אז** יש עננים בשמיים. _____

ב. מה סכום הזוויות במרובע? _____

ג. במחומש יש 5 אלכסונים. _____

ד. **אם** יש עננים בשמיים **אז** יורד גשם. _____

ה. מה סכום הזוויות במשולש? _____

ו. בריבוע כל הזוויות ישרות. _____



כל משפט במתמטיקה אפשר לנסח באמצעות "אם" ו"אז" המפרידים בין הנתונים למסקנה.

דוגמה: **אם** שני משולשים דומים **אז** הזוויות שלהם שוות.

2. נסחו את המשפטים הבאים בעזרת "אם" ו"אז".

א. כשחם צריך לשתות הרבה.

ב. בחורף יורד גשם.

ג. כלב נובח אינו נושך.

ד. במשולשים חופפים הצלעות המתאימות שוות.

ה. במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות ל- $60°$.

ו. כל משולש שווה צלעות הוא משולש שווה שוקיים.



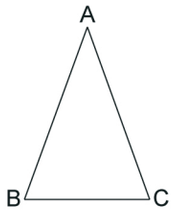
משפט במתמטיקה בנוי **מנתונים ומסקנה**.

במקרים רבים רושמים את הנתונים ואת המסקנות בכתיב מתמטי.

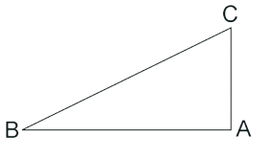
דוגמה: אם המשולש שווה שוקיים, אז זוויות הבסיס שוות.

נתון: $AB = AC$

מסקנה: $\sphericalangle B = \sphericalangle C$



3. הַשלימו רישום של הנתונים והמסקנה בכתיב מתמטי.



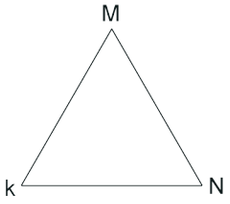
א. אם במשולש ABC הזווית A ישרה, אז שתי הזוויות האחרות חדות.

נתון: $\sphericalangle A = ___$

מסקנה : $\sphericalangle B < ___$

$___ < \sphericalangle ___$

ב. אם במשולש MKN שלוש הזוויות שוות זו לזו, אז המשולש שווה צלעות.



נתון: $\sphericalangle ___ = \sphericalangle ___ = \sphericalangle K$

מסקנה: $____ = ____ = ____$

4. בִּדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים. הַסבירו.

א. **נתון**: דינה נמוכה מיעל.
יעל נמוכה משולה.

מסקנה: דינה נמוכה משולה.
(היעזרו בשרטוט קטעים.)

ב. **נתון**: כל עץ הוא בעל שורשים.
אקליפטוס הוא עץ.

מסקנה: לאקליפטוס יש שורשים.

ג. **נתון**: מכונית מכבי-אש היא אדומה.
בחוץ עוברת מכונית אדומה.

מסקנה: המכונית שעוברת בחוץ היא מכונית מכבי אש.

ד. **נתון**: דינה נמוכה מורד.
מיכל נמוכה מורד.

מסקנה: מיכל נמוכה מדינה.
(היעזרו בשרטוט קטעים.)

5. בִּדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.

אם כן, הַסבירו. אם לא, שַׁרטטו ורִשמו נתונים מספריים המראים שהמשפט **אינו נכון**.

א. אם מחלקים זווית ישרה לשתי זוויות שוות, אז כל אחת מהן שווה ל- $45°$.

ב. אם שתי זוויות במשולש חדות, אז הזווית השלישית קהה.

ג. זווית צמודה לזווית חדה היא זווית קהה.





1. נַסחו את המשפטים הבאים באמצעות "אם" ו"אז".

א. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.

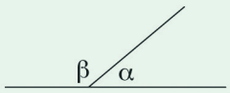
ב. לאחר חודש שבט מגיע חודש אדר.

ג. כל ילד מעל גיל 6 חייב ללכת לבית הספר.

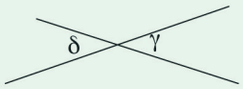
ד. תלמיד שאינו מכין שיעורי בית במתמטיקה, נכשל במבחן.

תזכורת:

- **זוויות צמודות** נוצרות כאשר משרטטים קרן מנקודה על ישר.
  זוויות צמודות יוצרות יחד זווית שטוחה: $\alpha + \beta = 180^\circ$



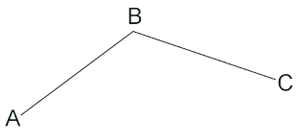
- **זוויות קודקודיות** נוצרות בין שני ישרים נחתכים,
  ואינן זוויות צמודות.
  זוויות קודקודיות שוות זו לזו: $\gamma = \delta$.





2. א. שַׂרטטו זווית צמודה לזווית ABC.

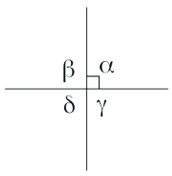
ב. שַׂרטטו זווית קודקודית לזווית ABC.





3. הַשלימו את הנתונים והמסקנה בכתיב מתמטי.

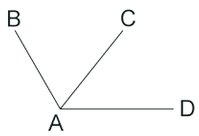
א. אם אחת הזוויות בין שני ישרים נחתכים היא ישרה,
אז גם שלוש הזוויות האחרות ישרות.



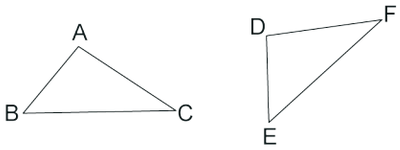
נתון: ___ = ___

מסקנה: 90° = ___ = ___ = ___

ב. אם AC חוצה את זווית של 120°,
אז זווית CAD שווה ל- 60°.



ג. אם משולשים חופפים אז הם שווים בשטחם.



4. בִּדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.

אם כן, הַסבירו. אם לא, שַׁרטטו ורִשמו נתונים מספריים המראים שהמשפט **אינו נכון**.

א. אם הסכום של שתי זוויות הוא $180°$, אז הן זוויות צמודות.

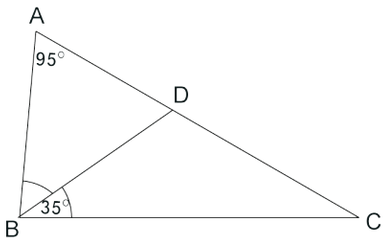
ב. אם שתי זוויות בעלות קודקוד משותף שוות, אז הן זוויות קודקודיות.

ג. אם מחלקים זווית ישרה לשלוש זוויות שוות, אז כל אחת מהן היא בת $30°$.

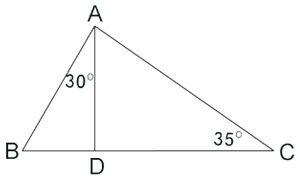
5. בכל סעיף, חַשבו לפי הנתונים את הגדלים של כל הזווית במשולש ABC.

תזכורת: סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180°$

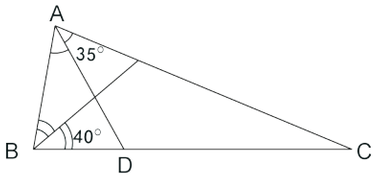
א. BD חוצה זווית במשולש ABC.



ב. AD גובה במשולש ABC.



ג. AD ו- BE חוצי זוויות במשולש ABC.

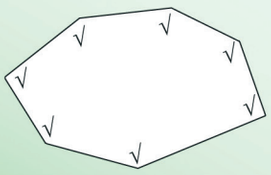




שיעור 3: זוויות פנימיות במצולע

בשרטוט מצולע בעל שבע צלעות.

האם אפשר למצוא ללא מדידה את סכום הזוויות הפנימיות,
המסומנות ב- √ בשרטוט?



נבדוק מהו סכום הזוויות הפנימיות במצולעים שונים.

1. א. שַׂרטטו את האלכסון AC.

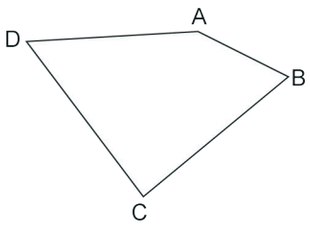
סַמנו בקשתות את זוויות המשולשים שנוצרו.

מהו סכום הזוויות במרובע?

הַשלימו את המסקנה בכתיב מתמטי.

נתון: $ABCD$ מרובע.

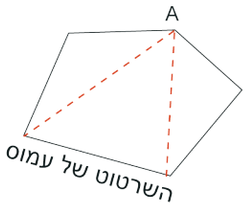
מסקנה: $____ = \sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D$_



ב. **עמוס** אמר: שרטטתי את האלכסונים מהקודקוד A ומצאתי את סכום הזוויות במחומש.

סַמנו בקשתות את זוויות המשולשים שנוצרו בשרטוט.

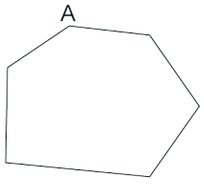
מה סכום הזוויות במחומש?



ג. בכל מצולע שַׂרטטו את האלכסונים מהקודקוד A.

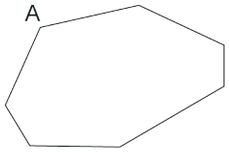
בִּדקו כמה משולשים נוצרו.

מִצאו את סכום הזוויות בכל מצולע.



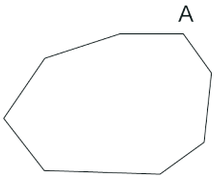
משושה

סכום הזוויות: ___°



מצולע בעל 7 צלעות

סכום הזוויות: ___°



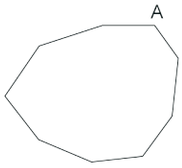
מתומן בעל 8 צלעות

סכום הזוויות: ___°

ד. שַׁערו מה יהיה סכום הזוויות במצולע בעל 9 צלעות, 10 צלעות ו- 11 צלעות.

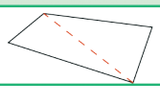
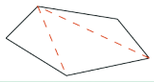
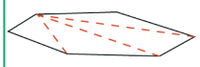
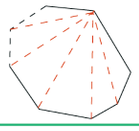
2. בִּדקו את ההשערה שרשמתם עבור מצולע בעל 9 צלעות.

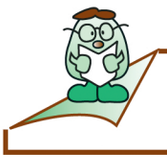
שַׂרטטו אלכסונים מהקודקוד A, בִּדקו כמה משולשים נוצרו ומהו סכום הזוויות.



מצולע בעל 9 צלעות

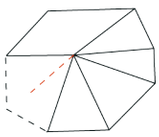
3. הַשלימו את הטבלה:

המצולע	מספר משולשים	סכום זוויות
מרובע 		
מחומש 		
משושה 		
משובע (7 צלעות)		
מתומן (8 צלעות)		
מתושע (9 צלעות)		
מעושר (10 צלעות)		
מצולע בעל n צלעות 		



סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא $180^\circ(n-2)$.

4. א. **שוקי** אמר: מצאתי נוסחה שונה לסכום הזוויות במצולע בעל n צלעות.



סימנתי נקודה בתוך המצולע, חיברתי אותה עם הקודקודים,
קיבלתי n משולשים. סכום הזוויות של המשולשים האלה הוא $180^\circ \cdot n$.
לכן הנוסחה שלי היא: $180^\circ n - 360^\circ$.
הַסבירו מדוע שוקי חיסר 360°.

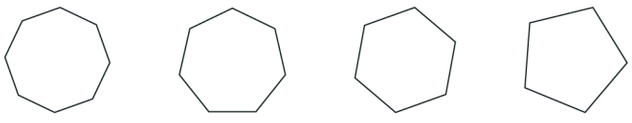
ב. הביטוי של שוקי שווה ערך לביטוי $180^\circ(n-2)$ שהתקבל במשימה 3. הַסבירו.

5. א. חַשבו את סכום הזוויות במצולע שמספר צלעותיו 22.

ב. מִצאו את מספר הצלעות במצולע אם סכום זוויותיו 1800°.
(תוכלו לרשום משוואה: $____ = 180^\circ \cdot (n-2)$ ולפתור)



מצולע משוכלל הוא מצולע שכל צלעותיו שוות זו לזו, וכל זוויותיו שוות זו לזו.



6. א. מה שמו של משולש משוכלל? מה גודל כל זווית במשולש משוכלל?

ב. מה שמו של מרובע משוכלל? מה גודל כל זווית במרובע משוכלל?

ג. מצאנו כי סכום הזוויות במחומש הוא $540°$. מה גודלה של כל זווית במחומש משוכלל?



לא רק בארץ, אלא גם במדינות אחרות השתמשו ומשתמשים עד היום במטבעות שהם מצולעים:



א. לכל מטבע, רִשמו את שם המצולע המתאים לצורתו.

ב. איזה מהמצולעים הם מצולעים משוכללים?

ג. מה היתרונות והחסרונות בשימוש במטבעות מצולעים?

שאלות משימות



1. א. מה סכום הזוויות במצולע בעל 11 צלעות?

   ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 16 צלעות?

   ג. סכום הזוויות במצולע הוא 900°. מה מספר הצלעות של מצולע זה?

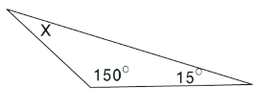
   ד. סכום הזוויות במצולע הוא 2160°. מה מספר הצלעות של מצולע זה?

   ה. האם קיים מצולע שסכום זוויותיו 500°? הַסבירו.

2. לפניכם ארבעה מצולעים.

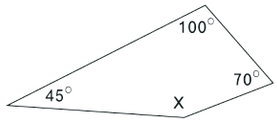
   הַשלימו את סכום הזוויות מתחת לכל מצולע. חַשבו את גודל הזוויות שאינן נתונות.

א.



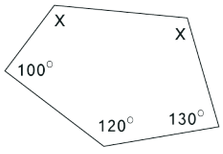
סכום הזוויות: ___°

ב.



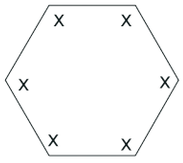
סכום הזוויות: ___°

ג.



סכום הזוויות: ___°

ד.

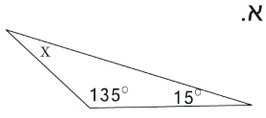


סכום הזוויות: ___°

3. לפניכם ארבעה מצולעים.

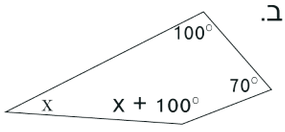
   הַשלימו את סכום הזוויות מתחת לכל מצולע. חַשבו את גודל הזוויות שאינן נתונות.

א.



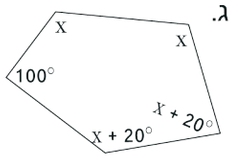
סכום הזוויות: ___°

ב.



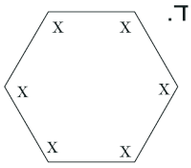
סכום הזוויות: ___°

ג.



סכום הזוויות: ___°

ד.



סכום הזוויות: ___°



4. א. סכום הזוויות במעושר הוא 1440°. מה גודל כל זווית במצולע משוכלל שיש בו 10 צלעות?

   ב. מה סכום הזוויות במצולע בעל 8 צלעות (מתומן)?

   מה גודל כל זווית במתומן משוכלל?

5. מטבע של 5 שקלים הוא מצולע משוכלל.



א. מה מספר צלעותיו? ב. מה סכום הזוויות במצולע כזה?

ג. מה הגודל של כל זווית במטבע של 5 שקלים?

6. גודל כל זווית במצולע משוכלל הוא $120°$. מהו מספר צלעותיו של מצולע זה?

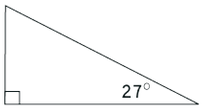
7. הַסבירו מדוע הטענות נכונות, ושַרטטו מצולע לדוגמה.

א. במשולש יש לכל היותר זווית קהה אחת.

ב. במרובע יש לכל היותר שלוש זוויות קהות.

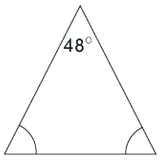
ג. בכל משולש יש לפחות שתי זוויות חדות.

8. חַשבו את גודל הזוויות בכל אחד מהמשולשים הבאים.



א. המשולש ישר זווית וגודל אחת הזוויות בת $27°$.

ב. המשולש קהה זווית. יש בו שתי זוויות שוות. וגודל אחת הזוויות $22°$. (שַרטטו.)



ג. גודל אחת מזוויות המשולש $48°$ ושתי הזוויות האחרות שוות זו לזו.

9. שַרטטו וחַשבו את גודל הזוויות בכל אחד מהמשולשים הבאים.

א. המשולש ישר זווית וגודל אחת הזוויות בת $50°$.

ב. גודל אחת מזוויות המשולש $50°$ ושתי הזוויות האחרות שוות זו לזו.

ג. במשולש שתי זוויות שוות זו לזו וגודל אחת מזוויות המשולש $40°$. מְצאו שני משולשים מתאימים.

ד. אחת מזוויות המשולש היא בת $50°$, וזווית אחרת במשולש גדולה ממנה פי 2.

10. תנו דוגמה המראה כי כל אחד מהמשפטים הבאים הוא משפט נכון.

(שַרטטו משולש מדגים, ורִשמו דוגמה מספרית.)

א. **קיים** משולש חד זויות בו אחת הזוויות היא בת $10°$.

ב. **קיים** משולש חד זויות בו אחת הזוויות היא בת $80°$.

ג. **קיים** משולש ישר זווית בו אחת הזוויות היא בת $80°$.

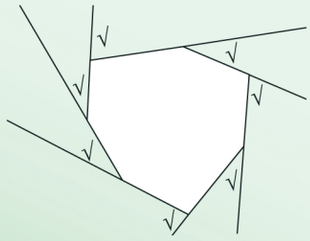
ד. **קיים** משולש קהה זווית בו אחת הזוויות היא בת $80°$.

שיעור 4: בשביל מה צריך הוכחות?

בשרטוט מצולע בעל 7 צלעות.

האם אפשר למצוא, ללא מדידה, את סכום הזוויות המסומנות ב-$\sqrt{}$ בשרטוט?

נחקור זאת במהלך השיעור.



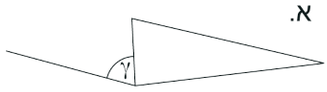


זווית הצמודה לאחת מזוויות המצולע נקראת זווית חיצונית למצולע.

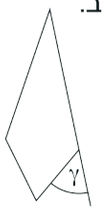
למשל, זווית α בשרטוט.

1. באלו שרטוטים הזווית γ היא זווית חיצונית למצולע?

א.



ב.



ג.





תזכורת: מצולע קמור הוא מצולע שכל אחת מזוויותיו קטנה מזווית שטוחה.

מצולע קעור הוא מצולע שלפחות אחת מזוויותיו גדולה מזווית שטוחה.

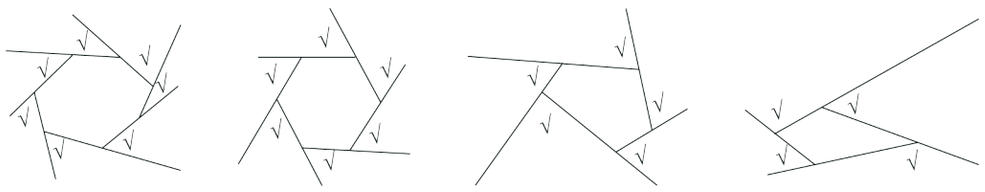
מצולעים 1, 2 הם מצולעים **קמורים** ואילו מצולע 3 הוא מצולע **קעור**.

2. א. שַׂרטטו מחומש קמור.

ב. שַׂרטטו מרובע קעור. היכן נמצאים אלכסוני המרובע הקעור?



3. לפניכם שרטוטים של מצולעים קמורים עם זויותיהם החיצוניות. (אחת ליד כל קודקוד.)



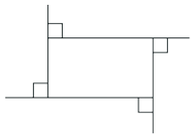
א. שַׂערו, אם כשמספר הצלעות של המצולע גדֵל, סכום הזוויות החיצוניות גדֵל, קטֵן, או אינו משתנה.

ב. **מיכל** אמרה: סכום הזוויות הפנימיות גדֵל ב- 180° בכל פעם.

נראה לי שגם סכום הזוויות החיצוניות גדֵל כך:

במרובע $180 + 180 = 360^\circ$

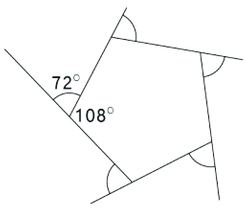
במחומש $360 + 180 = 540^\circ$ וכו'.



דינה אמרה: מיכל צודקת. לפי השרטוט סכום הזוויות החיצוניות במרובע $360°$.

מה דעתכם?

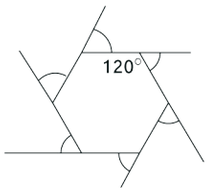
ג. **ריקי** אמרה: בשיעור שעבר מצאנו שגודל **כל זווית פנימית במחומש משוכלל** היא $\frac{540}{5} = 108^\circ$ לכן, גודל כל אחת מהזוויות החיצוניות הצמודות לפנימיות הוא 72°.



חַשבו את סכום חמש הזוויות החיצוניות.

האם זה מתאים לטענות של מיכל ודינה?

4. גודל כל זווית פנימית במשושה משוכלל הוא 120°.

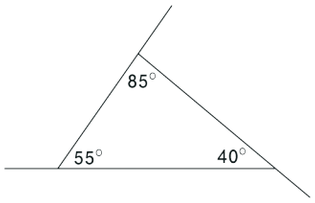


א. מִצאו גודל של זווית חיצונית במשושה משוכלל.

ב. מה סכום שש הזוויות החיצוניות במשושה משוכלל?

5. רִשמו בשרטוט את גודל כל הזוויות החיצוניות במשולש המשורטט.

מִצאו את סכום שלוש הזוויות החיצוניות שרשמתם.





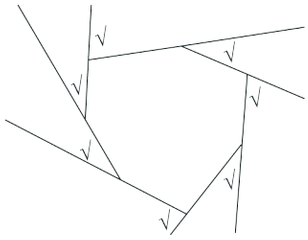
ההשערה של מיכל ודינה אינה נכונה.

האם ייתכן שסכום הזוויות החיצוניות **בכל מצולע** הוא תמיד 360°?

כדי לבדוק ולהשתכנע בכך יש להוכיח באמצעות משפטים קודמים.



6. **משפט:** סכום הזוויות החיצוניות במצולע קמור (אחת ליד כל קודקוד) הוא 360°.



הוכחה: סכום הפנימיות והחיצוניות יחד הוא: $n\cdot 180^\circ$ הַסבירו.

סכום הזוויות הפנימיות הוא: $180^\circ\cdot(n-2)$

לכן, סכום הזוויות החיצוניות: $180^\circ n-180^\circ(n-2)$ הַסבירו.

פַּשטו: _____ $=180^\circ n-180^\circ(n-2)$



לעיתים **רק הוכחה** מראה נכונות של משפט.

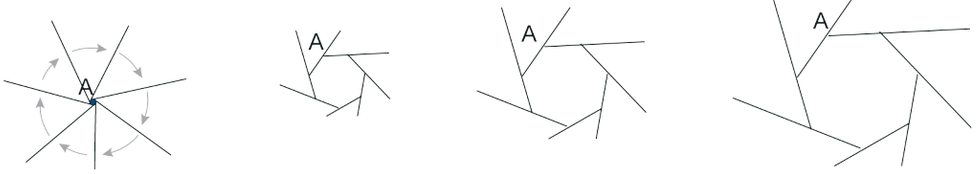
הוכחה מבוססת על הנתונים ומשפטים קודמים שנלמדו: במקרה זה, הסתמכנו על הנוסחה לסכום הזוויות הפנימיות במצולע, ועל הסכום של זוויות צמודות.



7. **מיכל** אמרה: אני מציעה להתחיל בנקודה A ולהתקדם מסביב למצולע על הקשתות האפורות.

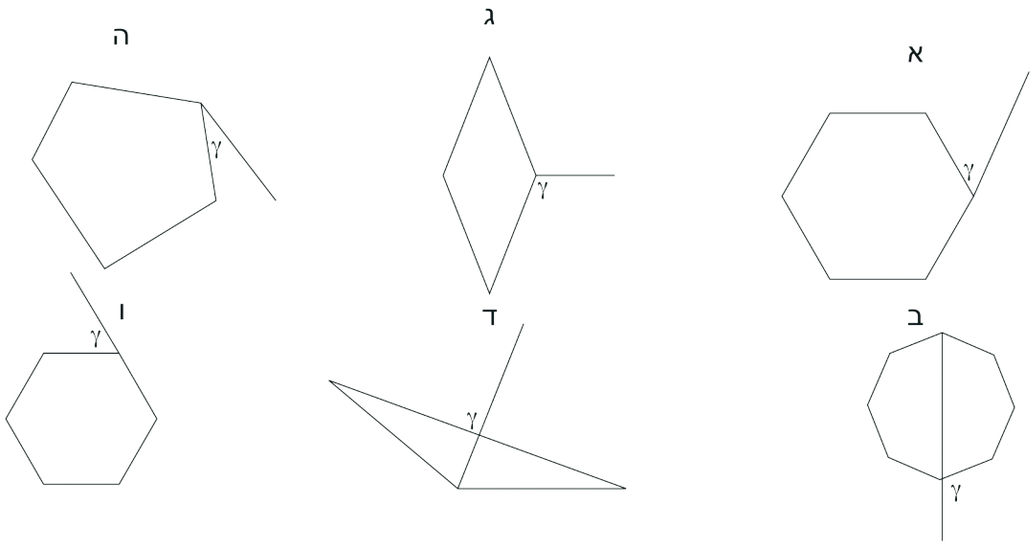
כשחוזרים לנקודה A משלימים סיבוב שלם, של 360°.

רואים זאת כשמקטינים את המצולע עד לנקודה:

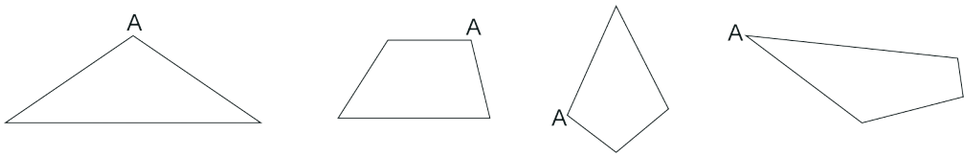


האם לדעתכם מיכל צודקת?

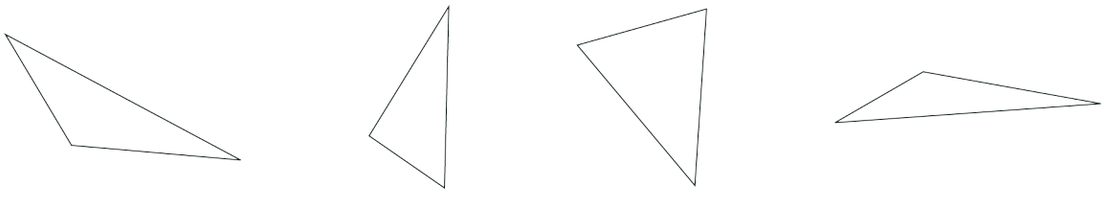
1. באֵלו שרטוטים הזווית γ היא זווית חיצונית למצולע?



2. שַׂרטטו זווית חיצונית הצמודה לזווית A בכל מצולע, וסַמנו אותה בקשת.



3. א שַׂרטטו זווית חיצונית אחת, ליד **כל** קודקוד בכל משולש.



ב. באיזה סוג משולשים יש זווית חיצוניות חדה?

ג. באיזה סוג משולשים יש זווית חיצוניות ישרה?

4. א. שַׂרטטו משולש בעל זווית חיצונית חדה. סַמנו את הזווית בקשת.

איזה משולש שרטטתם?

מאיזה סוג הזוויות החיצוניות האחרות של המשולש?

ב. שַׂרטטו משולש בעל זווית חיצונית ישרה.

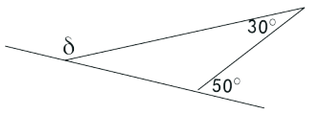
איזה משולש שרטטתם?

מאיזה סוג הזוויות החיצוניות האחרות של המשולש?

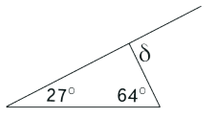


5. חַשבו את הזווית δ. פַּרטו את שלבי החישוב.

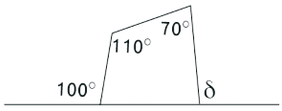
א.



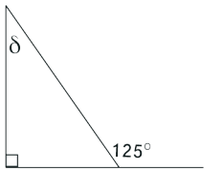
ב.



ג.



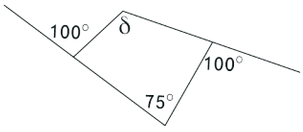
ד.



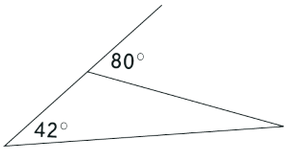
ה.



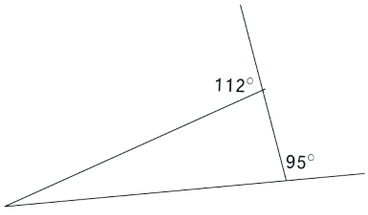
ו.



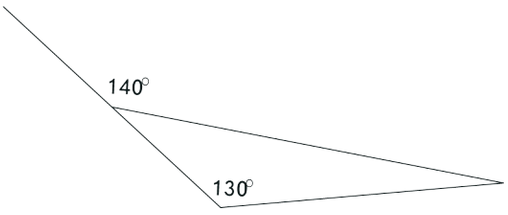
6. חַשבו את זוויות המשולש לפי הנתונים הרשומים בשרטוט.



א. זווית פנימית - $42°$ וזווית חיצונית - $80°$.



ב. זווית חיצונית - $95°$ וזווית חיצונית - $112°$.



ג. זווית פנימית - $130°$ וזווית חיצונית - $140°$.

7. שַׂרטטו משולש מדגים (מתאים בערך לנתונים), רִשמו את הנתונים בשרטוט, וחַשבו את זוויות המשולש.

א. זווית פנימית - $52°$ וזווית חיצונית - $70°$.

ב. זווית חיצונית - $95°$ וזווית חיצונית - $125°$.

ג. זווית פנימית - $110°$ וזווית חיצונית - $140°$.

8. בכל מקרה, שַׂרטטו מצולע מתאים, אם אפשר. אם אי-אפשר, הַסבירו.

א. מרובע שבו 3 זוויות חיצוניות ישרות.

ב. מחומש שבו 3 זוויות חיצוניות ישרות.

9. שַׂרטטו, אם אפשר, משולש מתאים. אם אי אפשר, הַסבירו.



א. זווית חיצונית אחת חדה.

ב. זווית חיצונית אחת ישרה וזווית חיצונית אחת קהה.

ג. שלוש זוויות חיצוניות קהות.

ד. שתי זוויות חיצוניות חדות.

10. קִבעו אם אפשר להסיק את המסקנה.

אם כן, נַמקו.

אם לא, שַׂרטטו דוגמה נגדית. (כלומר, שַׂרטטו שרטוט המדגים כי המסקנה אינה נובעת מהנתונים).

א. אם במשולש יש זווית חיצונית ישרה אז המשולש הוא ישר זווית.

ב. אם במשולש יש שתי זוויות חיצוניות קהות אז המשולש הוא חד זוויות.

ג. אם במשולש יש 3 זוויות חיצוניות קהות, אז אז המשולש הוא חד זוויות.