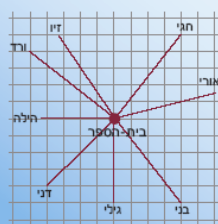


יחידות 11 ו-12 משפט פיתגורס



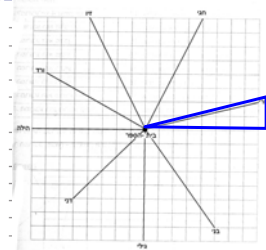
שמונה ילדים מתווכחים – ביתו של מי קרוב יותר לבית הספר.
הקטעים המשורטטים בתרשים מתארים את המרחקים.

מי לדעתכם קרוב יותר לבית הספר?

מי לדעתכם רחוק יותר מבית הספר?

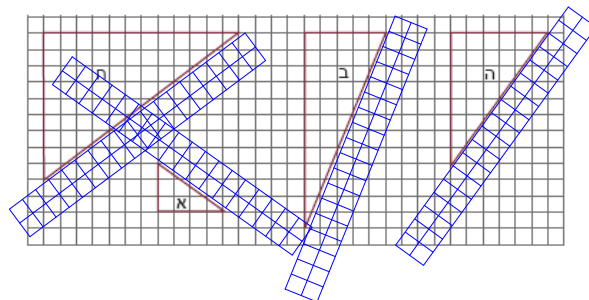
1. מה המרחק של גלי מבית הספר (יחידה אחת היא אורך צלע של משבצת)?

מה המרחק של הילה מבית הספר?



בהמשך נכיר משפט שבעזרתו נחשב את אורך היתר
במשולש ישר זווית, באמצעות אורכי ניצביו.
משפט זה יעזור לכם לחשב את המרחקים בשאלת
הפתיחה.

משולש	ניצב קטן a	ניצב גדול b	יתר c
א	3	4	5
ב	5	12	13
ג	7	24	25
ד	9	40	41
ה	6	8	10
ו	12	35	37
ז	20	21	29
ח	9	12	15

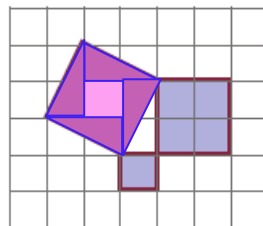


ב. אודי טען : "אם נעלה את אורך הניצב הקטן בריבוע, נקבל את הסכום של אורך הניצב הגדול והיתר".
 האם אודי צודק? ($a^2 = b + c$)

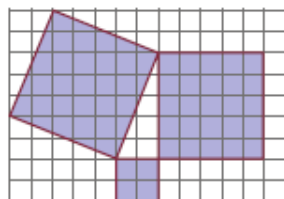
ג. חפשו בטבלה קשרים בין אורכי הניצבים ואורך היתר, ובדקו אם כל שורות הטבלה מקיימות את הקשר.

משולש	ניצב קטן a	ניצב גדול b	יתר c
א	3	4	5
ב	5	12	13
ג	7	24	25
ד	9	40	41
ה	6	8	10
ו	12	35	37
ז	20	21	29
ח	9	12	15

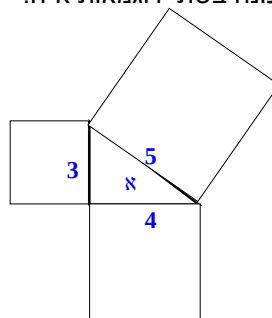
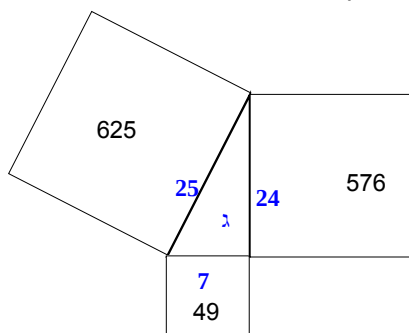
א) מצאו את שטחי הריבועים הצבועים.
 ב) מצאו קשר בין שטחי הריבועים.



אפשר גם להראות זאת בעזרת חלקי משבצות:



בנינו ריבועים על צלעות משולשים א' ו-ג' מהטבלה שבשאלה 2 - ראו ציור.
חשבו את שטחי הריבועים בכל שרטוט ובדקו האם הטענה הרשומה במסגרת
נכונה בשתי דוגמאות אילו.

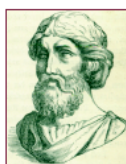
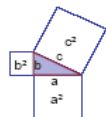


ראינו מספר דוגמאות בהן שטח הריבוע הבנוי על היתר במשולש ישר זווית שווה לסכום
שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים, כלומר:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

טענה זו נקראת "משפט פיתגורס".

בשיעור הבא נבדוק אם משפט זה נכון בכל משולש ישר זווית.



פיתגורס היה מתמטיקאי ופילוסוף יווני שנולד באי סאמוס. ב- 582 לפנה"ס בקירוב.
בשנת 529 לפנה"ס התיישב בקרוטון, מושבה יוונית בדרום איטליה, והקים סביבו את
האסכולה הפיתגוראית - קהילה דתית-פילוסופית.
הפיתגוראים האמינו כי ניתן לתאר את כל העולם ביחסים מתמטיים בין מספרים טבעיים.
משפט פיתגורס נקרא על שמו, כי נהוג לייחס לו את ההוכחה הכללית הראשונה של
המשפט, אם כי אין ודאות שפיתגורס הוא אכן זה שהוכיח את המשפט.
המשפט ללא ההוכחה היה מוכר מזה מאות שנים לפני זמנו של פיתגורס - בבבל, במצרים העתיקה ובסין.
אולם המתמטיקאים היוונים היו הראשונים שעמלו למצוא הוכחות לרעיונות מתמטיים.

מה היה בשיעור הזה:

1. למה כל זה? מתי נשתמש בקשר בין ניצבים ליתר במשולש ישר זווית.
2. איסוף נתונים לצורך חקירת הקשר.
3. ניסינו להכליל....ראינו שהכללה המבוססת רק על דוגמאות אינה משכנעת.
4. יחד עם מציאת קשר משוער בין אורכי הניצבים והיתר חשפנו מה פירוש הקשר הזה (שטחי ריבועים הבנויים על צלעות), ובדקנו דוגמאות נוספות הפעם עם הפירוש החזותי.



3. שלשה של מספרים טבעיים, a , b , c המקיימים $a^2 + b^2 = c^2$ נקראת שלשה פיתגורית.

א. בטבלה נתונים שלשות של מספרים. קבעו אילו מהן שלשות פיתגוריות.

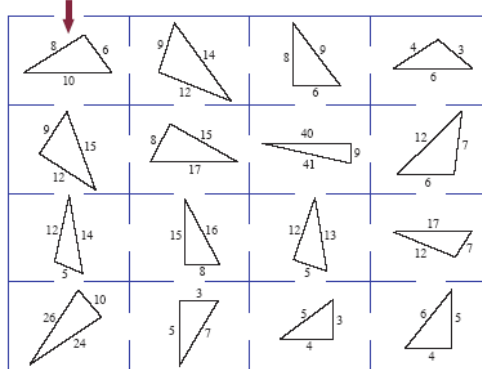
נמקו.

$5^2 + 12^2 = 13^2$ מאגימה כ"י	5	12	13
$2^2 + 4^2 \neq 5^2$ לא מאגימה כ"י	2	4	5
	2	6	8
	4	6	10
	2	7	8
	6	8	10
	2	2	3
	3	4	5
	9	12	15
	8	15	17
	10	24	26
	4	7.5	8.5

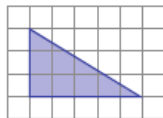


4. לפניכם מבוך משולשים.

היעזרו בדף שקוף. עברו רק דרך המשבצות בהן המשולשים מקיימים: $c^2 = a^2 + b^2$

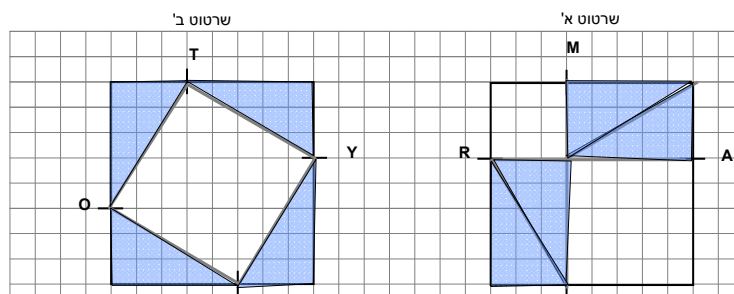


שיעור 2. האם הטענה נכונה תמיד?



1. לפניכם משולש ישר זווית שאורכי ניצביו 3 יחידות ו- 5 יחידות, ושני ריבועים שאורך הצלע שלהם 8 יחידות.

חילקנו את צלעות הריבועים ל- 5 יחידות ו- 3 יחידות באופן שונה. ראו שרטוטים. בכל ריבוע התקבלו 4 משולשים חופפים למשולש הנתון.



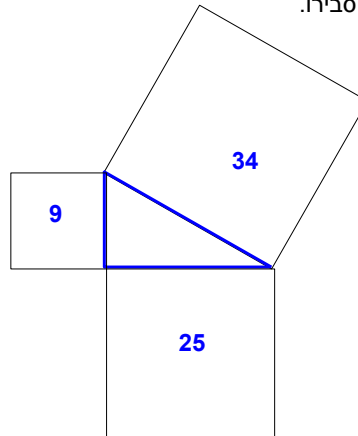
א. הסבירו מדוע המשולשים חופפים.

ב. הסבירו מדוע המרובע שנוצר בשרטוט ב הוא ריבוע. מצאו את שטח הריבוע.

ג. חשבו את שטחי שני הריבועים שנוצרו בשרטוט א.

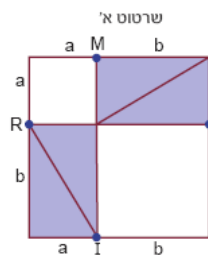
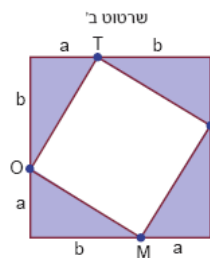
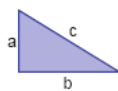
ד. בדקו אם סכום שטחי הריבועים שנוצרו בשרטוט א, שווה לשטח הריבוע שנוצר בשרטוט ב.

ה) הריבועים שהתקבלו בשרטוטים א' ו- ב' הם הריבועים על צלעות המשולש ישר הזווית. הסבירו.



2. נחזור שנית על הפעולות שביצענו ללא משבצות:

לפניכם משולש ישר זווית שאורכי ניצביו a ו- b , ושני ריבועים שאורך הצלע של כל אחד מהם $a+b$. הריבועים חולקו באותו אופן כמו במשימה 1.



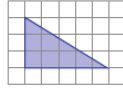
משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר. $c^2 = a^2 + b^2$

3. נחזור למשולש שאורכי ניצביו 3 יחידות ו-5 יחידות.

א. שרטטו במחברת את המשולש ואת הריבועים על צלעותיו.

ב. רשמו בכל אחד משלושת הריבועים את שטחו.

ג. בין אילו שני מספרים שלמים נמצא אורך היתר?



תוכלו להיעזר בנוסחה או בשרטוט:

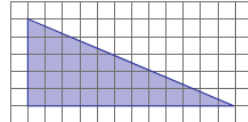
4. שרטטו במחברתכם משולש שאורכי ניצביו 5 משבצות ו-12 משבצות.

א. שרטטו ריבועים הבנויים על הניצבים וריבוע הבנוי על היתר.

ב. רשמו בתוך הריבועים הבנויים על הניצבים את שטחם.

ג. מה שטח הריבוע הבנוי על היתר?

ד. כדי למצוא את אורך היתר ניעזר בטבלת ריבועים מספרים.



טבלת ריבועים מספרים:

22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	...	המספר
484	441	400	361	324	289	256	225	196	169	144	121	100	81	64	49	36	...	ריבוע המספר

...	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	...	המספר
...	1444	1369	1296	1225	1156	1089	1024	961	900	841	784	729	676	625	576	529	...	ריבוע המספר

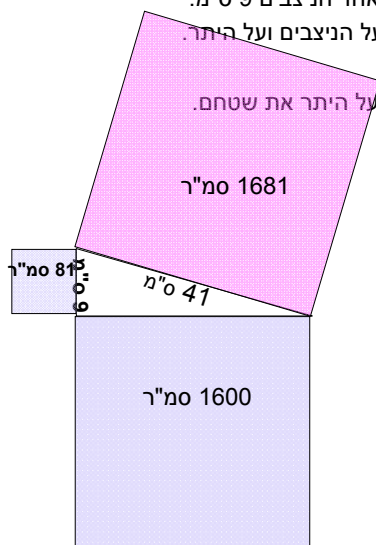
6. במשולש ישר זווית נתון אורך היתר 41 ס"מ ואורך אחד הניצבים 9 ס"מ.

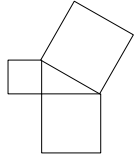
(א) העתיקו את המשולש ושרטטו ריבועים הבנויים על הניצבים ועל היתר.

(ב) רשמו בתוך הריבועים הבנויים על הניצב הנתון ועל היתר את שטחם.

ומצאו את שטח הריבוע הבנוי על הניצב השני.

(ג) מה אורך הניצב השני?





מה היה בשיעור זה:

1. מזכירים את הקשר טענה המשוערת $a^2 + b^2 = c^2$

ואת השרטוט הממחיש את הקשר.

השאלה אם הטענה מתקיימת **בכל** משולש ישר זווית.

2. ההוכחה משלבת היבט חזותי עם נימוקים/הצדקות דדוקטיביות.

3. הדגשת השרטוט של המשולש עם הריבועים על צלעותיו יכולה לשמש תחליף לנוסחה או להסבר טעויות במהלך החישובים.



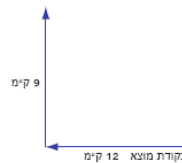
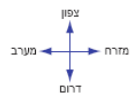
10. מיכל וענת מתאמנות לקראת גיוסן לצה"ל.

הן יצאו למסע וצעדו 12 ק"מ מערבה ואחר כך 9 ק"מ צפונה. לבסוף חזרו לנקודת המוצא בקו ישר.

א. העתיקו והשלימו את השרטוט.

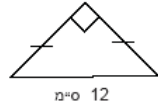
ב. כמה ק"מ צעדו מיכל וענת בדרכן חזרה? (שרטוטו ריבועים על צלעות המשולש).

ג. כמה ק"מ צעדו מיכל וענת במהלך כל המסע?





17. המשולש המשוורטט הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים.



א. מצאו את שטח הריבוע הבנוי על היתר.

ב. מהו שטח הריבוע הבנוי על כל ניצב?

ג. מהו אורך כל ניצב?



18. חשבו את הצלעות החסרות בכל סעיף. אפשר לשרטט שרטוט מדגים עם הריבועים על הצלעות.

א. ניצב אחד 10 ס"מ, ניצב שני 4 ס"מ.

ב. ניצב אחד 12 ס"מ היתר 20 ס"מ.

ג. ניצב אחד 5 ס"מ, היחס בין היתר לניצב הוא 3.

ד. המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים, אורך כל ניצב 7 ס"מ.



19. אורך צלע הריבוע החיצוני 6 ס"מ.

הריבוע הפנימי מחבר את אמצעי צלעות הריבוע החיצוני.

א. מצאו את השטחים של שני הריבועים.

פי כמה גדול שטח הריבוע החיצוני משטח הריבוע הפנימי?

ב. מצאו את אורך צלע הריבוע הפנימי.

ג. ענת אמרה: "אני חישבתי את אורך צלע הריבוע הפנימי בעזרת שטח הריבוע הפנימי".

לאה אמרה: "אני חישבתי את אורך היתר במשולש ישר הזווית וזה בעצם אורך צלע הריבוע".

מי צודק?

ד. פי כמה גדול אורך הצלע של הריבוע החיצוני מאורך הצלע של הריבוע הפנימי?

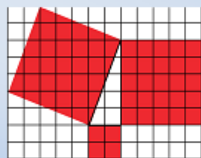
ה. הריבועים דומים, הסבירו.

ו. ביחידה 3 למדתם את הטענה: היחס של שטחי צורות דומות הוא כריבוע יחס הצלעות.

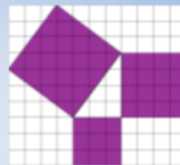
בדקו האם תשובותיכם לסעיפים א, ד מתאימות לטענה.

שיעור 3. משפט פיתגורס עם מספרים לא שלמים

משורטטים משולשים ישרי זווית וריבועים הבנויים על צלעותיהם.



ב



א

האם ניתן לחשב במדויק את אורך היתר?

1. א. מהו אורך היתר בשרטוט א?

ב. בין אילו שני מספרים שלמים נמצא אורך היתר בשרטוט ב?

2. מצאו את שטח הריבוע על פי אורך הצלע.

א. 7 ס"מ ב. 6.5 ס"מ ג. $8\frac{1}{2}$ ס"מ ד. 4.32 ס"מ.

3. מצאו את אורך צלע הריבוע לפי השטח הנתון.

אפשר להעזר בטבלת הריבועים מהשיעור הקודם.

א. 25 סמ"ר ב. 36 סמ"ר ג. 81 סמ"ר ד. 121 סמ"ר



על מנת למצוא שטח של ריבוע, כאשר ידוע אורך צלע של ריבוע, כפלנו את אורך הצלע בעצמו.

על מנת למצוא אורך צלע של ריבוע על פי שטחו, יש למצוא מספר שמכפלתו בעצמו שווה לשטח הנתון. פעולה זו נקראת **שורש ריבועי**.

למשל: רשמים זאת כך: $\sqrt{25} = 5$, שורש ריבוע של 25 הוא 5, כלומר 5 הוא המספר שאם נכפול אותו בעצמו נקבל 25.



במשימה 4 קשה למצוא מספר מדויק שאם נכפול אותו בעצמו נקבל 10, לכן אנו נעזרים במחשבון.
במחשבון יש מקש עליו רשום $\sqrt{\quad}$ (שורש ריבועי) ובעזרתו נמצא אורך הצלע ריבוע, כאשר ידוע שטחו.

5. א. היעזרו במחשבון, רשמו את המספר 10 על צג המחשבון והקישו על המקש $\sqrt{\quad}$.

מהו אורך צלע הריבוע? רשמו רק שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

ב. היעזרו במחשבון וחשבו.

$$\sqrt{289}, \sqrt{21}, \sqrt{45}$$



7. שתי קבוצות מטיילים יצאה מיישוב A ליישוב B בשני מסלולים שונים.

המרחק בין שני היישובים (קטע AB) הוא 25 ק"מ.

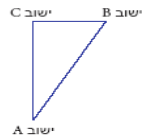
קבוצה אחת בחרה במסלול AB. הקבוצה השנייה הלכה 22 ק"מ צפונה.

הגיעה ליישוב C. פנתה מזרחה והגיעה ליישוב B.

כמה ק"מ הלכה הקבוצה השנייה מזרחה?

איזו קבוצה הלכה יותר ובכמה ק"מ יותר?

היעזרו בשרטוט של משולש ABC במחברותיכם, והוסיפו את הריבועים המתאימים.



מה היה בשיעור זה:

1. הכרות עם פעולת השורש $\sqrt{\quad}$

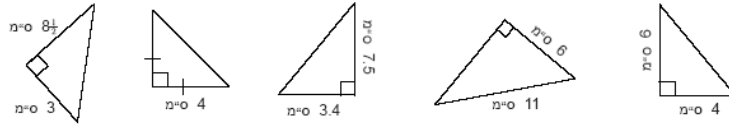
2. שימוש במחשבון לצורך דיוק בחישוב אורך צלעות.

3. שילוב שאלות "מהחיים".



16. א. חשבו את אורך הצלע החסרה בכל משולש ישר זווית.

אפשר לשרטט ריבועים על כל צלע ולהיעזר בשטחים.



ב. חשבו את ההיקפים של המשולשים.



22. סולם נשען על הקיר. רגליו נמצאות במרחק 50 ס"מ מהקיר.

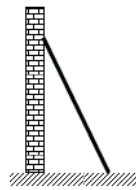
וראשו בגובה 2.5 מטר.

(תזכורת: 1 מטר = 100 ס"מ).

א. חשבו את אורך הסולם.

ב. הסולם החליק והוא עתה במרחק של 60 ס"מ מהקיר.

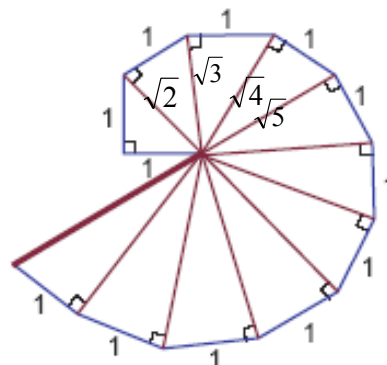
לאיזה גובה יגיע הסולם?

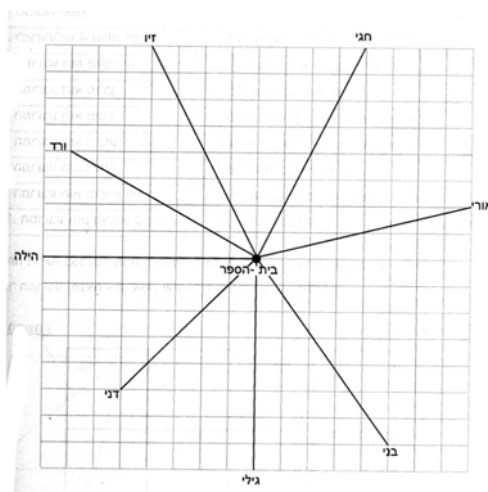


28. ה"קונכייה" מורכבת ממשולשים ישרי זווית המחוברים זה לזה.

א. חשבו את היתר המודגש.

ב. בונים "קונכייה" מ- n משולשים, מה יהיה אורך היתר במשולש האחרון?





שרטטו משולשים ישרי זווית מתאימים וחשבו את מרחקי התלמידים מבית הספר.

- מי גר קרוב ביותר ומי גר רחוק ביותר?

יחידה 12: משפט פיתגורס - שימושים

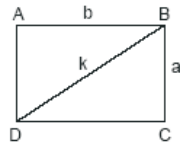
שיעור 1. משפט פיתגורס ומלבן

רותי ועידן מתחתנים. הם רוצים להכין הזמנה לחתונתם ולהוסיף סרט זהוב (ראו שרטוט). הם התלבטו בין שתי ההזמנות המשוורטטות.

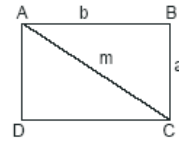


רותי העדיפה את ההזמנה הריבועית, אורך כל צלע 14 ס"מ.
עידן העדיף את ההזמנה המלבנית שאורכי צלעותיה: 16 ס"מ, 12 ס"מ.
בהמשך נעזור לרותי ועידן לבחור את ההזמנה.
בשיעור נחקור מלבנים ונשתמש במשפט פיתגורס לחישובים.

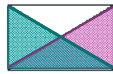
ב. בטאו את k^2 בעזרת a, b.



2. א. בטאו את m^2 בעזרת a, b.



ג. הסבירו באמצעות סעיפים א' ו-ב' מדוע האלכסונים במלבן שווים.



בכיתה ז הוכחתם שהאלכסונים במלבן שווים, בעזרת חפיפת משולשים. בשיעור זה הוכחתם שהאלכסונים שווים באמצעות משפט פיתגורס.

3. חיזרו למשימת הפתיחה.

עידן ורותי החליטו שיבחרו בהזמנה הזולה מבין שתי ההזמנות. עלות הסרט הזהוב מבדילה בין המחירים של שתי ההזמנות. כל מטר סרט עולה 2 ₪. א. חשבו את עלות הסרט בכל הזמנה. ב. באיזו הזמנה בחרו רותי ועידן?

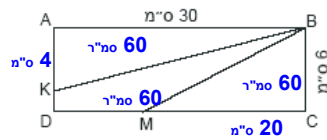


2. א. חשבו את הצלע החסרה במלבן. ב. חשבו את שטח המלבן.



4. שטח המלבן 80 סמ"ר. צלע אחת שווה ל-8 ס"מ. א. חשבו את אורך הצלע השנייה. ב. חשבו את אורך האלכסון.





12. מלבן חולק על ידי שני קטעים לשלושה חלקים שווי שטח.

- מה שטח המלבן?
- מצאו שטח של כל אחד משלושת החלקים.
- היעזרו בסעיף ב וחשבו את AK, MC.
- מצאו היקף של כל אחד משלושת החלקים.

מה היה בשיעור זה:

- יצאנו שוב מסיטואציה שהייתה אמיתית.
- הוכחנו משפט באמצעות משפט פיתגורס (והזכרנו הוכחה שונה).
- גיוון בתרגילים.

שיעור 2. משפט פיתגורס עם יחס ודמיון

נתוני מסך	
גודל מסך	30 אינץ'
יחס תמונה	3:4
יחס ניגודיות	25000:1
רזולוציות מסך	1366 x 768
זווית צפייה	178 מעלות
שיטות שידור	מולטי סיסטם

משפחת עצמוני רוצה לקנות טלוויזיה 30 אינץ'.
היא בדקה את המפרט הטכני של:
"טלוויזיה LCD 30 של Sony דגם: KDL-32S5500"
היא רוצה לדעת האם המקום על הקיר בביתה יתאים
למידות הטלוויזיה.
נבדוק זאת בשיעור זה.



אינץ' נכתב גם כאינסש) היא יחידת מידה לאורך. היא יחידה מתוך "מערכת היחידות הבריטית" המשמשת בארצות הברית ובמדינות בודדות נוספות. אינץ' אחד שווה ל-2.54 סנטימטרים

2. היחס בין אורכי הצלעות של המלבן הוא 3:4.

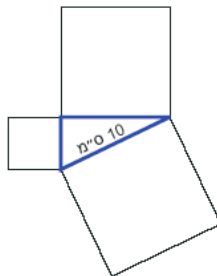
א. היעזרו בשרטוט הריבועים הבנויים על צלעות חצי המלבן

ומצאו את שטח הריבוע הבנוי על האלכסון.

ב. מה יחס השטחים של הריבועים הבנויים על צלעות המלבן? הסבירו.

ג. מצאו את שטחי שני הריבועים הבנויים על צלעות המלבן.

ד. מצאו את אורכי צלעות המלבן.

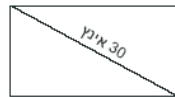




אינץ' (נכתב גם כאינטש) היא יחידת מידה לאורך. היא יחידה מתוך "מערכת היחידות הבריטית" המשמשת

3. נחזור לשאלת הפתיחה.

לפניכם שרטוט מדגים של מסך הטלוויזיה.



שימו לב! יחס התמונה הוא היחס בין אורכי הצלעות של המסך. (3:4)

משפחת עצמוני רצתה לבדוק אם גודל הטלוויזיה מתאים

למקום שיעדו לה בבית: 70 ס"מ x 50 ס"מ

עיצרו להם לחשב את אורכי הצלעות מסך הטלוויזיה.

א. שרטטו ריבועים על צלעות חצי המלבן (על המשולש).

ב. חשבו את שטח הריבוע הבנוי על האלכסון

ג. מהו יחס השטחים של הריבועים הבנויים על צלעות המלבן? (היעזרו ביחס התמונה בשאלת הפתיחה)

ד. אילו מזוגות המספרים הבאים (באינצ'ים) הם שטחי שני הריבועים על צלעות המלבן: (9:16)

16, 9 324, 576 54, 96

ה. מצאו את אורכי הצלעות המסך (באינצ'ים). 24 אינץ' ו-18 אינץ'.

ו. האם הטלוויזיה תתאים למקום שיעדו לה משפחת עצמוני?

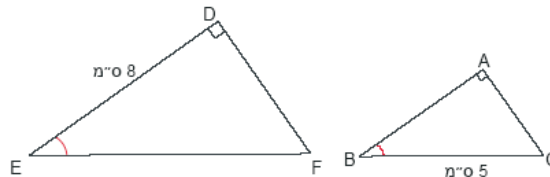
70 cm.=27.6 in

50cm.=19.7in



4. המשולשים ABC, DEF דומים. הזוויות השוות צבועות באותו צבע.

יחס הדמיון הוא 2:1.



א. היעזרו ביחס הדמיון ומצאו את אורך הצלע AB.

ב. חשבו את אורך הצלע AC

ג. השלימו את אורכי הצלעות במשולש DEF.

מה היה בשיעור זה:

1. בעיה אמיתית ופיתרון מדורג.
2. שילוב נושאים: יחס ודמיון עם פיתגורס.

שיעור 3. מחשבים בעזרת משפט פיתגורס



לקראת יום העצמאות קשטו את בניין הסוכנות היהודית בתל אביב, בשרשרת דגלים, בבנין 2 קומות בחלק התחתון ו- 6 קומות בחלק העליון.

קבעו את הקצה העליון של השרשרת בפינת הגג של החלק העליון (הקומה שנייה). חזקו את השרשרת בפינת הגג של החלק התחתון. את קצה השרשרת קשרו ליתד הנעוצה באדמה. ראו תמונה. חשבו את אורך שרשרת הדגלים לפי המידות הנתונות.

בשיעור נעסוק בחישובים נוספים בעזרת משפט פיתגורס.



מקבילית היא מרובע שצלעותיו הנגדיות מקבילות.
 הצלעות הנגדיות במקבילית גם שוות.
 גם מלבן הוא מקבילית. הסבירו.

2. לפניכם שרטוטים של מלבן ושלוש מקביליות אחרות.

לתקן את
השרטוט לפי
התיקון בספר



א. חשבו את שטח המלבן ביחידת משבצת.

ב. במקבילית א':

- רשמו את אורך הצלע הצבועה בכחול וחשבו את אורך הצלע הסמוכה לה.
- חשבו את היקף המקבילית.
- מצאו את שטח המקבילית והסבירו כיצד מצאתם.

והזורים עבור מקביליות ב ו- ג



3. הקווים שבשרטוט הם אלכסונים של שלושה מרובעים.
 א. העתיקו למחברת (על דף משוכן) ושרטטו את המרובעים.
 ב. הסבירו מדוע בשלושת המרובעים כל הצלעות שוות.

ג. חשבו את השטח של כל אחד מהמעוינים.

ד. חשבו את אורך הצלע של כל אחד מהמעוינים.

מה היה בשיעור זה:

1. שילוב של חזרה על מושגים ושימוש במשפט פיתגורס.
2. השתנות והשפעתה על אורך צלעות, גודל זוויות, היקף ושטח.

סיכום

- ❖ הצורך והרלוונטיות של המשפט
- ❖ התלמידים שותפים למהלך:
- אוספים נתונים, מכלילים, רואים שתהליך הכללה המבוסס על דוגמאות בלבד אינו מספק.
- ❖ תפקיד ההוכחה/הצדקה כמשכנעת בנכונות הטענה בכל מקרה
- ❖ הוכחה המשלבת היבטים ויזואליים עם נימוקים דדוקטיביים
- ❖ שרטוט היכול לשמש תחליף לנוסחה
- ❖ תרגול המשלב חזרה על נושאים שנלמדו
- ❖ שילוב של שאלות "מהחיים"