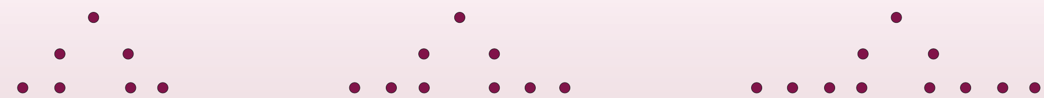
الوحدة الرابعة: نبسِّط ونعقد تعابير جبرية

الدرس الأول: نبسِّط ونعقد

أمامكم ثلاثة مبانٍ أولى في متوالية نقاط.



اقترح تلاميذ الصف تعبيرًا جبريًا لإيجاد عدد النقاط في مكان **n** في المتوالية.

سميرة: $n + 5 + n$ سلوى: $2 \cdot (n + 2) + 1$

نوال: $n + 4 + n + 1$ رائدة: $5 + 2 \cdot n$

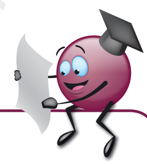
تناقشوا حول الاقتراحات المختلفة، ثم اشرحوا، كيف "عدَّت" كل واحدة منهنّ عدد النقاط؟

نبسِّط ونعقد تعابير جبرية ونجد العلاقة بين التعابير.

1. أ. هل جميع التعابير الجبرية التي اقترحتها البنات في افتتاحية الدرس تصف المتوالية؟
بيِّنوا أن هذه التعابير الجبرية متساوية بمساعدة قوانين واتفاقات عمليات حسابية.

ب. قالت **ميادة**: $5 + 2 \cdot n = 7 \cdot n$، هل قولها صحيح؟ اشرحوا.

ج. اكتبوا ثلاثة تعابير جبرية تساوي التعبير $7 \cdot n$.



- بمساعدة قوانين واتفاقات عمليات حسابية، يمكن أن نكتب تعابير جبرية متساوية. بهذه الطريقة، نقصر أحيانًا التعابير. "تقصير" التعابير الجبرية نسمِّيه **تبسيطا** أيضًا.

  مثال: التعبير الجبري $3 \cdot x + 2 \cdot x$ هو تعبير مساوٍ للتعبير الجبري $5 \cdot x$، لأن $3 \cdot x + 2 \cdot x = (3 + 2) \cdot x = 5 \cdot x$

  يمكن أن نشرح كالتالي أيضًا: $3 \cdot x = x + x + x$ ، $2 \cdot x = x + x$

  لذا، $3 \cdot x + 2 \cdot x = x + x + x + x + x = 5 \cdot x$

  أمثلة إضافية: $3 \cdot x \cdot 2 = 6 \cdot x$, $3 \cdot 5 \cdot x = 15 \cdot x$

- يوجد تعابير جبرية لا يمكن تبسيطها.

  مثال: $2 + 3 \cdot x \neq 5 \cdot x$ لأن عملية الضرب تسبق عملية الجمع.

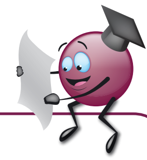
- يمكن أن نكتب تعابير جبرية متساوية بواسطة "التعقيد" (عكس التبسيط). يساعد "التعقيد" عادةً على كتابة التعبير بطرق كثيرة.

  مثال: يوجد إمكانيات كثيرة لتسجيل التعبير الجبري $5 \cdot x$ بمساعدة "التعقيد".

  أمثلة: $2 \cdot x + 3 \cdot x$ $x + 4 \cdot x$ $\frac{10 \cdot x}{2}$.

2. أمامكم تعابير جبرية، أي منها **لا تساوي** التعبير الجبري $7\cdot n$ ؟

$3+4\cdot n$	$n\cdot(3+4)$	$(3+4)\cdot n$	$3\cdot n+4\cdot n$	$2\cdot n+5\cdot n$
$8\cdot n-n$	$8-n$	$6\cdot n+n$	$n+n\cdot 6$	$2\cdot n+n+4\cdot n$



- في الرياضيات، نحذف عادةً نقطة الضرب بين عاملين، إذا كان على الأقل أحدهما متغيّرًا أو تعبيرًا جبريًا داخل أقواس.

  أمثلة: بدل $2\cdot n$ نسجِّل $2n$

  بدل $2\cdot(8+b)$ نسجِّل $2(8+b)$

  بدل $a\cdot b$ نسجِّل ab

- أحيانًا، إذا حذفنا نقطة الضرب، يجب أن نحافظ على ترتيب العمليات الحسابية. وبحسب الحاجة يجب إضافة أقواس.

  أمثلة: بدل $2\cdot a+3\cdot b$ نسجِّل $2a+3b$ ، لأن عملية الضرب تسبق عملية الجمع.

  في التعبير الجبري $2\cdot a:3\cdot b$ $(b\neq 0)$. نحذف فقط النقطة بين 2 وَ a وهكذا نحصل على $2a:3\cdot b$.

  أو نكتب هكذا: $(2a:3)b$

  التعبير الجبري $2a:3b$ يساوي التعبير الجبري $2\cdot a:(3\cdot b)$ $(b\neq 0)$

4. في كل بند، اكتبوا تعبيرين جبريين يتساويان مع التعبير الجبري المعطى. اذكروا إذا نفّذتم تبسيطًا أو تعقيدًا للتعابير الجبرية.

أ. $8c$ ب. $7d+3+2$ ج. $2a+7a$ د. $3a+5$ هـ. $5a+8b$

مجموعة مهام

1. بسِّطوا.

أ. $5a+7a$ ج. $10a-2a+5+1$ هـ. $4+2b+3b+1$

ب. $8b+3b$ د. $45+2x+3+5x$ و. $7x+1+3x+15x$

2. بسِّطوا.

أ. $11a+3+5+2a$ د. $7x+3+11x+11+100$

ب. $2a+5+200$ هـ. $2(4+a)+5(a+1)+a$

ج. $m+3m+7+6m$ و. $10m+2(m+5)+10+8m$

3. بسِّطوا.

أ. $17a + 310 + 24 + a$

ب. $3(2a + 1) + 4a + 7$

ج. $\frac{1}{2}a + 7 + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a$

د. $2.5 + 11x + 3.25 + 5.4x + 0.6x$

هـ. $2.5(x + 2) + 0.6x + 0.5x + 7$

و. $\frac{1}{5}x + 7 + \frac{1}{5}(5x + 10) + 3\frac{4}{5}x$

4. بسِّطوا.

أ. $3 \cdot 5a - 2a + 6a$

ب. $3(4m + 2) + 10m + 7 \cdot \frac{1}{2}$

ج. $1.2m + 13\frac{1}{2} + 0.5 + 6.4m$

د. $11.2x + 2(3.5 + 0.5x) + 1.8x$

هـ. $\frac{1}{4}(8x + 12) + 2.6x + 11 + \frac{1}{2}x$

و. $\frac{1}{5} + 2y + 3\left(y + \frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$

5. سجِّلوا لكل تعبير جبري، **تعبيرين جبريين** مساويين له.

أ. $3x + 8x$ ب. $7x$ ج. $1 + 2x + 5$ د. $1 + 2x$

6. سجِّلوا لكل تعبير جبري، **تعبيرين جبريين** مساويين له.

أ. $11x$ ب. $3x - 2x + 3$ ج. $5 - 3 + 2x$ د. $3x + 11$

7. سجِّلوا لكل تعبير جبري، **تعبيرين جبريين** مساويين له.

أ. $5 + 3x + 2x$ ب. $3 + 3x$ ج. $\frac{1}{2}x \cdot 2$ د. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x$

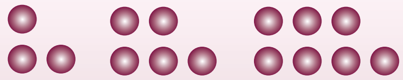
8. سجِّلوا لكل تعبير جبري، **تعبيرين جبريين** مساويين له.

أ. $\frac{1}{3}x$ ب. $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ ج. $2 + 3a + 1.5a$ د. $x + 3$

مهام إضافية في الموقع (משימות נוספות באתר)

الدرس الثاني: تعميم وتبسيط تعابير جبرية

أمامكم ثلاثة مبانٍ أولى في متوالية:



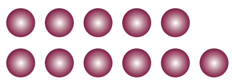
سجَّل ثلاثة تلاميذ تمارين تمثِّل عدد الدوائر في المكان الخامس في المتوالية.

سجَّل **أمير:** $5 + (5 + 1)$ سجَّل **عدنان:** $2 \cdot 5 + 1$ سجَّل **فؤاد:** $2 \cdot (5 + 1) - 1$

كيف يكتب كل واحد منهم تعبيرًا جبريًا لعدد النقاط في المكان الـ 19؟

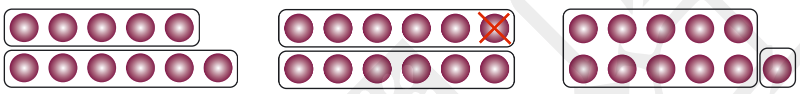
نعمم ونسجِّل تعابير جبرية. نفحص ما إذا التعابير الجبرية متساوية.

.1 في المكان الخامس في المتوالية نجد:



أشار كل تلميذ إلى طريقة العد التي استعملها.

أ. لائموا لكل تلميذ الرسمة المناسبة له



ب. تصف التعابير الجبرية الآتية عدد النقاط في المكان **n** (**n** عدد طبيعي).

$2(n + 1) - 1$ $n + (n + 1)$ $2n + 1$

لائموا بين التعابير والرسومات.

ج. بيِّنوا بمساعدة القوانين والاتفاقات أن جميع التعابير الجبرية متساوية.

د. اختاروا تعبيرًا جبريًا وبيِّنوا بمساعدته أن عدد النقاط في كل مبنى في المتوالية هو عدد فردي.

.2 بسِّطوا التعابير الجبرية.

مثال: $4x + 6\frac{1}{2} + 2x + 12\frac{1}{2} = 6x + 19$

أ. $3a + 5 + 7 + 3a$ ج. $2a + \frac{1}{2}a + 1\frac{1}{2}a$ هـ. $2 \cdot 7 \cdot x + 1$

ب. $m + 3m + m + 6$ د. $2x + 4x + x + 3x$ و. $5 \cdot 3m + 2m$

.3 جدوا أربع ثلاثيات من التعابير الجبرية المتساوية.

$4a + 4a + 4a$	$4 \cdot 3a$	$3a + 4a$	$3a + 4$
$3 \cdot (a + 1) + a$	$4 \cdot 3a - 5a$	$a \cdot 3 + 4$	$2 \cdot (2a + 1) + 1$
$4 + 3a$	$2 \cdot 2a + 3a$	$3 + 4a$	$12a$

.4 اكتبوا خمسة تعابير جبرية تساوي التعبير الجبري $1 + 6(x + 3) + 2x$

.5 بسِّطوا التعابير الجبرية.

أ. $2x + 3x + 18 + 7$ ج. $5x - 2x + 3 + 7 + 6$ هـ. $2\frac{1}{2} + 5x + 1 + 2x$

ب. $8 + 6x + 5x + 2$ د. $3 - 2 + 15 + 3x + x$ و. $12x - 2x + 7 + 6$

نفكر بـ...

6. أمامكم تعابير جبرية: $m + 3(m + 2) - 6$ $\quad 4(m + 1) - 1$ $\quad 4(m + 1) - 3$ $\quad 4(m + 2) - 6$

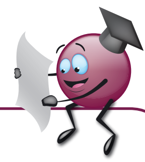
m يمثّل عددًا طبيعيًا.

أ. بسِّطوا التعابير الجبرية المعطاة.

ب. جدوا التعبير الجبري الذي يصف عددًا يقسم على 4.

ج. جدوا التعبير الجبري الذي يصف عددًا زوجيًا **لا يقسم** على 4.

د. جدوا لكل تعبير جبري الباقي بعد تقسيمه على 4 .



نبسِّط تعابير جبرية لأهداف مختلفة.

- لتمييز تعابير جبرية متساوية.

مثال: التعابير الجبرية الآتية متساوية. $2x + 3x + 5$, $5(x + 1)$, $5 + 7x - 2x$

يمكن أن نرى ذلك بمساعدة التبسيط، جميعها تساوي $5x + 5$

- لبحث صفات

مثال: التعبير الجبري $a + 1 + 3a$ (a عدد طبيعي) يقسم على 4 والباقي 1.

من الأسهل أن نرى ذلك في التعبير الجبري الناتج بعد التبسيط: $4a + 1$

مجموعة مهام

1. بسِّطوا.

أ. $5x - 4x$

ب. $18 - 8 + 2x$

ج. $6x - x$

د. $5x - 2x + 4 + 3$

هـ. $2x - 2x + 5$

و. $6x + 2x + 5 + 3$

ز. $3 x \cdot 2$

ح. $4 + 2 x \cdot 5$

ط. $2(3 + x) + 6$

2. بسِّطوا.

أ. $2 \cdot 3 x$

ب. $1 + 2x + 4$

ج. $1 + 2(4 + x)$

د. $3x + 4x - 5x$

هـ. $12 - 5 + 3x$

و. $15 + 7x + 5 + 5x$

ز. $3x + 2(5 + x)$

ح. $3(x + 1) + 3x$

ط. $9 + 2(4 - x)$

3. بسِّطوا.

أ. $\frac{1}{2}\cdot 4x$
ب. $1+2x+\frac{1}{3}$
ج. $3x+5+2x+4+x$
د. $\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{4}x$
هـ. $\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{4}x$
و. $\frac{1}{2}(x+2)+\frac{1}{2}x$

4. بسِّطوا.

أ. $3-2+3x+5+x$
ب. $\frac{1}{2}(4x+3)+\frac{1}{4}x$
ج. $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(6x+12)+\frac{1}{6}$
د. $0.6(5+2y)+0.1y+0.2$
هـ. $7x+(y+2x)+9y$
و. $3(0.4x+0.2y)+4(6y+0.3x)$

5. أمامكم تعابير جبرية، أي منها تساوي التعبير الجبري : $2k+3k+k$؟

$6k$ $5k$ $5+k$ $(2+3+1)\cdot k$ $k+k+k+k+k+k$ $3k+3k$

6. أمامكم تعبيران جبريان، اكتبوا لكل واحد ثلاثة تعابير متساوية أ. $3k+k+k$ ب. $3k+1+k$

7. أمامكم تعابير جبرية، اكتبوا لكل واحد منها ثلاثة تعابير جبرية متساوية.

أ. $5a+10$
ب. $5a+8$
ج. $a+2a$
د. $1-a$

8. أمامكم تعابير جبرية، اكتبوا لكل واحد منها ثلاثة تعابير جبرية متساوية.

أ. $\frac{2}{3}x$
ب. $2x+3$
ج. x
د. 7

9. أمامكم تعابير جبرية، أي منها يصف عددًا زوجيًا (n عدد طبيعي)؟

أ. $n+1$
ب. $2n+1$
ج. $n+2$
د. $2n$

10. أمامكم تعابير جبرية، أي منها يصف عددًا زوجيًا (n عدد طبيعي)؟ اشرحوا. إذا كانت حاجة بسِّطوا.

أ. $5n-4n+1$
ب. $4-3+n+n$
ج. $2(n+1)-1$
د. $2(n+1)$

11. ابنوا تعبيرًا جبريًا يصف أعدادًا تقسم على 3 (دون الباقي).

الدرس الثالث: نبني تعابير جبرية متساوية

نبني تعابير جبرية ونعوِّض

طلب المعلم من التلاميذ أن يبنوا تعابير جبرية بمساعدة العدد 2، المتغير x وعمليتَي الجمع والضرب.
اقترحوا تعابير جبرية. افحصوا ما إذا كانت متساوية .

نميِّز تعابير جبرية متساوية.

1. انسخوا واكتبوا عمليات حسابية وأقواسًا لبناء تعابير جبرية.

x ○ 2 ○ 2	x ○ 2 ○ 2	x ○ 2 ○ 2	x ○ 2 ○ 2
x ○ x ○ 2	x ○ x ○ 2	x ○ x ○ 2	x ○ x ○ 2

2. سجَّل **نديم** التعابير الجبرية الآتية:

$x + 2 + 2$	$x \cdot 2 + 2$	$x \cdot 2 \cdot 2$	$x + 2 \cdot 2$
$x + x + 2$	$x \cdot x + 2$	$x \cdot x \cdot 2$	$x + x \cdot 2$

أ. هل يوجد تعابير جبرية متساوية من بين التعابير التي سجَّلها **نديم**؟ إذا كانت الإجابة نعم، سجِّلوها.

ب. جدوا من بين التعابير الجبرية، التعبير الجبري الذي يساوي $x^2 + 2$.

ج. أضيفوا أقواسًا إلى التعابير الجبرية التي سجَّلها **نديم**، لكي تحصلوا على تعابير مختلفة. إذا كان الأمر غير ممكن، فاشرحوا.

3. أمامكم أربعة تعابير جبرية: $x + x \cdot 2$ $x + 2 \cdot 2$ $x + x + 2$ $x + 2 + 2$

أ. عوِّضوا 3 بدل x في كل تعبير جبري. كم نتيجة مختلفة حصلتم؟

ب. عوِّضوا 5 بدل x في كل تعبير جبري. كم نتيجة مختلفة حصلتم؟

ج. عوِّضوا 2 بدل x في كل تعبير جبري. اشرحوا، لماذا توجد نتائج مختلفة أقل؟

4. اكتبوا في كل بند ثلاثة تعابير تساوي التعبير المعطى.

أ. $3(x+2)$ ب. $3(9x+4)$ ج. $\frac{1}{2}\cdot 10x + \frac{1}{5}\cdot 10x$ د. $\frac{1}{7}(21+14x)$

نفكر بـ...

5. أمامكم تعابير جبرية: $5a+7$ $10+2(a+3)+a$ $5(a+4)$

أ. عوِّضوا العدد 4 (بدل a) في التعابير الجبرية.

ب. عوِّضوا العدد $\frac{1}{2}$ (بدل a) في التعابير الجبرية.

ج. أي تعبير جبري من الأفضل أن نبسِّطه قبل التعويض؟ لماذا؟ بسِّطوه.

مجموعة مهام

1. انسخوا وأكملوا التعابير الجبرية، بحيث تساوي التعبير الجبري $3x + 2$.

أ. $3x + \square$ ب. $x + 2 + \square$ ج. $2 + 2x + \square$

2. أ. انسخوا وأكملوا التعابير الجبرية، بحيث تساوي التعبير الجبري $12x$.

$\square + 6x$ $\square \cdot 6x$ $\square - 6x$

ب. انسخوا وأكملوا التعابير الجبرية، بحيث تساوي التعبير الجبري $30x$.

$\square - 5x$ $\square + 5x$ $\square \cdot 5x$

3. في كل بند، استعملوا $3x$، 3، x وعمليات حسابية، لكي تكتبوا تعبيرًا جبريًا مساويًا لكل واحد من التعابير الجبرية الآتية.

أ. $6x$ ب. $4x + 3$ ج. $10x$ د. $3x^2 + 3$

4. اكتبوا في كل بند تعبيرًا جبريًا يساوي التعبير الجبري $14x^2$ **بطريقتين** مختلفتين.

أ. كمجموع تعبيرين.

ب. كمجموع ثلاثة تعابير جبرية.

ج. كفرق بين تعبيرين جبريين.

د. كحاصل ضرب تعبيرين جبريين.

5. بسِّطوا. جدوا تعابير جبرية متساوية.

أ. $3 \cdot 2 \cdot a$ ج. $10a + 5 + 5a$

ب. $3a + 2a + a$ د. $5a + 5 + 5 \cdot 2a$

6. بسِّطوا. جدوا تعابير جبرية متساوية.

أ. $2p \cdot 10$ ج. $8p + p \cdot 2$ هـ. $p \cdot 5p$

ب. $2(p + 1) + 3$ د. $5(p + p)$ و. $3p - p + 5$

7. عوِّضوا في التعبير الجبري $3a + 1$ الأعداد الآتية (بدل a) واحسبوا.

أ. 2 ب. 10 ج. 100 د. 1000

8. عوِّضوا في كل تعبير جبري $a = 0$, $a = 4$, $a = 10$ واحسبوا.

أ. $20 + a$ ب. $20 - a$ ج. $2(10 - a)$

9. أمامكم التعبير الجبري: $10 + 5a + 2(5 + a)$.

أ. بسِّطوا.

ب. عوِّضوا (بدل a) الأعداد: 1 , 10 , $\frac{1}{7}$ واحسبوا.

ج. ماذا تعوضون (بدل a)، لكي تحصلوا على 20؟

10. أمامكم التعبير الجبري: $10 + 2(a - 5)$.

أ. عوِّضوا (بدل a) كل عدد من الأعداد الآتية: 15 , 6 , 55 , $5\frac{1}{2}$ واحسبوا.

ب. عوِّضوا عددًا (بدل a) ، بحيث تحصلون على 10.

ج. عوِّضوا عددًا (بدل a) ، بحيث تحصلون على 20.

11. في كل بند، جدوا أعدادًا إذا عوضناها (بدل a) في التعبيرين الجبريين، فإننا نحصل على نفس النتيجة.

أ. $2(a + 4) + 1$, $3a + 4 + 1 + 1$ ب. $5a$, $20a$

اشرحوا، كيف وجدتم الإجابة؟ فصِّلوا اعتباراتكم.

12. أمامكم تعابير جبرية: $3x + 7x$, $3 + 7x$, $3x + 7$, x

أ. نعوِّض 0 (بدل x) في كل واحد من التعابير الجبرية. في أي تعبير جبري تحصلون على النتيجة الكبرى؟

ب. نعوِّض 10 (بدل x) في كل واحد من التعابير الجبرية. في أي تعبير جبري تحصلون على النتيجة الكبرى؟

مهام إضافية في الموقع (משימות נוספות באתר)

الدرس الرابع: قانونية في متواليات أعداد

أمامكم ثلاث متواليات أعداد:

متوالية 3	متوالية 2	متوالية 1
5, 9, 13, 17, 21,...	7, 12, 17, 22, 27,...	5, 10, 15, 20, 25,...

في كل متوالية، خمِّنوا العدد التالي والعدد الذي يقع في المكان العاشر.
هل تستطيعون أن تعرفوا العدد الذي يقع في المكان الـ 101 في كل متوالية؟

نبحث متواليات أعداد ونجد قانونية.

1. نتمعَّن في المتوالية الأولى 5, 10, 15, 20, 25,...

أ. قالت **سميرة** : سهل جدًا أن نجد العدد التالي. في كل مرة نضيف 5.

قالت **سعاد**: كل عدد في المتوالية يساوي حاصل ضرب العدد 5 بالعدد الذي يصف مكانه في المتوالية.

تناقشوا في اقتراحهما.

بأية طريقة من الأسهل أن نجد العدد الذي يقع في المكان الـ 6؟

بأية طريقة من الأسهل أن نجد العدد الذي يقع في المكان الـ 117؟

ب. اكتبوا تعبيرًا جبريًا للعدد الذي يقع في المكان n.
اشرحوا، لماذا يمكن تعويض أعداد طبيعية فقط بدل n؟

ج. عوِّضوا في التعبير الجبري الذي سجَّلتموه في بند ب ، n = 311. ماذا حصلتم؟
صوغوا بمساعدة كلمات: **العدد ...** يقع **في المكان ...**

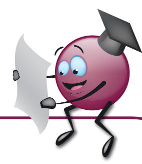
2. نتمعَّن في المتوالية الثانية 7, 12, 17, 22, 27,...

أ. في هذه المتوالية، كل عدد أكبر بـ 5 من العدد السابق له. هل توجد هنا مضاعفات للعدد 5 أيضًا؟
إذا كانت الإجابة نعم، فاشرحوا. إذا كانت الإجابة كلا، فما هو الباقي عندما نقسِّم على 5؟

ب. ما هو العدد في المكان الـ 6 في المتوالية، في المكان الـ 10، في المكان الـ 100؟ اشرحوا، كيف وجدتم؟

ج. اكتبوا تعبيرًا جبريًا يمثِّل عددًا في المتوالية في المكان n في المتوالية. اشرحوا، لماذا تفكرون أن إجاباتكم صحيحة؟

د. هل سجَّلتم أحد التعابير الجبرية الآتية: 5n , 7 + 5n , 2 + 5n , 5n + 2 ؟
هل جميع التعابير الجبرية مناسبة؟ اشرحوا.



أحيانًا في متوالية أعداد، التعبير الجبري يمثِّل العدد في المكان n.
مثال: في المتوالية ... ,17 ,12 ,7 ، التعبير الجبري 5n + 2 يمثِّل العدد في المكان n ، هذا يعني قانونية المتوالية.

.3 نتمعَّن في المتوالية الثالثة ...,5, 9, 13, 17, 21

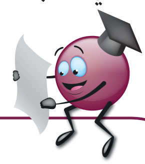
أ. هل الفرق بين كل عددين متجاورين في المتوالية هو ثابت؟ إذا كانت الإجابة نعم فما هو؟ إذا كلا، فأعطوا مثالًا.

ب. أمامكم متواليات، في أي منها الفرق ثابت بين كل عددين متجاورين؟ اكتبوا تعبيرًا جبريًا يمثِّل قانونية هذه المتوالية.

5, 10, 15, ...   4, 8, 12, ...   3, 6, 9, ...

ج. اكتبوا تعبيرًا جبريًا يمثِّل العدد في المكان n بحسب قانونية المتوالية المعطاة في بداية المهمة.

.4 في كل بند، اكتبوا متوالية مناسبة للتعبير الجبري: أ. $7n$ ب. $1 + 2n$



جميع المتواليات في هذا الدرس هي متواليات مع **فرق ثابت.**
هذا يعني أن **الفرق** بين كل عددين متتالين في المتوالية هو **ثابت.**
في الرياضيات، نسمِّي هذه المتواليات "متواليات حسابية".
مثال: في المتوالية ... ,9 ,7 ,5 ,3   الفرق بين كل عددين متتاليين هو 2.

نفكر بـ...

.5 جدوا متوالية أعداد لا يوجد فيها فرق ثابت.

جميع متواليات الأعداد التي تعرفتم عليها في هذا الدرس هي متواليات مع فرق ثابت، وهذا يعني أن الفرق بين كل عددين متتاليين هو فرق ثابت، لكن ليس لجميع المتواليات هذه القانونية.

متوالية مثيرة الاهتمام ذات قانونية أخرى هي **متوالية فيبوناتشي:** ... ,1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

تمَّ بحث هذه المتوالية من ناحية رياضية قبل حوالي 800 سنة وقد بحثها العالِم الرياضي الإيطالي ليئوناردو فيبوناتشي وسُمِّيت على اسمه. في متوالية فيبوناتشي، كل عدد (ابتداءً من العدد الثالث) هو مجموع العددين السابقين له. جدوا الأعداد الثلاثة التالية في المتوالية؟ بأية طريقة حسبتم ذلك؟ يوجد لمتوالية فيبوناتشي صفات رياضية كثيرة، لكن إضافةً إلى ذلك، تتطور وتتكاثر حيوانات ونباتات معينة بحسب قانونية فيبوناتشي، مثلًا: مبنى قوقعة، حلزونات، أكواز الصنوبر، ترتيب أوراق وفروع نباتات على الساق، مبنى "شجرة النسب" لتكاثر النحل وغير ذلك.

مجموعة مهام

1. أمامكم متوالية: 3, 6, 9, 12,...

أ. أكملوا المتوالية (اكتبوا ثلاثة أعداد أخرى).

ب. جدوا العدد الذي يقع في المكان الـ 10.

ج. أمامكم تعابير جبرية. أي تعبير جبري مناسب للعدد الذي يقع في المكان n، في المتوالية: $3 + n$ $\quad 3 \cdot n$ $\quad n + 3$

د. في أي مكان في المتوالية يقع العدد 60؟

2. أمامكم المتوالية: 8, 13, 18, 23,...

أ. جدوا العدد الذي يقع في المكان الـ 5 في المتوالية، المكان الـ 10، المكان الـ 100.

ب. أمامكم تعابير جبرية. أي تعبير جبري مناسب للعدد الذي يقع في المكان n، في المتوالية: $8n$ $\quad 5n$ $\quad 5n+3$ $\quad 8n-3$

ج. في أي مكان في المتوالية يقع العدد 63؟

د. اختاروا تعبيرًا جبريًا (من بند ب) غير مناسب للمتوالية. ابنوا متوالية أعداد مناسبة للتعبير الجبري الذي اخترتموه.

3. أمامكم متواليات: 5, 8, 11, ... $\quad$ 4, 7, 10 ... $\quad$ 3, 6, 9,...

أ. أكملوا المتواليات (اكتبوا عددين إضافيين في كل متوالية).

ب. أمامكم تعابير جبرية. اختاروا تعبيرًا جبريًا مناسبًا للعدد الذي يقع في المكان n، في كل متوالية:
$3n+2$ $\quad 3n$ $\quad 3n+1$

ج. في أي متوالية تقسم جميع الأعداد على 3؟

د. في أي متوالية لجميع الأعداد يوجد باقي 1 عندما نقسّمها على 3؟

هـ. في أي متوالية لجميع الأعداد يوجد باقي 2 عندما نقسّمها على 3؟

و. في أي متوالية وفي أي مكان يقع العدد 62، العدد 63، العدد 64؟

4. أمامكم متواليات: 10, 17, 24, ... $\quad$ 7, 14, 21 ... $\quad$ 13, 20, 27,...

أ. اكتبوا ثلاثة أعداد أخرى في كل متوالية.

ب. اكتبوا تعبيرًا جبريًا لقانونية كل متوالية.

ج. جدوا في كل متوالية الباقي عندما نقسّم كل عدد من أعداد المتوالية على 7.

د. اكتبوا الأعداد الثلاثة الأولى في متوالية يكون فيها الباقي 5 عندما نقسّم كل عدد من أعدادها على 7.
اكتبوا تعبيرًا جبريًا مناسبًا لقانونية المتوالية التي بنيتموها.

هـ. في أي متوالية وفي أي مكان يقع العدد 73؟ جدوا الأعداد التي تقع في هذا المكان، في المتواليات الأُخرى.

الدرس الخامس: أعداد متتالية

تعابير جبرية متساوية والتحقق منها

أمامكم ثلاثيات أعداد متتالية:

$1, 2, 3$ $\quad$ $7, 8, 9$ $\quad$ $49, 50, 51$

احسبوا مجموع كل ثلاثة أعداد متتالية.

هل يمكن أن نخمن الأعداد الثلاثة بناءً على المجموع؟

نجد علاقات في ثلاثيات أعداد متتالية ونسجِّل تعابير جبرية لهذه العلاقات.

1. أ. انسخوا، أكملوا وجدوا صفة مشتركة لمجموع ثلاثة أعداد متتالية.

$100 + 101 + 102 =$

$512 + 513 + 514 =$

$1000 + 1001 + 1002 =$

$9,999 + 10,000 + 10,001 =$

ب. أكملوا أعدادًا متتالية. عبِّروا، إذا كان الأمر ممكنًا، عن مجموعها من خلال تمرين ضرب بـ 3.

$405 + \square + 407 =$

$\square + \square + 541 = 3 \cdot 540$

$\square + \square + \square = 3 \cdot 2000$

$\square + \square + \square = 3 \cdot 201$

2. أ. سجَّلت **سوسن، منال وسماح** التعابير الجبرية الآتية لمجموع ثلاثة أعداد متتالية.

سجَّلت **سوسن:** $a + b + c$ (a,b,c أعداد طبيعية)

سجَّلت **منال:** $(a + 1) + a + (a - 1)$ (a عدد طبيعي أكبر من 1)

سجَّلت **سماح:** $a + (a + 1) + (a + 2)$ (a عدد طبيعي)

اشرحوا بمساعدة أحد التعابير الصفة الآتية: مجموع كل ثلاثة أعداد متتالية يقسم على 3.

ب. لماذا لا يساعد التعبير الجبري الذي سجَّلته سوسن في شرح ما إذا تتحقق الصفة التي ذُكرت في البند السابق؟

ج. ماذا يمثِّل المتغير **a** في التعبير الجبري لمنال؟ وماذا يمثِّل في التعبير الجبري لسماح؟

نفكر بـ...

3. سجَّل **سامي وزياد** تعبيرين جبريين مختلفين لوصف مجموع ثلاثة أعداد متتالية (a عدد طبيعي).

سجَّل **سامي:** $a + a + 1 + a + 2$ $\quad$ سجَّل **زياد:** $a + 1 + a + a - 1$

قالت **عزيزة:** يصف التعبيران الجبريان مجموع ثلاثة أعداد متتالية، لذا فهما متساويان.

أ. هل التعبيران الجبريان متساويان؟ اشرحوا.

ب. ماذا تجيبون عزيزة؟

التعابير الجبرية التي تمثِّل **نفس المسألة الكلامية** تكون متساوية إذا كان المتغيِّر (الحرف) يمثِّل **نفس الشيء (المقدار).**

مثال **I:** التعبير الجبري لسامي والتعبير الجبري لزياد **غير متساويين،** لأنه في تعبير زياد، a يمثِّل العدد الذي يقع في الوسط، أما في تعبير سامي، a يمثِّل العدد الأول.

مثال **II:** التعبير الجبري $(a - 1) + a + (a + 1)$ والتعبير الجبري $3a$ متساويان.

يصف التعبيران الجبريان مجموع ثلاثة أعداد متتالية فيهما a هو العدد الذي يقع في الوسط.

مجموعة مهام

1. أ. a يمثِّل العدد الأول من بين الأعداد الثلاثة المتتالية. ماذ يُمثِّل التعبيران الجبريان $a + 1$ ، $a + 2$؟

ب. اكتبوا تعبيرًا جبريًا لمجموع الأعداد الثلاثة.

ج. جدوا العدد الأوسط ومجموع الأعداد الثلاثة عندما يكون:

$a = 10$ $\quad a = 2001$ $\quad a = 23$

د. كم ضعفًا مجموع الأعداد أكبر من العدد الأوسط؟

2. قال آدم : في كل ثلاثية أعداد متتالية، حاصل ضرب العدد الأوسط بـ 2 يساوي مجموع العددين التالي والسابق.

مثال: في ثلاثية الأعداد $9, 10, 11$ نحصل على $10 \cdot 2 = 11 + 9$

أ. افحصوا، هل تتحقق هذه الصفة في ثلاثيات أعداد أخرى؟

ب. **a** يمثِّل العدد الأوسط، $a - 1$ يمثِّل العدد السابق. اكتبوا تعبيرًا جبريًا للعدد التالي.

ج. اكتبوا تعبيرًا جبريًا لمجموع العددين التالي والسابق. بسِّطوا.
اكتبوا تعبيرًا جبريًا لِضعْفَي العدد الأوسط.

3. وجد فؤاد صفة لثلاثة أعداد متتالية:

"العدد الأوسط من بين ثلاثة أعداد متتالية هو معدل العددين المجاورين له"

مثال: العدد الأوسط هو 5, $\frac{4 + 6}{2} = 5$

أ. افحصوا، هل تتحقق الصفة التي قالها فؤاد في ثلاثيات أعداد أخرى فيها أعداد متتالية؟

ب. هل هذه العلاقة صحيحة لكل ثلاثة أعداد متتالية؟ افحصوا بمساعدة تعابير جبرية.

ج. دون أن تحسبوا، جدوا معدل العددين 1793 وَ 1795.

.4 أمامكم متوالية، الفرق فيها ثابت مقداره 5: ... ,23 ,18 ,13 ,8 ,3

أ. جدوا علاقات بين ثلاثة أعداد متتالية في المتوالية (ثلاثة أعداد مسجَّلة الواحد تلو الآخر في المتوالية).

ب. اكتبوا تعابير جبرية تمثِّل ثلاثة أعداد متتالية في متوالية فيها الفرق ثابت ومقداره 5.
ماذا يمثِّل a ؟ افحصوا العلاقات التي وجدتموها في بند أ.

ج. اكتبوا تعبيرًا جبريًا لمجموع عددين "مجاورين" لعدد في المتوالية، ثم بسِّطوه إلى أبسط صورة.
قارنوا بين تعبير العدد الأوسط وبين تعبير مجموع العددين "المجاورين".
ما هي العلاقة التي وجدتموها؟ هل هي صحيحة دائمًا؟ لماذا؟

.5 أمامكم متوالية، الفرق فيها ثابت مقداره 3: ...,17 ,14 ,11 ,8 ,5
في كل بند، جدوا العبارة الصحيحة. اشرحوا إجاباتكم بالكلمات وبتعابير جبرية.

مثال: مجموع عددين متتاليين في المتوالية يُمثِّل عدد فردي.

تعليل: مجموع عددين متتاليين في هذه المتوالية هو: $a + (a + 3) = 2a + 3$

التعبير الجبري $2a + 3$ يعبِّر عن عدد فردي، لأن $2a$ هو زوجي دائمًا وعندما نضيف إليه 3 ،
فإننا نحصل على عدد فردي دائمًا.

أ. مجموع ثلاثة أعداد متتالية في المتوالية:
- هو من مضاعفات الـ 3 دائمًا.
- ليس من مضاعفات الـ 3.
- أحيانًا من مضاعفات الـ 3 وأحيانًا ليس من مضاعفات الـ 3.

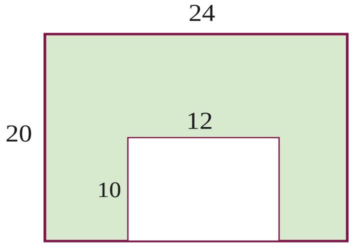
ب. مجموع خمسة أعداد متتالية في المتوالية:
- هو من مضاعفات الـ 5 دائمًا.
- ليس من مضاعفات الـ 5.
- أحيانًا من مضاعفات الـ 5 وأحيانًا ليس من مضاعفات الـ 5.

ج. مجموع أربعة أعداد متتالية في المتوالية:
- هو من مضاعفات الـ 4 دائمًا.
- ليس من مضاعفات الـ 4.
- أحيانًا من مضاعفات الـ 4 وأحيانًا ليس من مضاعفات الـ 4.

د. مجموع عدد فردي من الأعداد المتتالية:
- هو حاصل ضرب العدد الأوسط بـ 3 دائمًا.
- هو حاصل ضرب العدد الأوسط بـ 5 دائمًا.
- هو حاصل ضرب العدد الأوسط بعدد المضافات.

مساحات

1. أمامكم رسم تخطيطي لقسيمة أرض فيها بيت ومن حوله عشب أخضر (القياسات بالأمتار وجميع الزوايا قائمة).



أ. ما هي مساحة البيت؟

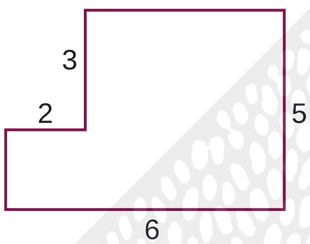
ب. قال **رائد**: أطوال أضلاع البيت هي نِصف أطوال أضلاع قسيمة الأرض، لذا مساحة قسيمة الأرض أكبر بضعفين من مساحة البيت.

هل ما قاله رائد صحيح؟ اشرحوا.

ج. كم ضعفًا مساحة قسيمة الأرض أكبر من مساحة البيت؟

د. كم ضعفًا مساحة العشب الأخضر أكبر من مساحة البيت؟

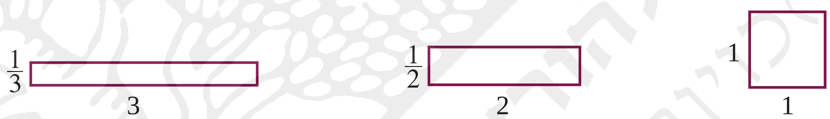
2. أمامكم شكل (القياسات بالسم وجميع الزوايا قائمة):



أ. احسبوا مساحة الشكل.

ب. جدوا طريقة إضافية لحساب مساحة الشكل.

3. أمامكم ثلاثة مستطيلات (القياسات بالسم).



أ. احسبوا مساحات المستطيلات.

ب. جدوا صفة مشتركة للمستطيلات الثلاثة. اكتبوا قياسات مستطيلين آخرين يحققان هذه الصفة.

ج. إذا كان طول أحد الأضلاع في مستطيل كهذا هو 1 سم، فكم يكون طول الضلع الثاني؟

د. قال **أيوب**: من بين جميع هذه المستطيلات، فإن المربع هو ذو المحيط الأصغر. حاولوا أن تشرحوا، لماذا قال ذلك؟

4. أكملوا.

أ. $1 \cdot \square = 1$ ب. $\frac{1}{2} \cdot \square = 1$ ج. $\frac{2}{5} \cdot \square = 1$ د. $3 \cdot \square = 1$