

מתמטיקה משולבת לכיתה ח' תכנית רחובות



המחלקה להוראת המדעים

יחידה 2: דמיון מצולעים

שיעור 1: הקטנה, הגדלה

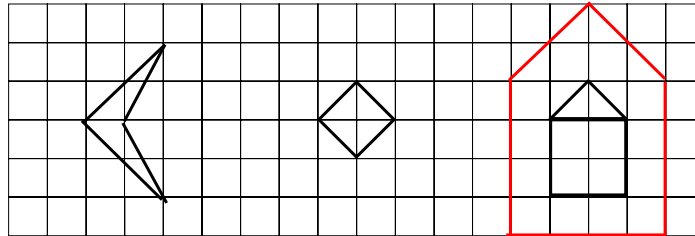
מביטים על השכלול, בגבהים שונים. מבעד לזכוכית מגדלת.

מי מהשכלולים הוא הגדלה של השכלול מתחת לזכוכית מגדלת?

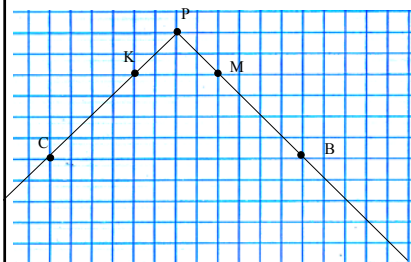


מדוע השכלולים שציינתם הם הגדלה של השכלול מתחת לזכוכית המגדלת, והאחרים לא?

3. א) העתיקו את השרטוטים למחברותיכם ושרטטו הגדלה של כל אחת מהצורות.



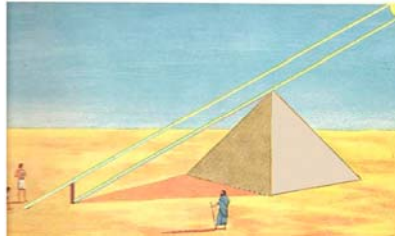
הגדלת קטעים באמצעות קרניים



- מנקודה P יוצאות שתי קרניים.
- א) פי כמה גדול אורך הקטע PB מאורך הקטע PM?
- ב) מה היחס בין אורכי הקטעים PK, PC?
- ג) פי כמה גדול אורך הקטע CB מאורך הקטע PC?

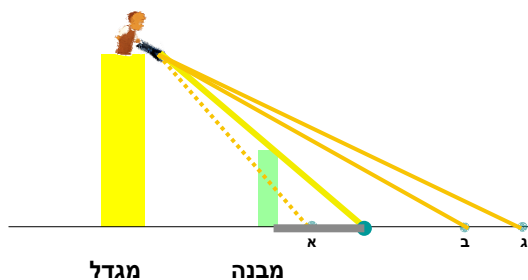
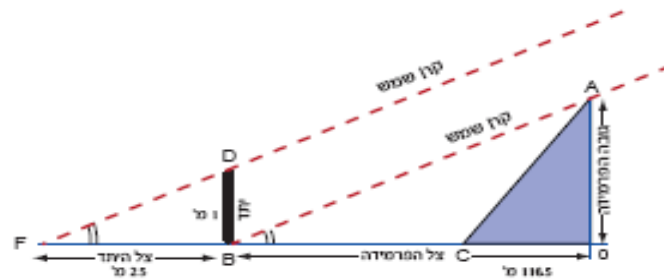
שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת על דפי משבצות עזרו לנו להגדיל קטעים. בהמשך נשתמש בשיטה זו להגדלה/הקטנה של מצולעים.

שיעור שני: צללים וקרניים להגדלת מצולעים



שילוב רקע היסטורי:

תלס (624-548 לפנה"ס), ביקר בפירמידות בגיזה שבמצרים ורצה לדעת מה גובה הפירמידה: לשם כך השתמש **בצילה** של הפירמידה **ובצילו** של יתד הנעוץ באדמה והתבסס על כך שקרני השמש מקבילות.



1. יוסי עומד על מגדל ומאיר בפנס שלושה עצמים המסומנים באותיות א, ב, ג, על הקרקע. בין המגדל לעצמים יש מבנה.
(א) האם יוסי יוכל לראות את כל העצמים? הסבירו.

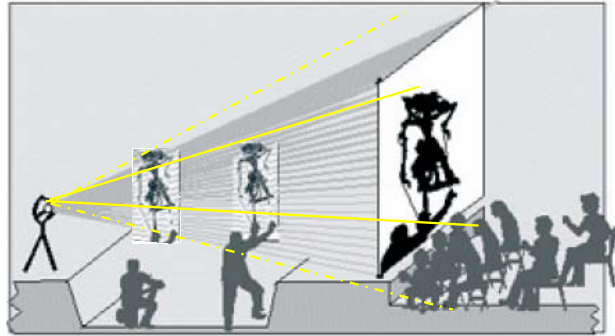
(ב) העתיקו על דף שקוף את השרטוט כולל הנקודות א, ב, ג, ושרטטו קרן מנורת הפנס לכל אחד מהעצמים א, ב, ג.

(ג) סמנו נקודה נוספת אותה יוכל יוסי לראות ושרטטו את הקרן.

(ד) סמנו נקודה ד נוספת, במקום קרוב ביותר למבנה, אותה יוכל יוסי לראות ושרטטו את הקרן.

(ה) הדגישו את הקטע מתחתית המבנה לנקודה ד. הקטע שהדגשתם מראה את מקום הצל של המבנה.

2. באי יאווה שבאינדונזיה קיימת מסורת עתיקת יומין של סיפורי מעשיות בעזרת תיאטרון בובות על ידי צל. סיפורים אלה נקראים וואינג. כשצל הבובה צריך להיראות גדול יותר, המציג צריך להזיז את הבובה.



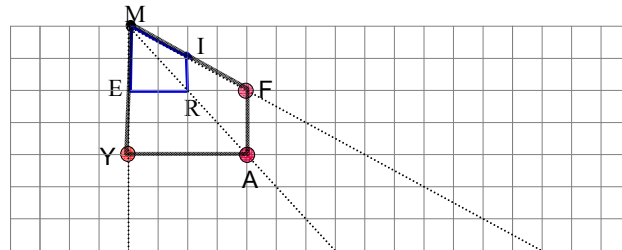
באיזה כיוון עליו להזיז את הבובה כדי שהצל שלה יגדל?



יותם צועד על מדרכה בערב כשפנסי הרחוב דולקים. שערו מתי צילו ארוך יותר, כשהוא קרוב לפנס או כשהוא מתרחק ממנו?
בערב, כשדולקים פנסי הרחוב, תוכלו לבדוק זאת בעצמכם.

שונה מהמקור

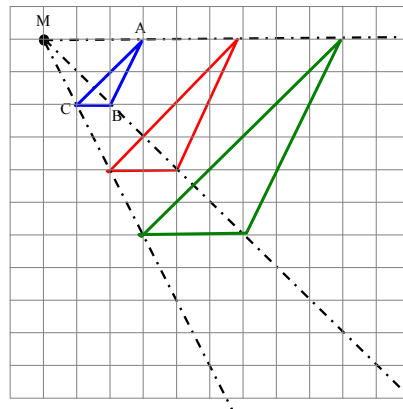
4. העתיקו את השרטוט למחברתכם MERI
אורך הקטע MY הוא פי 2 מאורך הקטע ME.



- סמנו על הקרן MR נקודה A כך שאורך MA יהיה פי 2 מאורך MR.
- סמנו על הקרן MI נקודה F כך שאורך MF יהיה פי 2 מאורך MI.
- פי כמה גדולות צלעות המרובע MYAF מצלעות המרובע MERI? הסבירו.
- האם הצלע YA מקבילה לצלע ER? כיצד קבעתם?
- האם הצלע AF מקבילה לצלע RI? כיצד קבעתם?

צורות שהן הגדלה/הקטנה אחת של השנייה נקראות צורות דומות.

מגדילים את המשולש פי 2 ופי 3.



האם המשולשים דומים?

האם הצלעות מקבילות?

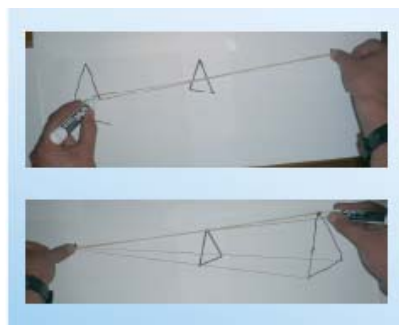
מודדים זוויות ובודקים אם הן שוות בהתאמה.

כדי לקבל מצולעים דומים הגדלנו את הצלעות ביחס נתון בעזרת קרניים, ומצאנו שהצלעות מקבילות והזוויות של המצולעים שוות בהתאמה.

שיעור שלישי: מצולעים דומים



קישרו שתי גומיות. (כמו בתמונה).
ושרטטו מרובע כלשהו על דף.

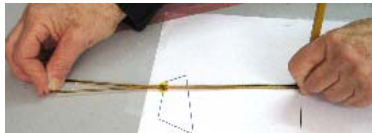


הניחו את שתי הגומיות הקשורות על הדף,
שימו אצבע בלולאה של גומייה אחת
ועיפרון בלולאה של הגומייה השנייה.
הגומיות צריכות להיות מתוחות.
הזיזו את העיפרון כך שהקשר ינוע על
צלעות המרובע מהקודקוד בו התחלתם
חזרה עד לקודקוד זה.

שיעור שלישי: מצולעים דומים



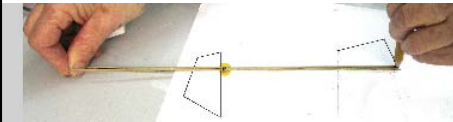
קישרו שתי גומיות. (כמו בתמונה).
ושרטטו מרובע כלשהו על דף.



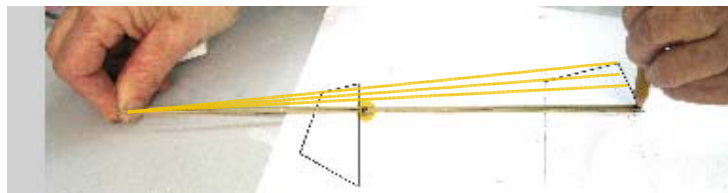
הניחו את שתי הגומיות הקשורות על הדף,
שימו אצבע בלולאה של גומייה אחת
ועיפרון בלולאה של הגומייה השנייה.

הגומיות צריכות להיות מתוחות.

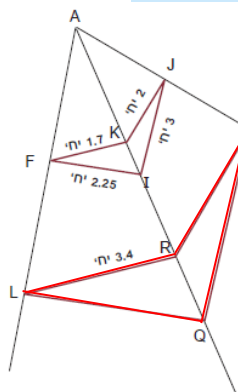
הזיזו את העיפרון כך שהקשר ינוע על
צלעות המרובע מהקודקוד בו התחלתם
חזרה עד לקודקוד זה.



בדקו מה הקשר בין הגדלה בעזרת קרניים לבין ההגדלה שביצעתם בעזרת הגומייה:



יוצאים מהקרניים



מרובע LRPQ הוא הגדלה של מרובע FKJI

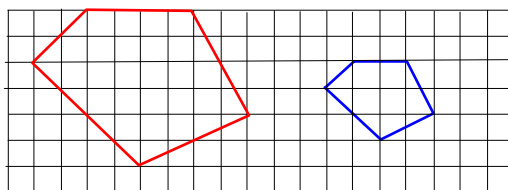
א. פי כמה גדולים אורכי צלעות מרובע LRPQ מאורכי צלעות מרובע FKJI?

ב. חשבו את אורכי הצלעות האחרות של מרובע LRPQ.

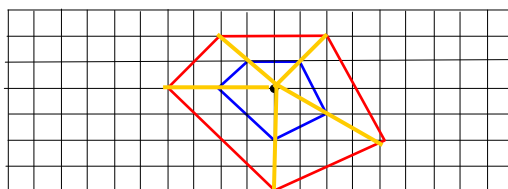
ג. העתיקו את מרובע LRPQ על נייר שקוף, הזיזו אותו מחוץ לקרניים וסובבו אותו.
האם המרובע המועתק הוא הגדלה של מרובע LRPQ?

ראינו כי אחרי העתקה הזזה וסיבוב של המצולע המועתק, הצלעות כבר אינן מקבילות לצלעות המצולע הקטן. יחד עם זאת, גם מצולע זה הוא הגדלה של המצולע הקטן. כלומר, שני המצולעים דומים למצולע הקטן.

השאלה איך נוכל לבדוק אם מצולעים דומים ללא שימוש בקרניים?



בודקים שהיחס בין כל שתי צלעות מתאימות קבוע (הקטנה לקטנה ...)
מודדים את הזוויות ורואים שהן שוות



מעתיקים את המחומשים אחד בתוך השני. ובודקים אם האדום הגדלה של הכחול בעזרת קרניים.

2 מצולעים דומים הם מצולעים שבהם כל הזוויות שוות בהתאמה וקיים אותו יחס בין אורכי כל שתי צלעות מתאימות. יחס זה נקרא יחס הדמיון.

שיפתרו שאלה 4 עמוד 39

דני אמר: "אני כתבתי בשאלה הקודמת שריבוע ומלבן דומים, כי בשניהם כל הזוויות הן ישרות, ולכן שוות ביניהן".

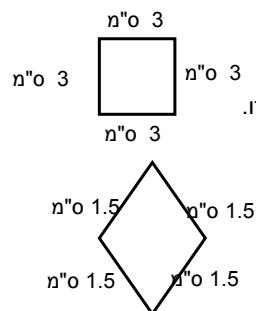


רמי אמר: "ריבוע ומלבן אינם דומים, כי אם היחס בין אורך הצלע הארוכה של המלבן לצלע הריבוע נניח 2 לא ייתכן שהיחס בין אורך הצלע הקצרה של המלבן לצלע הריבוע יהיה גם כן 2".

מלבן

ריבוע

האם יחס קבוע בין צלעות מתאימות של מרובעים מספיק כדי שהמרובעים יהיו דומים זה לזה? הסבירו. (תוכלו להיעזר בדוגמאות מהתרגיל הקודם.)



ומה במשימות?

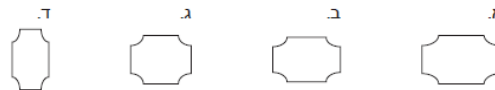


2. יואב כתב עבודה במסמך word במחשב ורצה להוסיף את הציור הבא:



הוא קיבל ציור גדול לכן החליט להקטין.

רק אחד מהציורים הבאים הוא הקטנה של הציור של יואב. מי הוא?



3. א. פתחו מסמך word במחשב. וודאו שיש סרגל ציור. במידה ולא, הוסיפו אותו : הקישו בסרגל למעלה "תצוגה", בחרו "סרגל כלים", סמנו "ציור".

ב. בחרו מתומן מצורות אוטומטיות בסרגל הציור.

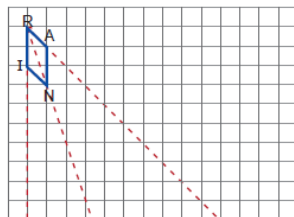
ג. העתיקו את המתומן פעמיים.

ד. בעזרת לחיצה על shift וגרירת פינה, הקטינו את אחד מהמתומנים שהעתקתם, וקגדילו את המתומן השני שהעתקתם.

ה. מה המשותף לשלושת המתומנים?



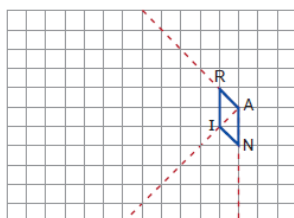
15. א. העתיקו את השרטוט למחברתכם והגדילו את המקבילית RINA כך שאורכי הצלעות של המקבילית המוגדלת יהיו גדולים פי 3 מאורכי הצלעות של RINA.



ב. העתיקו את השרטוט למחברתכם ושרטטו קרניים שהם המשכים של AR, של AI, ושל AN.

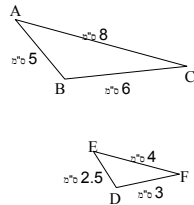
היעזרו בקרניים האלה כדי להגדיל שוב את המקבילית RINA כך שאורכי הצלעות של המקבילית המוגדלת יהיו גדולים פי 3 מאורכי הצלעות של RINA.

ג. האם המקבילית המוגדלת שהתקבלו בסעיפים א' וב' חופפות?



יחידה 3 : שיעור ראשון: משולשים דומים

השילוב של מושגים של היחסים



חשבו את $\frac{AC}{EF}$, כלומר את היחס בין הצלעות AC ו-EF.
 (ד) חשבו גם את היחסים: $\frac{AB}{ED}$ ו- $\frac{BC}{DF}$.
 (ה) האם הזוויות של שני המשולשים האלו שוות?
 (ו) האם המשולשים דומים? הסבירו.

המשולשים ABC ו-EDF דומים כי:
 לשני המשולשים זוויות שוות: $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$, $\angle C = \angle F$.

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DF} = \frac{AC}{EF}$$

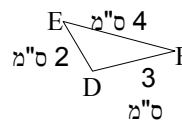
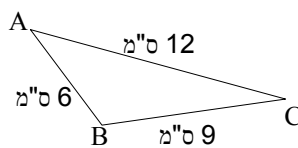
יחס הצלעות המתאימות שווה:

מסמנים דמיון: $\Delta ABC \sim \Delta EDF$. גורם ההגדלה/הקטנה נקרא יחס הדמיון.

חשיבות ההתאמה

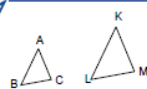
יואב אמר: המשולשים לא דומים כי היחס בין הצלעות לא שווה:
 $\frac{6}{2} \neq \frac{12}{3} \neq \frac{9}{4}$

נתאי אמר: המשולשים דומים כי היחס בין הצלעות המתאימות שווה:
 $\frac{12}{4} = \frac{9}{3} = \frac{6}{2}$
 מי צודק? הסבירו.



על מנת לרשום נכון את היחסים בין הצלעות, נוח לרשום את קודקודי משולשים דומים בהתאמה.

השלימו: $\Delta ABC \sim \Delta E$ _____



על מנת להקל בכתיבת היחסים של הצלעות במשולשים דומים,

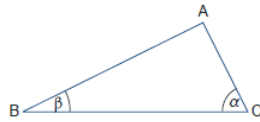
$$\frac{AB}{KL} = \frac{BC}{LM} = \frac{AC}{KM}$$

$\Delta ABC \sim \Delta KLM$

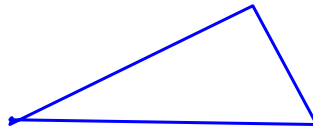
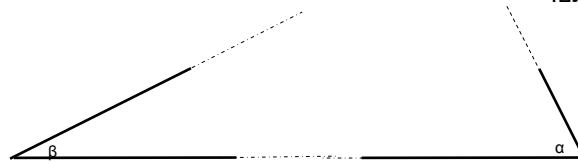
אפשר להיעזר בקשתות:

שיעור שני: ואולי פחות תנאים

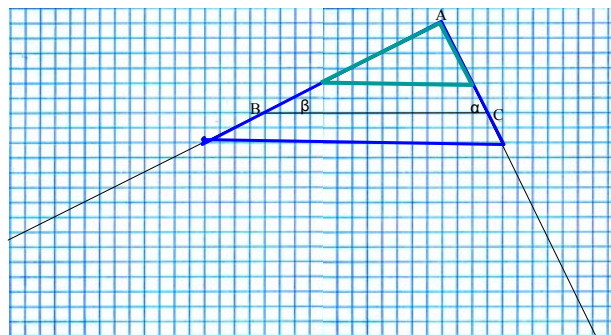
שוויון זוויות הוא תנאי מספיק לצאיון משולש



העתיקו את זוויות β ו- α על נייר פרגמנט או על שקף.
האריכו את הקרניים (ראו שרטוט למטה).
צרו משולשים שונים באמצעות הזוויות השוות ל- α ו- β
כך שהקרניים של שתי הזוויות יהיו חלק מצלעות
המשולש שיצרתם.

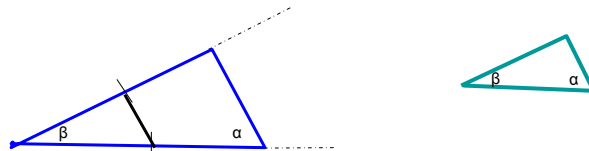


הניחו את המשולשים שיצרתם כך שהזווית השלישית תתלכד עם זווית A.



האם המשולש שהנחתם הוא הגדלה/ הקטנה של המשולש ABC? הסבירו.
בדקו אצל חברים האם המשולש שהם יצרו הוא הגדלה/ הקטנה של המשולש
ABC?

שוויון זוויות הוא תנאי מספיק לדמיון משולשים
תכונת אלוכחה ואנה כאן אי אפשר עדיין

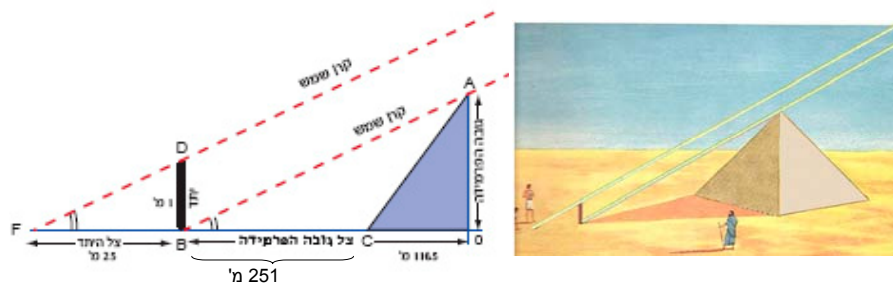


במשימה 1 ראינו כי אם לשני משולשים שתי זוויות שוות בהתאמה, אז משולש אחד הוא הגדלה של המשולש השני, כלומר המשולשים דומים.

אם לשני משולשים שני זוגות של זוויות שוות בהתאמה, אז המשולשים דומים.



השרטוט מדגים את הדרך שבה נעזר תלס לחישוב גובה הפירמידה. חשבו גם אתם את גובה הפירמידה, לפי הנתונים הרשומים.

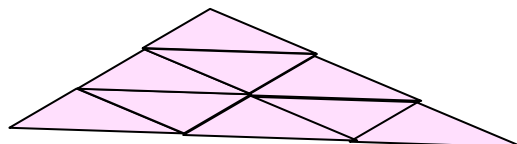
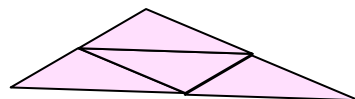




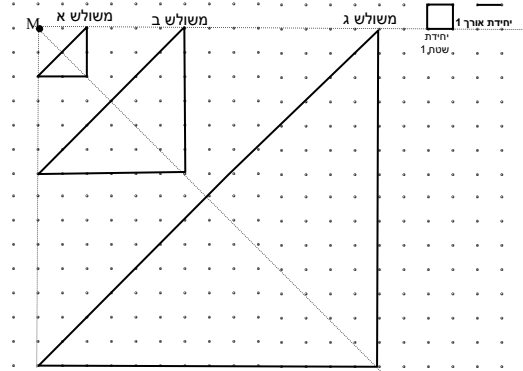
5. קבעו לגבי כל טענה אם היא נכונה?
אם הטענה נכונה, נמקו. אחרת, הביאו דוגמה נגדית.
- (א) משולשים שווי שוקיים השווים בזווית הראש, דומים.
- (ב) משולשים שווי שוקיים השווים בזווית אחת, דומים.
- (ג) כל זוג של משולשים ישרי זווית ושווי שוקיים, דומים.
- (ד) כל זוג של משולשים שווי הצלעות, דומים.
- (ה) כל זוג של מלבנים דומים.
- (ז) כל זוג של משושים משוכללים דומים

שיעור שלישי: שטחים של משולשים דומים

גזרו 10 משולשים חופפים למשולש המשורטט כאן.
(באתר ובמדריך למורה תמצאו דף להדפסה או לצילום ובו 10 משולשים כאלה.)
נבנה באמצעות המשולשים האלה משולשים דומים למשולש המשורטט.



2. יצרנו שלושה משולשים דומים על ידי הגדלה בעזרת קרניים.
(א) רשמו את אורכי הניצבים של כל אחד מהמשולשים המשוורטטים.



- (ב) רשמו את השטחים של כל אחד מהמשולשים.
(ג) פי כמה גדולים אורכי הצלעות של משולשים ב' ו-ג' מאורכי הצלעות המתאימות של משולש א'?
(ד) פי כמה גדול שטח משולש ב' ושטח משולש ג' מהשטח של משולש א'?

השטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבוע היחס בין הצלעות המתאימות (כריבוע יחס הדמיון).



5. איילת אכלה עוגת שוקולד מעולה וקיבלה את המתכון המיועד לתבנית ריבועית שמידותיה: 20×20 ס"מ. לאיילת יש תבנית מלבנית שמידותיה: 30×20 ס"מ.
א. פי כמה עליה להגדיל כמות של כל מרכיב במתכון? (כמובן שהיא רוצה שהעוגה תהיה גבוהה, וטעימה בדיוק כמו זו שאכלה).



ב. לפיכך המתכון של העוגה שאיילת קיבלה.
חשבו את הכמויות שעל איילת להכין לעוגה הגדולה שלה.

ואיך מכינים? פשוט וקל:

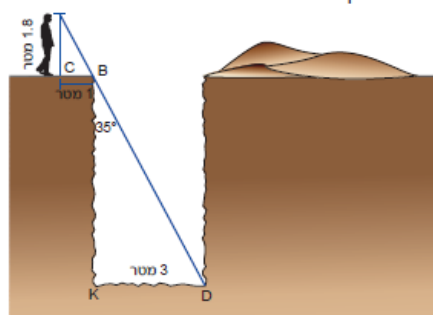
מכניסים את כל החומרים, ללא המים, לקערה של מעבד מזון ומערבלים עד שנוצרת תערובת חלקה בלי גושים.
לבסוף מוסיפים עוד חצי כוס מים פושרים, מערבבים, שופכים לתבנית, ואופים בחום של 175°C מעלות כ- 40 דקות.

- 2 כוסות קמח תופא
- 1 שקית אבקת אפיה
- 1 שקית סוכר וניל
- 2 כוסות סוכר
- $\frac{1}{2}$ כוס קקאו
- $\frac{1}{2}$ כוס מלח
- $\frac{1}{2}$ כוס מים פושרים
- 3 ביצים

ומה במשימות?



14. בשרטוט שלפניכם דינאל מתבונן לתחתית הבור.



א. חשבו את זוויות המשולשים $\triangle BCD$, $\triangle BDK$.

ב. הסבירו מדוע שני המשולשים דומים.

ג. חשבו את עומק הבור (את BK).



15. משורטט הישר $y = 2x - 4$.

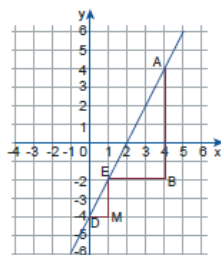
ושתי מדרגות, עם רוחב מדרגה שונה (ראו שרטוט).

נוצרו שני משולשים מהמדרגות והישר.

א. $\angle EDM = 63^\circ$ חשבו את שאר הזוויות במשולשים.

האם המשולשים דומים? אם כן, רשמו את יחס הדמיון. אם לא, הסבירו.

ב. רשמו את היחס בין גובה המדרגה לרוחב המדרגה (לגבי כל מדרגה).



16. א. שרטטו את הישר $y = 3x - 6$.

ב. שרטטו שתי מדרגות שונות (רוחב המדרגה שונה), כך שתהיה לכל אחת מהן נקודה משותפת על הישר (כמו בשרטוט למעלה).

ג. האם המשולשים שנוצרו דומים? הסבירו. אם כן, מצאו את יחס הדמיון.

ד. מצאו, בכל מדרגה, את היחס בין גובה המדרגה לרוחבה.

ה. גלעד אמר: היחס שקיבלנו הוא המקדם של ה- x במשוואה? האם גלעד צודק? הסבירו.



28. מחיר שטיח ריבועי שאורך כל צלע מטר אחד הוא 300 ₪.
 קונה רצה לקנות שטיח ריבועי שאורך צלעותיו 2 מ' והציע לשלם 600 ₪.
 בעלת החנות דרשה 1000 ₪ ואף טענה שמחיר זה הוא לאחר הנחה ניכרת.
 האם טענתה צודקת? הסבירו.



31. פיצה ריבועית שאורך הצלע שלה 15 ס"מ עולה 5 ש"ח.
 א. כמה תעלה פיצה ריבועית שאורך הצלע שלה 30 ס"מ?
 ב. כמה תעלה פיצה ריבועית שאורך הצלע שלה 45 ס"מ?



32. הרס"ר פקד על מושיק לחפור בור שעומקו, אורכו ורוחבו מטר אחד, כדי להחביא ציוד.
 מושיק הציע לחפור במקום זה שני בורות, כל אחד בעומק, אורך ורוחב של $\frac{1}{2}$ מטר.
 הרס"ר הסכים ומושיק יצא לעבודה. מה דעתכם? הסבירו.

עקרונות

1. ממושג אינטואיטיבי ויזואלי אל המושג המתמטי.
2. קצת רקע היסטורי.
3. מהמוחשי המעשי אל המסקנה המתמטית.
4. התייחסות לסביבה ולשאלות "מהחיים".
5. תרגול מגוון הכולל שרטוט, חישובי יחס הסקת מסקנות ושוב בעיות "מהחיים" ...

מהלך ההוראה

❖ הגדלה/הקטנה פעילויות חזותיות

❖ הגדלה/הקטנה של קטעים באמצעות קרניים

❖ הגדלנו/הקטנו מצולעים באמצעות קרניים וראינו כי במצולעים דומים אורכי הצלעות של מצולע אחד מתייחסות לאורכי הצלעות המתאימות של המצולע הדומה באותו יחס, הצלעות המתאימות מקבילות והזוויות המתאימות שוות.

❖ יוצאים מהקרניים – מגדירים דמיון מצולעים בעזרת יחס שווה של אורכי צלעות מתאימות ושוויון זוויות מתאימות.

❖ רק שוויון זוויות לא מספיק ורק יחס קבוע בין אורכי צלעות מתאימות לא מספיק לדמיון מצולעים

❖ ממצולעים דומים למשולשים דומים 5 (או 4) תנאים דרושים לדמיון משולשים.

❖ לדמיון משולשים מספיק שוויון של הזוויות בשני המשולשים.

❖ יחסי השטחים של משולשים דומים (וגם של מצולעים דומים) הם כריבוע יחס הדמיון.