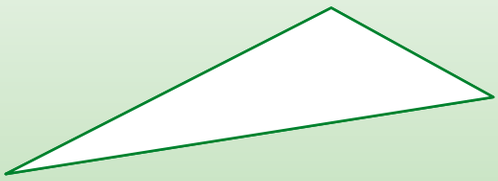
الوحدة السابعة: المتوسّط، الارتفاع ومنصف الزاوية في المثلّث

الدّرس الأول: المتوسط في المثلّث

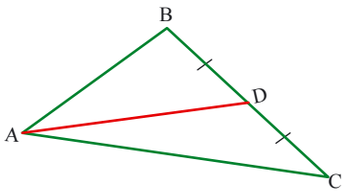
أمامكم رسمة مثلّث مختلف الأضلاع.
اقترحوا طريقة لتقسيم المثلّث إلى مثلّثين متساويين في المساحة.



نتعرَّف على المتوسط في المثلّث.

نسمِّي القطعة الّتي تربط بين **رأس** المثلّث **ومنتصف الضّلع** المقابل للرّأس:
"المتوسط في المثلّث".

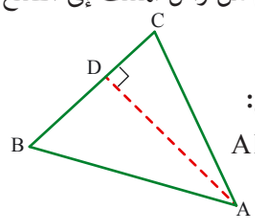
مثال: في المثلّث ΔABC،
AD هو **المتوسط** للضلع BC.
تُقسِّم النقطة D الضلع BC
إلى قطعتين متساويتين $BD = DC$.



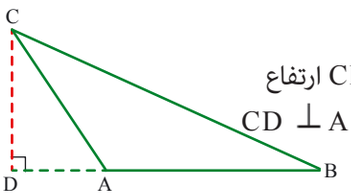
للتذكير

نسمِّي العمود القائم من رأس المثلّث إلى الضلع المقابل (أو امتداده) "**ارتفاع**" المثلّث.

أمثلة:

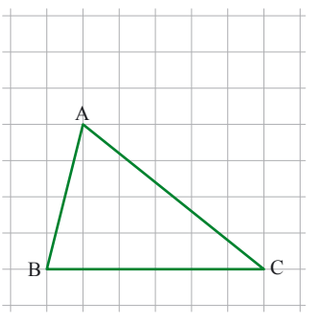


AD ارتفاع:
$AD \perp BD$

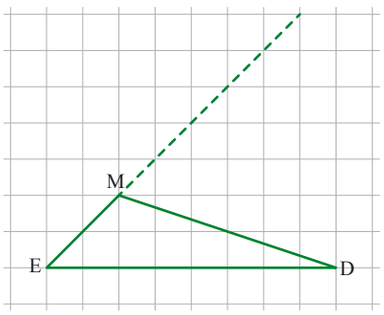


CD ارتفاع
$CD \perp AB$

1. أ. ارسموا ارتفاعًا للضلع BC ومتوسّطًا للضلع BC.



ب. ارسموا ارتفاعًا للضلع EM ومتوسّطًا للضلع EM.



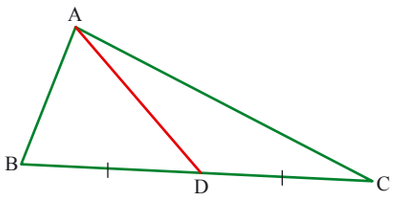
2. معطى: AD متوسّط للضلع BC في المثلّث ΔABC.

أ. هل يتطابق المثلّث ΔABD مع المثلّث ΔACD؟ اِشرحوا.

ب. ارسموا ارتفاعًا من الرأس A إلى الضلع BC.

لماذا تساوي **مساحة** المثلّث ΔADC **مساحة** المثلّث ΔADB؟

ت. اِفحصوا اقتراحكم في مهمّة الافتتاحيّة.

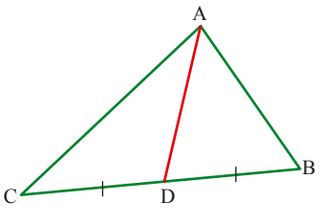


رأينا في المثلّث أنّ المتوسط يقسمه إلى مثلّثين متساويين في المساحة.

3. AD هو متوسط للضلع BC في المثلّث ΔABC.

مساحة المثلّث ΔACD هي 6 سنتمترات مربّعة.

ما هي مساحة المثلّث ΔABC؟



4. معطى: AD = DE = EK = KC

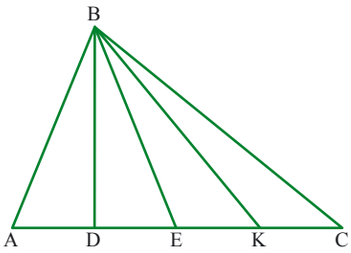
أ. في أيّ مثلّثات BE هو متوسّط؟

ب. في أيّ مثلّث BK هو متوسّط؟

ت. مساحة المثلّث ΔABC هي 24 سنتمترًا مربّعًا.

اِحسبوا مساحة كلّ مثلّث من المثلّثات الآتية:

ΔDBC ΔEBK ΔEBC

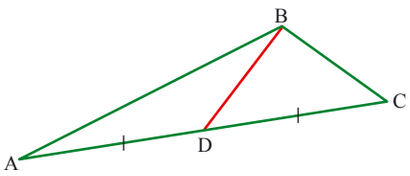


5. القطعة BD هي متوسّط في المثلّث ΔABC.

محيط المثلّث ΔBCD هو 15 سم.

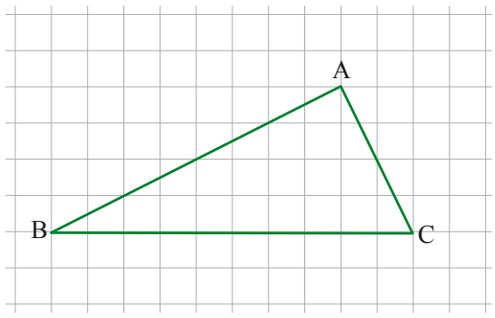
محيط المثلّث ΔABD هو 18 سم.

بكم أكبر طول الضلع AB من طول الضلع BC؟ اشرحوا.

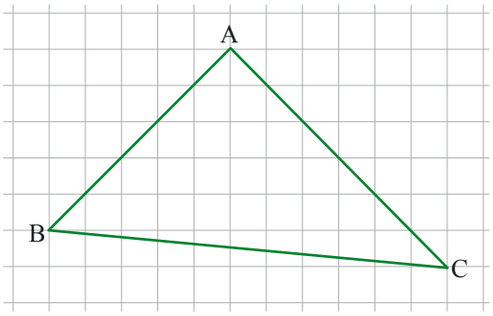


مجموعة مهامّ

1. أ. ارسموا متوسّطًا للضلع AB.
ارسموا ارتفاعًا للضلع BC.

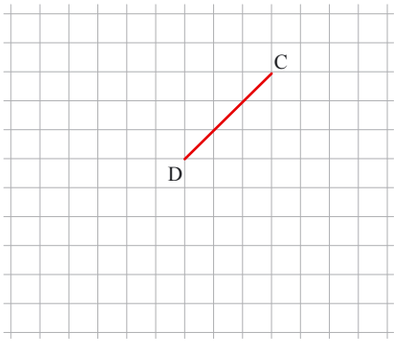


ب. ارسموا متوسّطًا للضلع AC.
ارسموا منصّفًا للزاوية A.



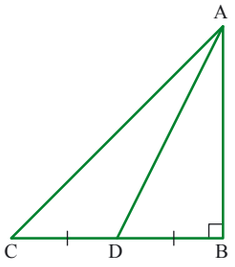
2. أ. ارسموا مثلّثًا فيه C رأس في المثلّث
وَ CD متوسّطًا في المثلّث.
(تقع رؤوس المثلّث على رؤوس التربيعات.)

ب. ارسموا مثلّثًا آخر فيه C رأس في المثلّث
وَ CD متوسّطًا في المثلّث.

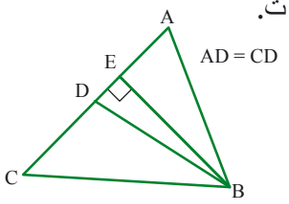


3. سجّلوا، في كلّ بند، ما هو المتوسط وما هو الارتفاع.

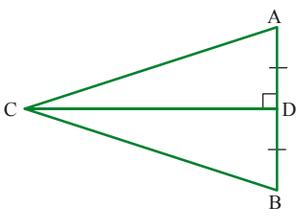
أ.



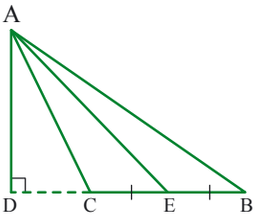
ت.



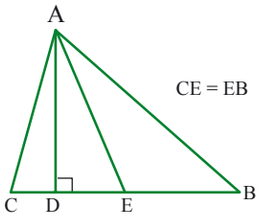
ج.



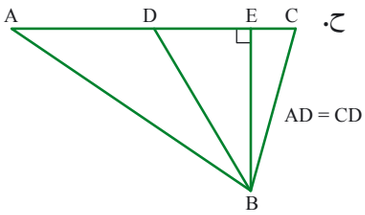
ب.



ث.



ح.



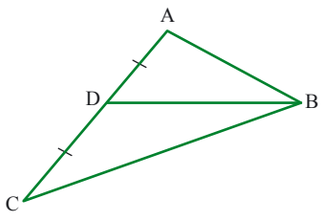
4. **معطى:** القطعة BD هي متوسّط في المثلّث ΔABC.

محيط المثلّث ΔABD هو 16 سم.

محيط المثلّث ΔCBD هو 20 سم.

طول الضلع AB هو 4 سم.

جدوا طول CB. اشرحوا.

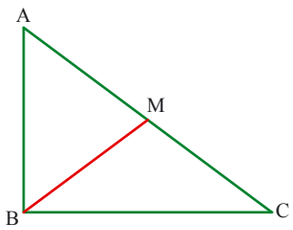


5. **معطى:** BM متوسّط للضلع AC في المثلّث ΔABC.

أ. هل $\Delta ABM \cong \Delta CBM$؟ اشرحوا.

ب. مساحة المثلّث ΔBMC هي 4 سنتمترات مربّعة.

ما هي مساحة المثلّث ΔAMB؟ اشرحوا.



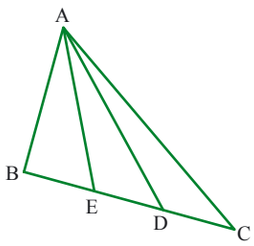
6. **معطى:** AD متوسّط في المثلّث ΔAEC.

AE متوسّط في المثلّث ΔABD.

مساحة المثلّث ΔABC تساوي 12 سنتمترًا مربّعًا.

جدوا المساحات الآتية:

أ. مساحة ΔADC ب. مساحة ΔABE ت. مساحة ΔAEC



7. **معطى:** القطعة AP هي متوسّط في المثلّث القائم الزاوية ΔACB.

مساحة المثلّث ΔACB هو 6 سنتمترات مربّعة.

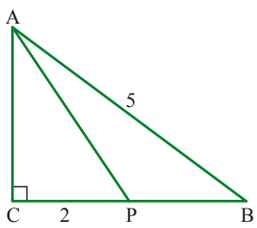
طول CP هو 2 سم.

(أُعِدَّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم)

أ. ما هي مساحة المثلّث ΔAPC؟ اشرحوا.

ب. احسبوا طول AC.

ت. احسبوا محيط المثلّث ΔACB.



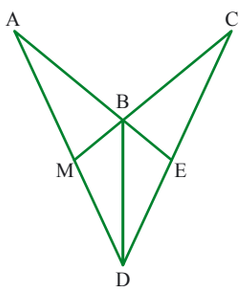
8. **معطى:** $\Delta ABD \cong \Delta CBD$

النقطة M هي منتصف الضلع AD وَ E منتصف الضلع CD.

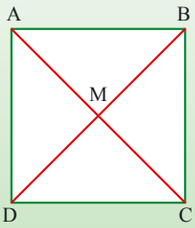
أ. جدوا أربعة مثلّثات متساوية في المساحة. اشرحوا.

ب. أمامكم، في الرسمة، زوجان من المثلّثات الإضافيّة المتطابقة.

سجّلوا تطابقًا لكلّ زوج ونظريّة التطابق المناسبة.



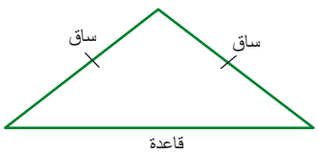
الدرس الثاني: المتوسّط في المثلّث المتساوي السّاقين



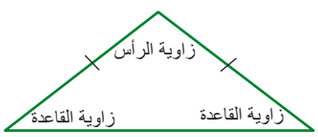
ABCD هو مربّع منتظم.
القطع **الحمراء** هي أقطار المربّع.
كم مثلّثًا متساوي السّاقين يوجد في الرّسمة؟
كم مثلّثًا، متساوي السّاقين، مختلفًا يوجد في الرّسمة؟

نتذكّر صفات مثلّث متساوي السّاقين، ونتعلّم صفات إضافيّة.

للتذكير

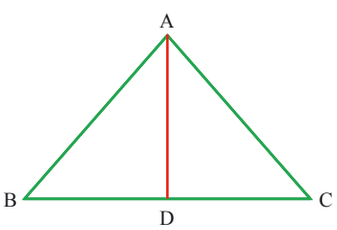


- نسمّي المثلّث الّذي فيه ضلعان متساويان **مثلثًا متساوي السّاقين**.
- الضّلعان المتساويان نسمّيهما **ساقين**.
- الضّلع الثّالث نسمّيه **قاعدة**.



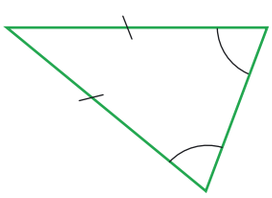
- الزّاويتان بجانب القاعدة نسمّيهما **زاويتي القاعدة**.
- الزّاوية الّتي تقع بين ساقيِ المثلّث المتساوي السّاقين نسمّيها **"زاوية الرّأس"**.

نفكّر بـ ...



1. **معطى:** المثلّث ΔABC متساوي الساقين $AC = AB$.
   AD ينصّف زاوية الرأس.
   أ. أشيروا إلى المعطيات في الرسمة.
   ب. حسب أيّ نظرية تطابق يتحقّق أنّ $\Delta BAD \cong \Delta CAD$.
   ت. لماذا $\measuredangle C = \measuredangle B$؟

برهنا أنّ:
زاويتي القاعدة في المثلّث المتساوي السّاقين **متساويتان** بالمقدار.

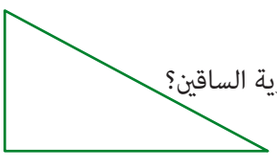


2. أ. هل يمكن أن تكون زاوية القاعدة في المثلّث المتساوي السّاقين زاوية منفرجة؟ اشرحوا.
ب. هل يمكن أن تكون زاوية القاعدة في المثلّث المتساوي السّاقين زاوية قائمة؟ اشرحوا.
ت. هل يمكن أن تكون زاوية القاعدة في المثلّث المتساوي السّاقين زاوية حادّة؟ اشرحوا.

3. اِشرحوا الادّعائين الآتيين:
أ. إذا كان مقدار زاوية الرأس في مثلّث متساوي السّاقين $60°$ فإنّ جميع زوايا المثلّث متساوية في المقدار.
ب. إذا كان مقدار زاوية القاعدة في مثلّث متساوي السّاقين $60°$ فإنّ جميع زوايا المثلّث متساوية في المقدار.

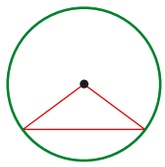
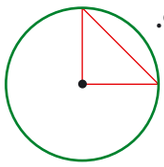
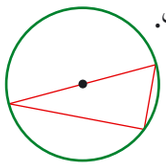
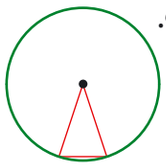
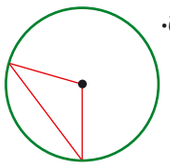
4. يمكنكم إيجاد الفعّاليّة "انعكاس مثلّث" **"שיקוף של משולש"** في موقع "الرّياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب" **"פעילות באמצעות המחשב"**. ستنفّذون في هذه الفعّاليّة انعكاس مثلّث بواسطة أحد أضلاعه، ستفحصون نوع المثلّث وانعكاسه اللّذين يكوّنان مثلّثًا متساوي السّاقين، وستشرحون مكتشفاتكم.
نفّذوا الفعّاليّة حسب التّعليمات.

5. قصّوا مثلّثين متطابقين قائمي الزاوية مختلفي الأضلاع. (كما يظهر في الرسمة).
أ. ضعوا زوجًا من ضلعي المثلّثين بشكل متجاور بحيث يَنْتُج مثلّث متساوي الساقين.
أيّ ضلعين وضعتوهما بشكل متجاور؟ ارسموا المثلّث الناتج؟



ب. هل يمكن أن نضع زوجًا آخر من الأضلاع بشكل متجاور للحصول على مثلثات متساوية الساقين؟
إذا كانت الإجابة نعم فضعوا زوجًا من ضلعي المثلّثين بشكل متجاور وارسموا المثلّث الناتج. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا.
ت. أيّ مضلّعات تنتج إذا وضعنا الوترين بشكل متجاور؟ ضعوا الوترين بشكل متجاور وارسموا.

6. **للتذكير:** نسمّي القطعة الّتي تربط بين نقطة تقع على محيط الدائرة ومركز الدائرة **"نِصف القطر"**.
جميع أنصاف أقطار نفس الدائرة متساوية في الطول.
جدوا الدوائر الّتي يوجد في كلّ منها مثلّث متساوي السّاقين؟ علّلوا.

أ. 
ب. 
ت. 
ث. 
ج. 

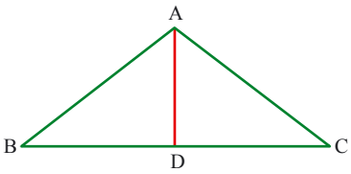
مجموعة مهامّ

1. أ. **معطى:** $AC = AB$.

AD متوسّط في المثلّث.

أشيروا إلى المعطيات في الرسمة.

هل يمكن الاستنتاج أنّ: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$؟ علّلوا.

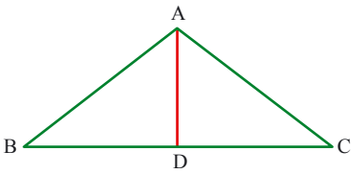


ب. **معطى:** $AC = AB$.

AD ارتفاع في المثلّث.

أشيروا إلى المعطيات في الرسمة.

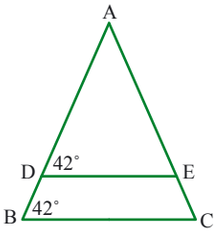
هل يمكن الاستنتاج أنّ: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$؟ علّلوا.



2. **معطى:** $AD = AE$

أ. احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔADE.

ب. احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔABC.

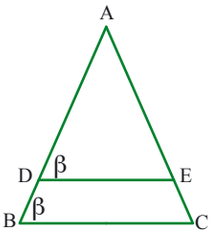


3. **معطى:** $AB = AC$

$\sphericalangle ABC = \beta$

أ. عبّروا عن زوايا المثلّث ΔABC بواسطة β.

ب. عبّروا عن زوايا المثلّث ΔADE بواسطة β.



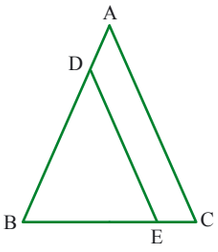
4. **معطى:** $AB = AC$

$AC \parallel DE$

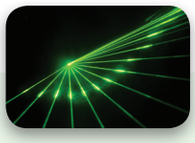
$\sphericalangle A = 50°$

احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔBDE

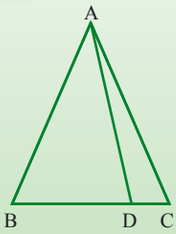
(سجّلوا سير الحسابات.)



الدرس الثالث: منصِّف الزّاوية في المثلّث المتساوي السّاقين



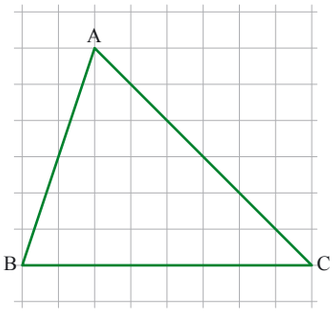
معطى مثلّث متساوي السّاقين ΔABC فيه $AB = AC$.
تقع النقطة D على القاعدة BC.
نتجت ثلاثة مقادير متساوية في المثلّثين. سجّلوها.
هل يمكن الاستنتاج أنّ: $\Delta CAD \cong \Delta BAD$؟ اشرحوا.



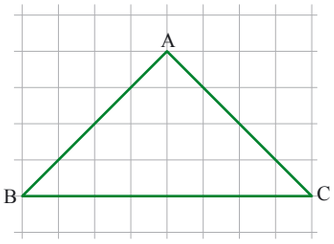
نجد ونبرهن صفات إضافيّة في المثلّث المتساوي السّاقين.

1. يمكنكم إيجاد الفعّاليّة "منصّف الزّاوية، ارتفاع ومتوسط في المثلّث" **"חוצה-זווית, גובה ותיכון במשולש"** في موقع "الرّياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب" **"פעילויות באמצעות המחשב"**. ستفحصون في هذه الفعّاليّة مكان كلّ من منصِّف الزّاوية والارتفاع والمتوسط في المثلّثات المختلفة، وستشرحون مكتشفاتكم.
نفِّذوا الفعّاليّة حسب التّعليمات..

2. أ. ارسموا **ارتفاعًا** للضلع BC، **ومنصِّفًا** للزّاوية A، **ومتوسطًا** للضلع BC.
استعينوا بأداة قياس الزّاوية (منقلة).
أيّ قطعة من بين القطع الثّلاث هي الأقصر؟ اِشرحوا.



ب. معطى المثلّث ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين.
ارسموا ارتفاعًا للقاعدة، ومنصِّفًا لزّاوية الرأس، ومتوسطًا للقاعدة.
على كم قطعة مختلفة حصلتم؟

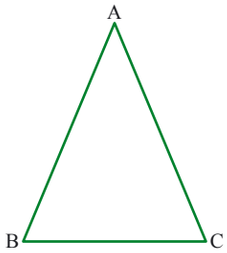


3. أ. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة.

أين يجب أن تقع النقطة D على القاعدة BC بحيث يتحقّق أنّ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$؟

ب. قال **عماد**: يجب أن تكون النقطة D في منتصف BC (AD متوسّط للقاعدة BC).

عيّنوا النقطة D حسب اقتراح **عماد**، وأشيروا إلى معطيات متساوية في المثلّثين، واذكروا نظريّة تطابق مناسبة.



ت. اشرحوا لماذا ينصّف AD زاوية الرأس؟

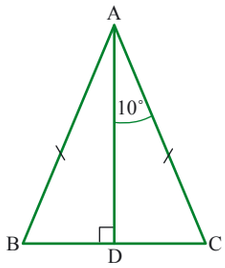
ث. اشرحوا لماذا AD هو ارتفاع للقاعدة BC؟

برهنّا في المثلّث **المتساوي السّاقين** ما يلي: **يتّحد** منصِّف زاوية الرّأس والمتوسط للقاعدة والارتفاع للقاعدة (جميعها نفس القطعة).

4. استعينوا، في كلّ بند، بمعطيات الرسمة.

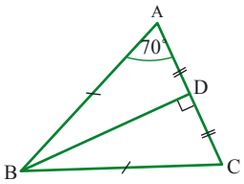
أ. ما مقدار الزاوية $\measuredangle BAD$؟ علّلوا.

احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔABC.



ب. ما مقدار الزاوية $\measuredangle ABD$؟ علّلوا.

احسبوا مقدار زوايا المثلّث ΔABC.



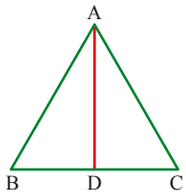
5. أشيروا، في كلّ بند، إلى المعطيات في الرسمة.

حدّدوا ما إذا يمكن استخلاص النتيجة واشرحوا.

أ. **معطى:** $AB = AC$

$AD \perp BC$

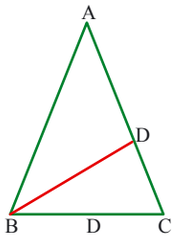
النتيجة: $BD = CD$



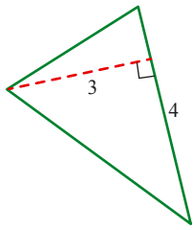
ب. **معطى:** $AB = AC$

BD ينصّف الزاوية B

النتيجة: $DC = AD$



للتذكير



مساحة المثلّث تساوي نِصف حاصل ضرب طول الضلع في طول الارتفاع لهذا الضلع.

مثال: مساحة المثلّث الّذي يظهر في الرسمة هي 6 سنتمترات مربّعة $= \frac{3 \cdot 4}{2}$

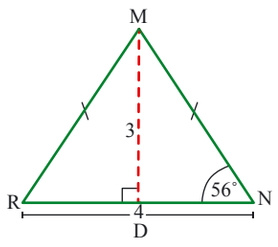
(أُعِدّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

6. استعينوا، في كلّ بند، بمعطيات الرسمة. (أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

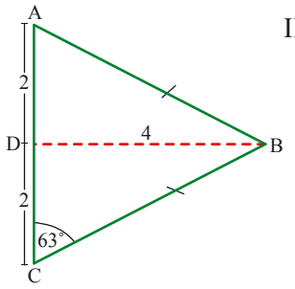
أ. سجِّلوا مقدار زوايا إضافيّة.

ب. احسبوا مساحة كلّ مثلّث.

I



II



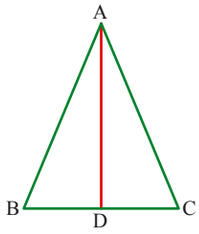
مجموعة مهامّ

1. أشيروا، في كلّ بند، إلى المعطيات في الرسمة. حدّدوا ما إذا يمكن استخلاص الاستنتاج واشرحوا.

أ. **معطى:** $AB = AC$

AD ينصّف الزاوية A

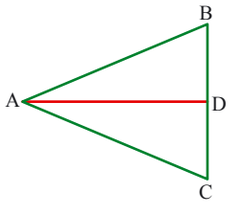
الاستنتاج: $BD = CD$



ب. **معطى:** $AB = AC$

AD ارتفاع للقاعدة BC.

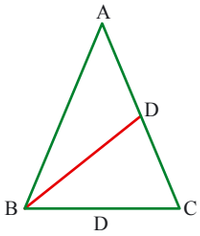
الاستنتاج: $BD = C$



ت. **معطى:** $AB = AC$

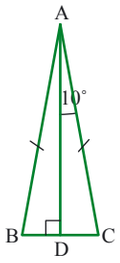
BD متوسط للضلع BC

الاستنتاج: $BD \perp AC$

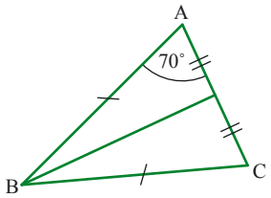


2. أكملوا مقدار الزوايا الّتي تظهر في الرسمة.

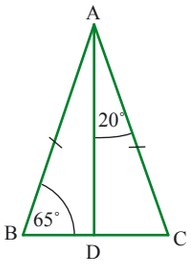
I



II



III

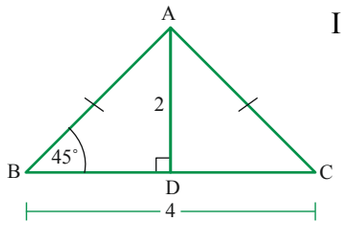


3. استعينوا، في كلّ بند، بمعطيات الرسمة. (أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

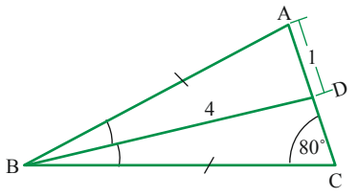
أ. سجِّلوا مقدار زوايا إضافيّة تظهر في الرسمة.

ب. احسبوا مساحة كلّ مثلّث.

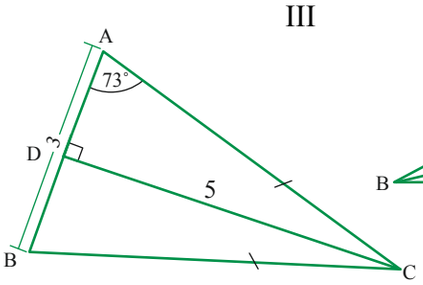
I



II



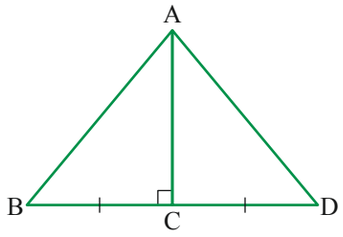
III



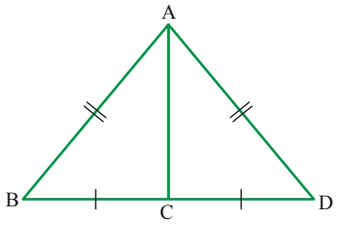
4. جدوا، في كلّ بند، زوجًا من المثلّثات المتطابقة.

سجِّلوا التطابق حسب تناظر الرؤوس، وعلّلوا بواسطة نظريّة التطابق.

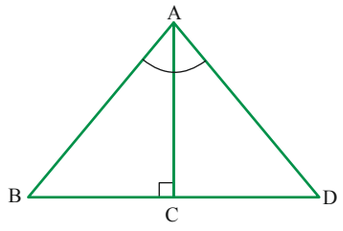
أ.



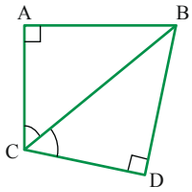
ب.



ت.



ث.



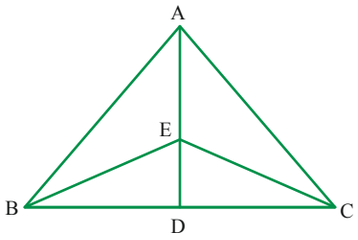
5. معطى: $AC = AB$

AD ينصف $\measuredangle BAC$

أ. سجّلوا المعطيات في الرسمة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق $\Delta ACE \cong \Delta ABE$ ؟

ت. لماذا ΔBEC هو مثلّث متساوي الساقين؟



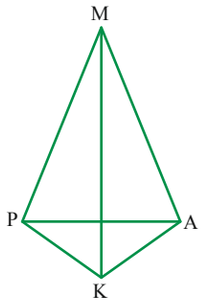
6. معطى: مثلّث PMA هو مثلّث متساوي الساقين $(MP = MA)$.

MK ينصف $\measuredangle PMA$

أ. سجّلوا المعطيات في الرسمة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق $\Delta AMK \cong \Delta PMK$؟

ت. لماذا ΔPKA هو مثلّث متساوي الساقين؟



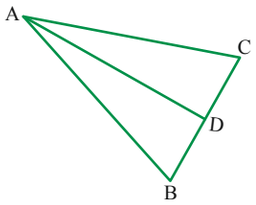
7. معطى: $AD \perp BC$.

AD ينصف $\measuredangle A$.

أ. سجّلوا المعطيات في الرسمة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق $\Delta CAD \cong \Delta BAD$؟

ت. هل المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين؟ علّلوا.



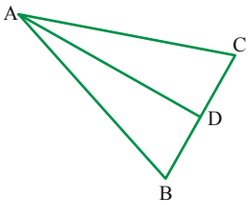
8. معطى: $AD \perp BC$.

AD متوسط للضلع BC.

أ. سجّلوا المعطيات في الرسمة.

ب. حسب أيّ نظريّة يتطابق $\Delta CAD \cong \Delta BAD$؟

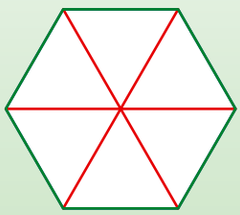
ت. هل المثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين؟ علّلوا.



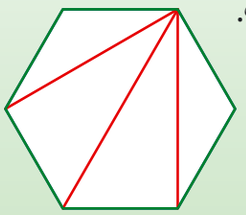
الدرس الرابع: مثلّث متساوي الأضلاع

مقدار كلّ زاوية في المسدّس المنتظم هو $120°$.
رُسمت ثلاثة أقطار في كلّ مسدّس منتظم.
اِحسبوا مقدار جميع الزّوايا في المثلّثات الّتي نَتَجَت.

أ.

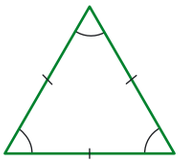


ب.

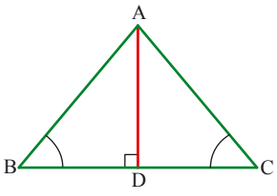


نتعرّف على صفات المثلّث المتساوي الأضلاع.

1. رأينا، في الدّروس السّابقة، أنّ زوايتي القاعدة في المثلّث المتساوي السّاقين متساويتان في المقدار.
لماذا تتساوى جميع زوايا المثلّث المتساوي الأضلاع بالمقدار؟

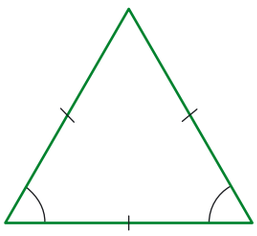


2. أ. سجِّلوا المعطيات المشار إليها في الرسمة بكتابة رياضيّة.
ب. أشيروا في الرسمة إلى أزواج إضافيّة من الزوايا المتساوية، وعلّلوا.
ت. كيف يمكن الاستنتاج أنّ: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$؟ علّلوا.
ث. كيف يمكن الاستنتاج أنّ المثلث ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين؟



للتذكير:
نسمّي المثلّث الّذي جميع أضلاعه متساوية "**مثلّث متساوي الأضلاع**".

3. أ. لماذا يكون المثلّث الّذي تتساوى جميع زواياه بالمقدار مثلّثًا متساوي الأضلاع؟
ب. عودوا إلى مهمّة الافتتاحيّة، وافحصوا، في كلّ رسمة، نوع المثلّث الّذي نَتَج.



4. اِفحصوا ما إذا كانت الادّعاءات الآتية صحيحة أم لا، واشرحوا.

أ. إذا كان مقدار زاوية الرأس في مثلّث متساوي السّاقين هو 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

ب. إذا كان مقدار زاوية القاعدة في مثلّث متساوي السّاقين هو 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

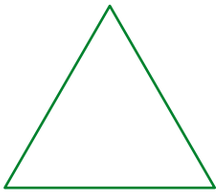
ت. إذا كان مقدار إحدى الزّوايا في المثلّث 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

ث. إذا كان مقدار كلّ زاوية من زاويتيِ المثلّث 60° فإنّ المثلّث متساوي الأضلاع.

5. معطى في الرسمة مثلّث متساوي الأضلاع.

ارسموا جميع منصّفات الزوايا، الارتفاعات والمتوسّطات.

كم قطعة رسمتم؟ اشرحوا.



6. اِفحصوا ما إذا كانت الادّعاءات الآتية صحيحة أم لا. اشرحوا أو ارسموا مثالًا.

أ. كلّ مثلّث متساوي الأضلاع هو مثلّث متساوي الساقين.

ب. المثلّث المتساوي الساقين يمكن أن يكون مثلّثًا قائم الزاوية.

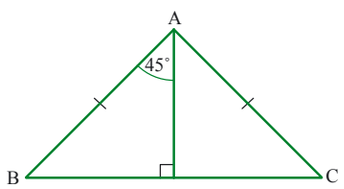
ت. المثلّث المتساوي الأضلاع يمكن أن يكون مثلّثًا قائم الزاوية.

ث. كلّ مثلّث متساوي الساقين هو مثلّث متساوي الأضلاع.

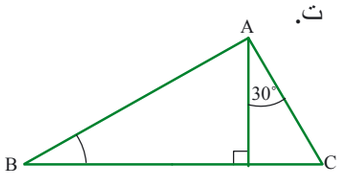
ج. كلّ مثلّث متساوي الأضلاع هو مثلّث حادّ الزوايا.

7. أكملوا، في كلّ بند، مقادير زوايا إضافيّة بناء على المعطيات في الرّسمة، وحدِّدوا نوع المثلّث ΔABC.

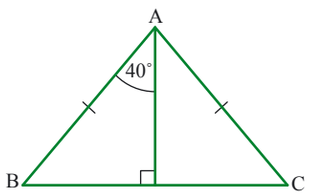
أ.



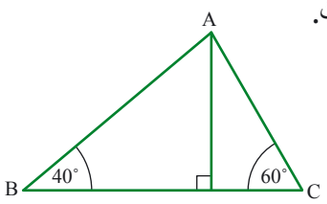
ت.



ب.



ث.



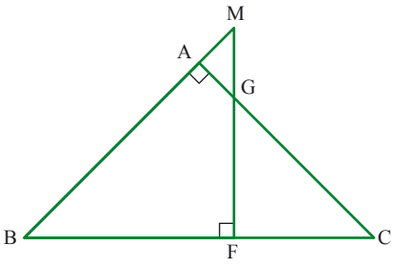
8. معطى: ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين $(AB=AC)$.

$\measuredangle BAC = 90^\circ$

$\measuredangle MFB = 90^\circ$

أ. اِحسبوا مقادير الزّوايا في الرّسمة وسجِّلوها في الرسمة.

ب. جدوا في الرسمة ثلاثة مثلّثات متساوية السّاقين إضافيّة.



مجموعة مهامّ

1. معطى: ΔABC هو مثلّث متساوي السّاقين $(AC = BC)$.

AD ينصِّف $\measuredangle A$.

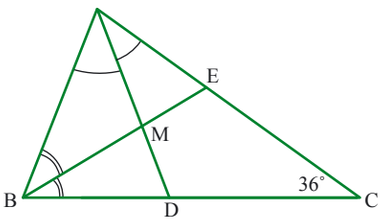
BE ينصِّف $\measuredangle B$.

$\measuredangle C=36^\circ$

أ. اِحسبوا مقادير الزّوايا في الرّسمة.

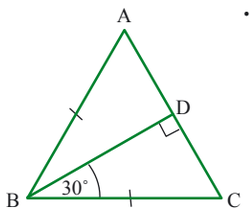
ب. كم مثلثًا متساوي السّاقين إضافيًّا يوجد في الرّسمة؟ سجِّلوها.

ت. جدوا أزواجًا من المثلّثات المتطابقة، وسجِّلوها.

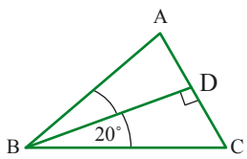


2. أكملوا، في كلّ بند، مقادير الزوايا بناء على المعطيات في الرّسمة، وحدِّدوا نوع المثلّث ΔABC.

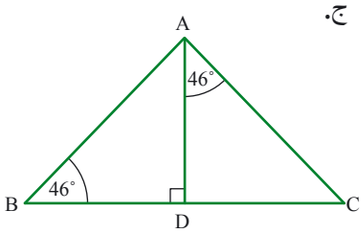
أ.



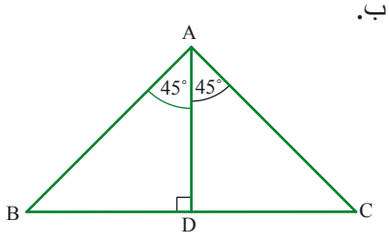
ت.



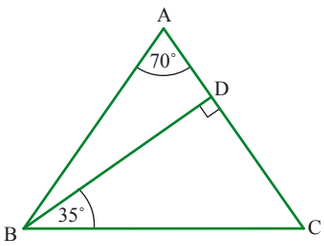
ج.

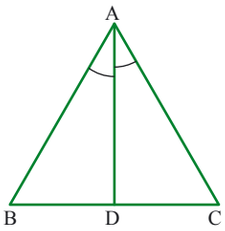


ب.



ث.





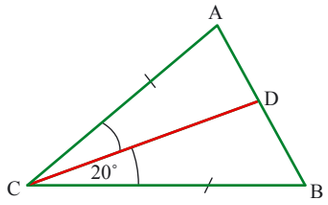
3. معطى: ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع . AD ينصِّف الزاوية $\measuredangle BAC$.
لماذا يساوي BD نِصف AB؟

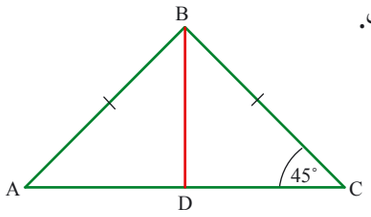
4. حدِّدوا، في كلّ بند، ما إذا كان الادّعاء صحيحًا أم لا، إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا، وإذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا. .

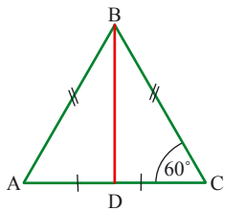
أ. جميع المثلّثات المتساوية السّاقين **متطابقة**.

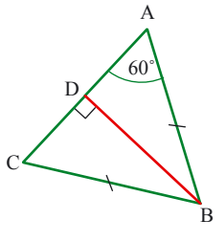
ب. جميع المثلّثات المتساوية الأضلاع **متطابقة**.

5. أكملوا، في كلّ بند، مقادير الزوايا بناء على المعطيات في الرّسمة، وحدِّدوا نوع المثلّث ΔABC.
اشرحوا.

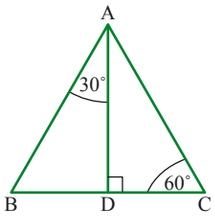
أ.


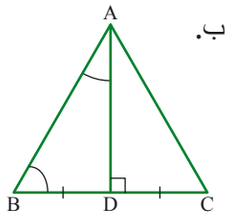
ت.


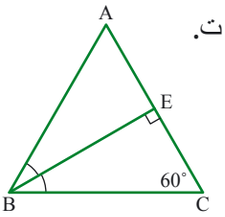
ب.


ث.


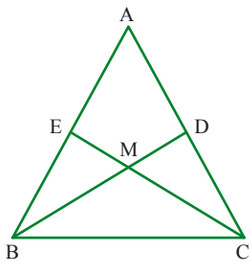
6. اِفحصوا، في كلّ بند، ما إذا كان بالإمكان بناءً على المعطيات، أنْ نحدِّد أنّ ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع، وهل يمكن أن نحدِّد، بناءً على المعطيات، ما إذا كان ΔABC مثلّثًا متساوي الساقين غير متساوي الأضلاع؟

أ.


ب.


ت.


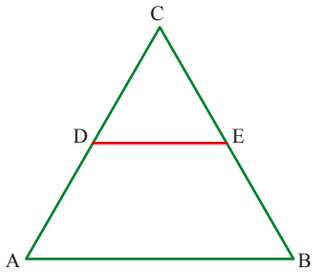
7. **معطى:** ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.
DB وَ EC هما منصّفا زاويتيِ القاعدة في المثلّث.



أ. جدوا مقدار زوايا المثلّث ΔBMC.

ب. ما هو نوع المثلّث ΔBMC؟ علّلوا.

8. **معطى:** ΔABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.



أ. النقطة D هي منتصف الضلع AC، عيّنوا ذلك في الرسمة.

ب. النقطة E هي منتصف الضلع CB، عيّنوا ذلك في الرسمة.

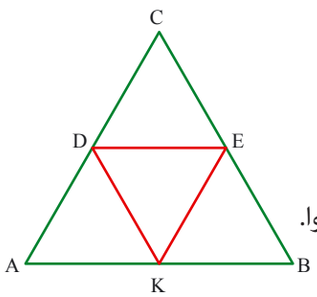
ت. سجِّلوا، في الرسمة، مقدار الزاوية $\sphericalangle A$.

ث. اشرحوا لماذا ΔCDE هو مثلّث متساوي الساقين؟

ج. احسبوا مقادير زوايا المثلّث ΔCDE.

ح. اشرحوا لماذا ΔCDE هو مثلّث متساوي الأضلاع؟

9. مثلّث ABC هو مثلّث متساوي الأضلاع.



أ. سجِّلوا، في الرسمة، مقدار الزوايا في ΔABC.

ب. النّقاط K, D, وَ E هي منتصفات أضلاع المثلّث ABC.

- احسبوا مقادير جميع الزوايا وسجّلوها في الرسمة.
- هل جميع المثلّثات الأربعة التي نتجت هي مثلّثات متساوية الأضلاع؟ اشرحوا.
- هل جميع المثلّثات الأربعة التي نتجت هي مثلّثات متطابقة؟ اشرحوا.