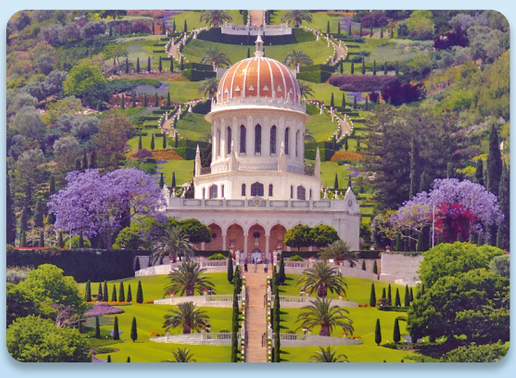
الوحدة الرابعة والثلاثون: الأسطوانة

الدرس الأوّل: أجسام دورانيّة

جدوا أجسامًا في صور البنايات. ما هو المشترك لجميع الأجسام التي وجدتموها؟

برج الماء وبناية التاريخ، معهد وايزمن

مفاعل التكرير، حيفا



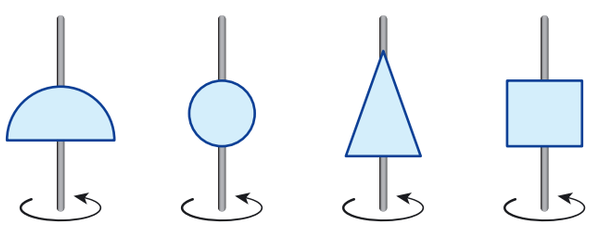
معبد البهائيون، حيفا

بناية هوليدي إين، أشكلون

سنتعرّف على أجسام دوارنيّة بشكل عامّ وعلى الأسطوانات بشكل خاصّ.

1. صفوا الجسم الذي يشبه الجسم الناتج من دوران كلّ عَلم، من الأعلام الآتية، حول المحور.

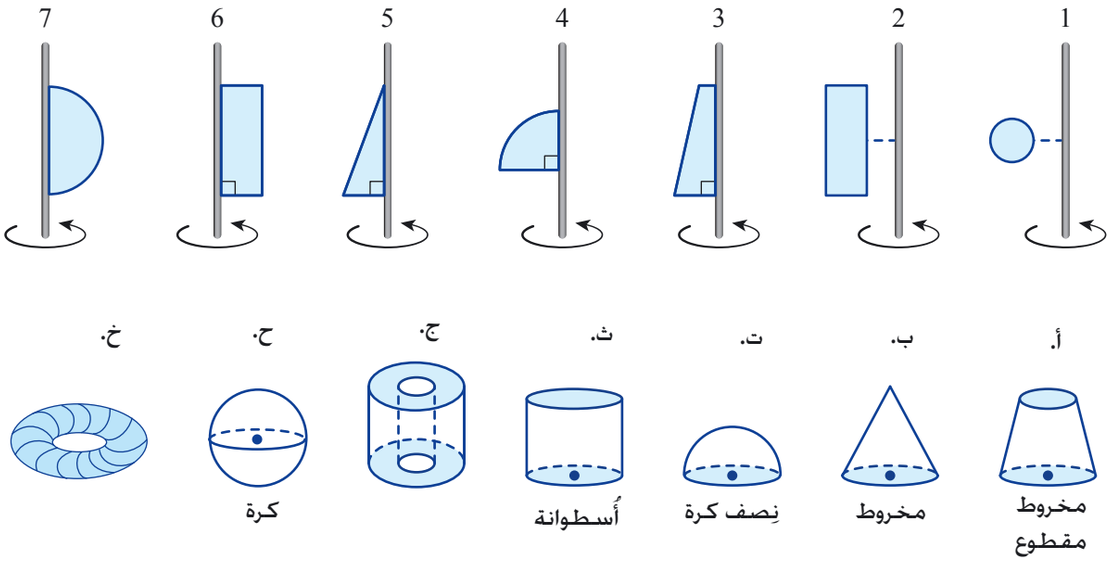
أ. ب. ت. ث.



عندما يدور شكل مستوي حول محور يُنْتِج **جسم دورانيّ**.

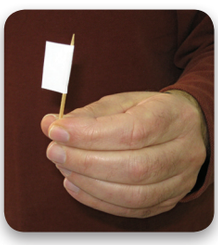
مثال: الجسم الذي نَتَج، في مهمة 1، من دوران مثلّث متساوي الساقين حول الارتفاع للقاعدة هو **مخروط**.

2. أمامكم رسومات أشكال، لائموا كلّ دوران شكل للجسم الناتج بعد الدوران.



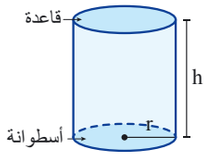
هنالك أشكال أجسام دورانيّة كثيرة في صناعة الفخار (مثل: الجرار، المزهريات، الصحون والشمعدانات). يضع الفخاري كتلة من طين الصلصال الرطب على عجل يدور (حجر) ويصممه بيديه (انظروا الصور). تمرّ الأدوات التي صُممت من مادّة رطبة بعملية الطلاء و"الحرق" في أفران خاصة تُنتج حرارة عالية جدًّا (800 حتّى 1,200 درجة سلزيوس).

3. قصّوا قطعة ورقية مستطيلة الشكل، ثم ألصقوها على مسواك كالعلَم.
دوروا المسواك كمحور.
أيّ جسم يَنْتُج بواسطة الدوران؟

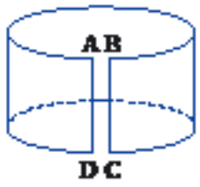


يُنْتِج دوران المستطيل حول أحد أضلاعه جسمًا يشبه **أسطوانة قائمة**.
الضلع الذي يقع على محور الدوران هو ارتفاع الأسطوانة، والضلع المجاور له هو نِصف قُطر قاعدة الأسطوانة.
يوجد للأسطوانة القائمة قاعدتان دائريّتان متطابقتان وغلاف.
في الرسمة: r هو طول نِصف قُطر القاعدة، وَ h طول ارتفاع الأسطوانة
$(h > 0 \ , \ r > 0)$.

نتناول في هذه الوحدة **أسطوانات قائمة**.

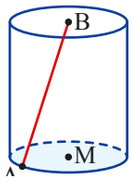


4. خذوا ورقة من البريستول مستطيلة الشكل وابنوا منها غلاف الأسطوانة.

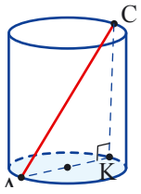


5. طول نِصف قُطر قاعدة الأسطوانة، في كلّ بند، هو 4 سم وطول ارتفاع الأسطوانة 8 سم. (أُعِدَّت الرسمتان للتوضيح).
احسبوا طول القطعة **الحمراء** (ارسموا المثلّثات، سجّلوا المعطيات واحسبوا).

أ.

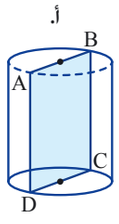


ب.



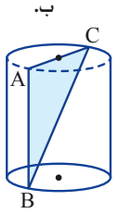
6. حدّدوا، في كلّ بند، الشكل الملون (استعينوا بغلاف الأسطوانة الذي بنيتموه من الورقة).

أ.



AB وَ CD هما قطران متوازيان

ب.

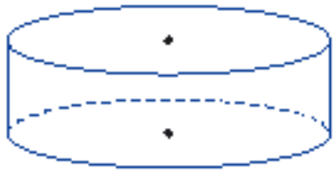


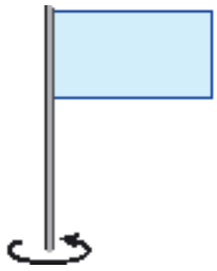
AB ارتفاع الأسطوانة

مجموعة مهامّ

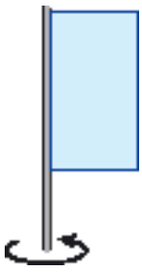
1. أ. ألصقوا قطعة ورقيّة مستطيلة الشكل على مسواك، دوروا المسواك حول ذاته. أنتجتم شكلًا يشبه الأسطوانة.

ب. سجّلوا r وَ h في الأماكن المناسبة في رسمة العَلم وفي رسمة الأسطوانة.
(r > 0، طول نِصف القُطر، h > 0، طول ارتفاع الأسطوانة).



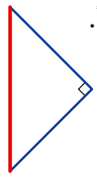


ت. ألصقوا قطعة ورقيّة مستطيلة الشكل كما يظهر في الرسمة ودوروها.
سجّلوا r على قطعة نِصف قُطر قاعدة الشكل الذي يشبه الأسطوانة وَ h على القطعة التي تمثّل الارتفاع.

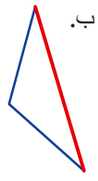


2. صفوا أو ارسموا، في كلّ بند، الجسم الناتج من دوران الشكل حول القطعة الحمراء.
(جميع المثلّثات في البنود أ - ج والمثلّث في بند خ هي مثلّثات متساوية الساقين).
افحصوا إجاباتكم: انسخوا الرسومات على ورقة شفّافة، قصوها، ألصقوها على مسواك ودورها.

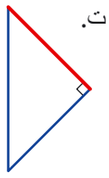
أ.



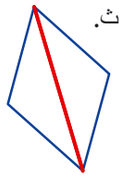
ب.



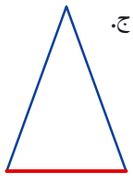
ت.



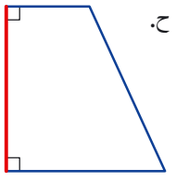
ث.



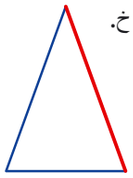
ج.



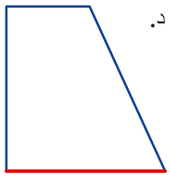
ح.



خ.



د.



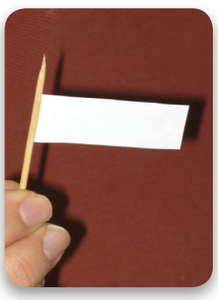
3. أمامكم قِطع من لعبة الشطرنج.

أيّ قِطع منها أجسام دورانيّة؟

اختاروا جسمًا دورانيًّا من بين هذه القطع، ثم ارسموا العَلم الذي ينتج حوله هذا الجسم.

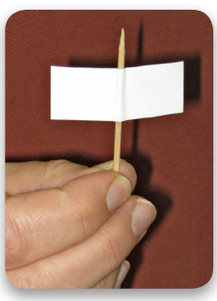
4. أ. دوروا مستطيلًا كما يظهر في الصورة.

أيّ جسم ينتج؟



ب. دوروا مستطيلًا كما يظهر في الصورة.

أيّ جسم ينتج؟



ت. هل يتطابق الجسمان اللذان نتجا في البندين أ وَ ب؟ اشرحوا.

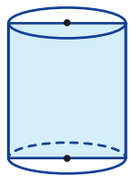
5. هل الإيجلو (البيت من جليد) هو جسم دورانيّ؟

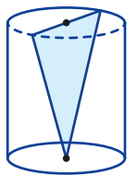
إذا كانت الإجابة نعم فارسموا العَلم الذي ينتج حوله هذا الجسم. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا لماذا؟

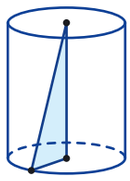
معنى كلمة إيجلو بلغة الإسكيمو هو بيت من جليد. يقضي الإسكيمو فصل الشتاء في الإيجلو، أما في فصل الصيف فهو يعيش في خيمة مصنوعة من جلد. الإيجلو مبني من كُتل جليديّه وشكله دائريّ. هنالك طبقة جليلدية رقيقة في رأس القبة كي تُتيح دخول الضوء. السرير في الإيجلو مصنوع من كُتل جليدية مغطاة بفرو وبجلد. تُستعمل الرفوف المثبتة بالحوائط لتخزين أدوات الطهي، السلاح، أدوات العمل والمصابيح. اشترك جميع الناس، في القرية، في بناء البيت من جليد استعدادًا لفصل الشتاء، أما اليوم فيعيش عدد قليل من الإسكيميون في مثل هذا البيت.

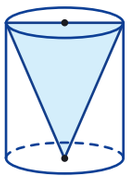
6. تظهر في الصورة ثلاث صوامع (حاويات كبيرة لتخزين الحبوب.).
هل الصومعة جسم دورانيّ؟
إذا كانت الإجابة نعم فارسموا العَلم الذي ينتج حوله هذا الجسم. إذا كانت الإجابة لا فاشرحوا لماذا؟

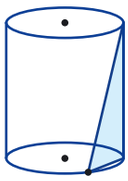
7. حدّدوا، في كلّ بند، الشكل الملوّن (استعينوا بغلاف الأسطوانة الذي بنيتموه من الورقة).

أ.


ب.


ت.


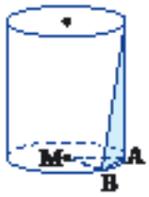
ث.


ج.


أُعِدّت الرسومات في المهام 8 - 10 للتوضيح.

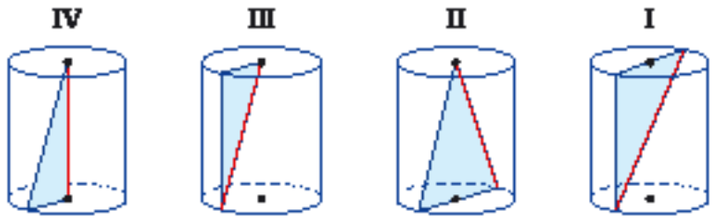
8. معطى طول نِصف قُطر قاعدة أسطوانة 6 سم.
طول ارتفاع الأسطوانة هو 4 سم.
احسبوا أطوال أضلاع المثلّث الملوّن ومساحته.

9. معطى طول نِصف قُطر قاعدة أسطوانة 4 سم.
طول ارتفاع الأسطوانة هو 6 سم.
ΔMAB هو مثلّث متساوي الأضلاع.
احسبوا أطوال أضلاع المثلّث الملوّن ومحيطه.



10. أمامكم رسومات أسطوانات متطابقة. لُوِّن مثلّث في كلّ أسطوانة وأُبرز ضلع واحد فيه.

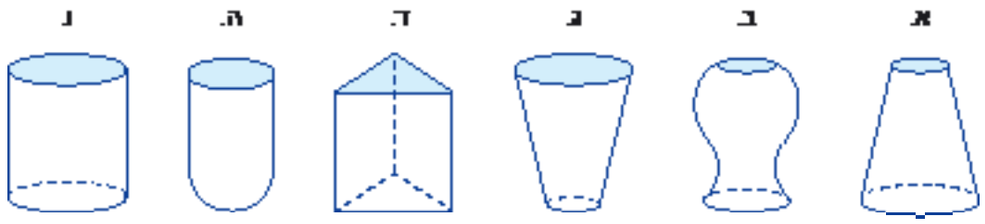
أ. في أيّ أسطوانة الضلع البارز هو الأقصر؟ في أيّ أسطوانة الضلع البارز هو الأطول؟ علّلوا.



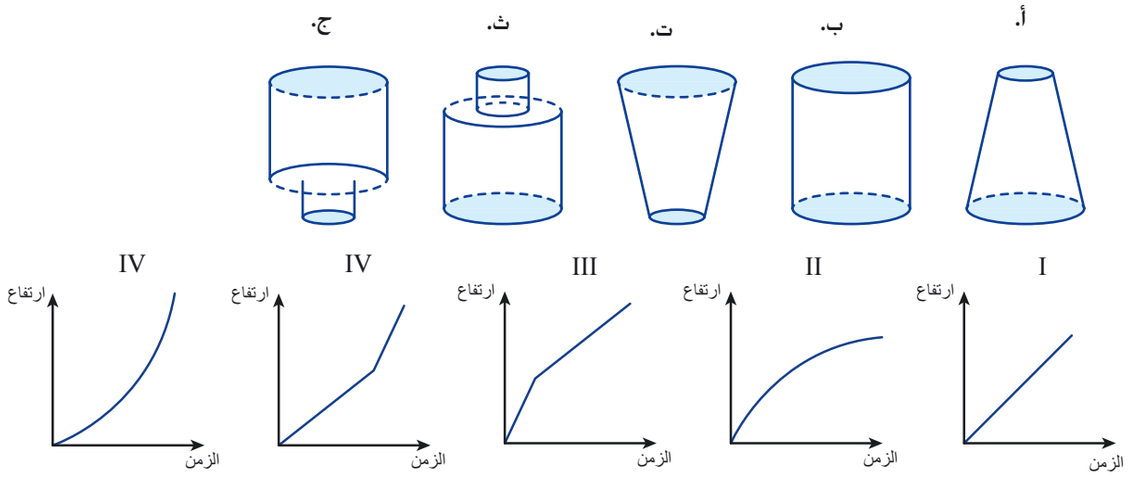
ب. **معطى**: طول نِصف قُطر القاعدة 4 سم وطول ارتفاع الأسطوانة 10 سم.
احسبوا طول الضلع البارز في كلّ مثلث، وافحصوا إجاباتكم في بند أ.

ت. احسبوا مساحة كلّ مثلث.

11. نصب ماءً في كلّ وعاء من الأوعية الآتية بوتيرة ثابتة. اذكروا الأوعية التي يرتفع فيها الماء بوتيرة ثابتة.



12. نصب ماءً في كلّ وعاء من الأوعية الآتية بوتيرة ثابتة.
تصف الرسوم البيانيّة ارتفاع الماء في الأوعية وفقًا لزمن التعبئة.
لائموا كلّ وعاء للرسم البيانيّ المناسب.



الدرس الثاني: حجم الأسطوانة

أمامكم صورتا برجان للماء.
في البرج أ،طول قُطر البركة الأسطوانيّة 12 م، وطول ارتفاعها 10 م.
في البرج ب، طول قُطر البركة الأسطوانيّة، 10 م، وطول ارتفاعها 12 م.
البركتان مليئتان بالماء.
خمّنوا هل كمّيّة الماء متساوية في البركتين؟ اشرحوا.

برج ب

برج أ

نحسب حجم الأسطوانة.

بُرج الماء هو خزان مياه ضخم عالي جدًّا، يُستعمل كجهاز لتزويد الماء لسكان المنطقة المحيطة به. يَنْتُج الضغط المطلوب لتزويد الماء بفضل رفع الماء إلى ارتفاع عالٍ. تستعمل دول كثيرة اليوم مضخات الماء فقط لتزويد السكان بالمياه. هنالك أبراج مياه كثيرة مُزينة بأعمال الطوب الفاخر، بالسياج المغطى بالنباتات، بالرسومات أو بكتابات تدل على اسم البلدة مثل برج قرية جفتون كما يظهر في الصورة.

برج ماء - قرية جفتون

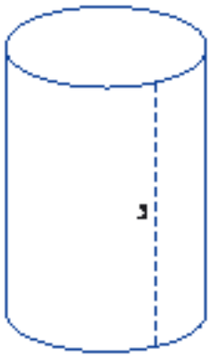
أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية وفي مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

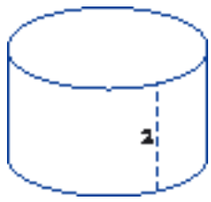
1. سكبوا ماءً في طنجرة أسطوانيّة الشكل.
طول نِصف قُطر الأسطوانة 10 سم.

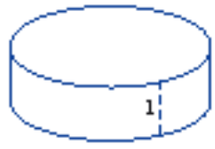
أ. احسبوا مساحة القاعدة. للتذكير: مساحة الدائرة πr^2 $(r > 0$ طول نِصف قُطر.)

ب. ما هي كمّيّة المياه في الطنجرة إذا كان طول ارتفاعها 1 سم؟

ما هي كمّيّة المياه في الطنجرة إذا كان طول ارتفاعها 2 سم؟







ب. ما هي كمّيّة المياه في الطنجرة إذا كان ارتفاعها 13 سم؟

حجم الأسطوانة يساوي حاصل ضرب مساحة القاعدة في طول الارتفاع (كما هو الأمر في المنشور).
$\pi r^2 h$ (r طول نِصف قُطر الأسطوانة وَ h طول ارتفاع الأسطوانة $h > 0, r > 0$).

للتذكير

1 لتر = 1,000 سنتمتر مكعّب 1,000 = مليلتر (ملل)

1 سنتمتر مكعّب = 1 مليلتر - واحد على ألف من اللتر (1 ملل).

2. طول قُطر دلو أسطوانيّ الشكل هو 28 سم وارتفاع الدلو 30 سم.

أ. ما هو حجم الدلو بالسنتمتر المكعّب؟

أ. ما هو حجم الدلو باللترات؟

3. نتطرّق إلى المهام التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

في البرج أ،طول قُطر البركة الأسطوانيّة 12 م، وطول ارتفاعها 10 م.

في البرج ب، طول قُطر البركة الأسطوانيّة، 10 م، وطول ارتفاعها 12 م.

البركتان مليئتان بالماء.

برج ب

برج أ

أ. احسبوا كمّيّة الماء بالأمتار المكعّبة (كوب) في كلّ بركة.

ب. قارنوا بين حساباتكم التي وردت في البند السابق وتخمينكم في مهمّة الافتتاحيّة.

4. يُباع العسل، في دكان المنتجات الطبيعيّة، بنوعين من المرطبانات الأسطوانيّة الشكل:
مرطبانات قصيرة ومرطبات أخرى أطول منها بضعفين.

طول قُطر قاعدة المرطبان القصير ضعفا قُطر المرطبان الطويل.

أ. في أيّ مرطبان كمّيّة العسل أكثر وبكم ضعف؟ اشرحوا.

ب. طول ارتفاع المرطبان القصير 6 سم وطول قُطره 10 سم.
احسبوا حجميِ المرطبانين وافحصوا إجاباتكم عن بند أ.

رأينا أنّ حجم الأسطوانة يتغيّر حسب طول الارتفاع وطول نِصف قُطر القاعدة.
لا يؤثّر التغيير في طول الارتفاع أو التغيير في طول نِصف القطر على الحجم بنفس المقدار.
مثلًا: إذا كبَّرنا طول الارتفاع بضعفين فيكبر حجم الأسطوانة بضعفين.
إذا كبَّرنا طول نِصف القُطر بضعفين، فتكبر مساحتيْ قاعدتيْ الأسطوانة 4 (2^2) أضعاف، لذا فيكبر حجمها 4 أضعاف أيضًا.

5. للتذكير : 1 لتر 1,000 = سنتمتر مكعّب.

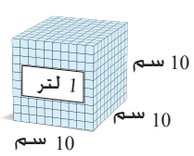
أ. يحتوي كأس عادي على $\frac{1}{4}$ لتر.

كم سنتمترًا مكعّبًا يوجد في كأس عادي؟

كم كأسًا عاديًّا يمكن أن نملئ بلتر واحد من العصير؟

ب. كم سنتمترًا مكعّبًا يوجد في $2\frac{1}{2}$ لتر؟

ت. كم سنتمترًا مكعّبًا يوجد في علبة عصير تحتوي على $\frac{1}{3}$ لتر؟



مجموعة مهامّ

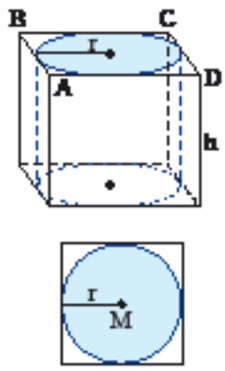
1. طول نِصف قُطر قاعدة كأس أسطوانيّ الشكل هو 4 سم، وطول ارتفاع الكأس 11 سم.

أ. ما هي مساحة قاعدة الكأس؟

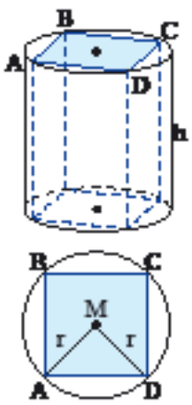
ب. ما هي كمّيّة العصير في كأس كامل؟

2. أمامكم رسمتان: أسطوانة محصورة داخل صندوق، وصندوق محصور داخل أسطوانة.
احسبوا، في كلّ بند، حجم الصندوق وحجم الأسطوانة حسب المعطيات. (استعينوا برسمتيِ القاعدتين).

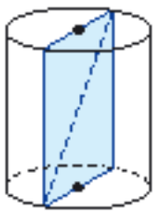
أ. r = 4 سم
h = 8سم



ب. ABCD مربع
r = 5 سم
h = 10 سم



3. رُسم مستطيل داخل أسطوانة (أُعِدّت الرسمة للتوضيح).
طول قُطر المستطيل المرسوم داخل الأسطوانة هو 10 سم.
طول قُطر قاعدة الأسطوانة يساوي ارتفاع الأسطوانة.



أ. احسبوا طول نِصف قُطر قاعدة الأسطوانة وطول ارتفاع الأسطوانة.

ب. احسبوا حجم الأسطوانة.

4. نصب 250 لترًا من العصير داخل أوعية أسطوانية الشكل متساوية.
طول نِصف قُطر قاعدة كلّ وعاء هو 5 سم، وطول ارتفاع الوعاء 10 سم.
حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن أن نصب كلّ كمّيّة العصير داخل الأوعية المعطاة.

أ. 200 وعاء؟ ت. 300 وعاء؟

ب. 250 وعاء؟ ث. 350 وعاء؟

5. أمامكم خمس قنانيّ شامبو.

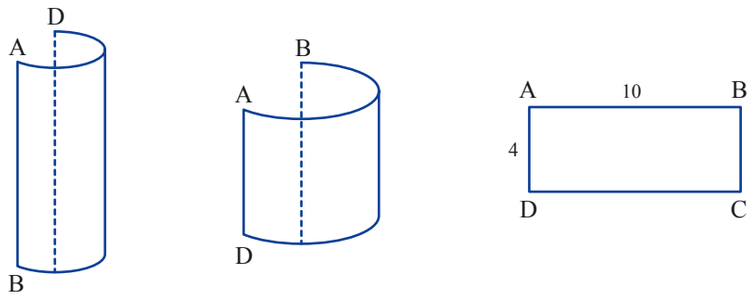
من يحتوي على كمّيّة شامبو أكثر، قنينتان زرقاوتان أم ثلاث قناني حمراء؟

6. حجم قنينة دواء للسعال هو 150 مليلترًا.
يتناول طفل ملعقة دواء صغيرة حجمها 5 مليلترات، 3 مرات في اليوم.
كم يومًا يكفي الدواء الموجود في القنينة؟

7. طول قُطر قاعدة علبة مشروب خفيف هو 6.2 سم.
حجم علبة المشروب الخفيف هو 330 مليمترًا (سنتمترًا مكعّبًا).
احسبوا طول ارتفاع العلبة.

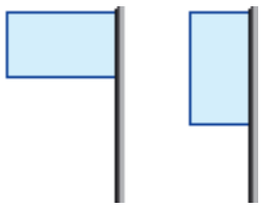
8. أ. خمّنوا كم كأسًا من الماء (يحتوي كلّ منها على 250 ملل) يوجد في دلو لشطف أرضيّة الغرفة؟
ب. طول قُطر قاعدة الدلو 25 سم وطول ارتفاعه 30 سم.
ما هو حجم الدلو بوحدة السنتمتر المكعّب؟ ما هو حجم الدلو بوحدة اللتر؟
ت. احسبوا كم كأسًا من الماء (يحتوي كلّ منها على 250 ملل) يوجد في الدلو. افحصوا تخمينكم في بند أ.

9. بُنيت أسطوانتان من ورقتين قياساتهما 10 سم x 4 سم.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم).



أ. خمّنوا هل الأسطوانتان متساويتان في الحجم؟
ب. احسبوا حجم الأسطوانتين، وافحصوا تخمينكم في بند أ.

10. ألصقو ورقتين مستطيلتي الشكل متطابقتين على سفودين.
ألصقوا، على أحدهما، الضلع الطويل وألصقوا، على الآخر، الضلع القصير (انظروا الرسمة).
دوروا العَلمين حول محوريهما.
أ. خمّنوا هل الجسمان متساويان في الحجم؟
إذا كانت الإجابة لا فأي جسم دورانيّ حجمه أكبر؟
ب. أطوال أضلاع المستطيل 10 سم وَ 5 سم.
احسبوا حجم الجسمين، وافحصوا تخمينكم في بند أ. اشرحوا.



الدرس الثالث: مساحة غلاف الأسطوانة ومساحة سطحها الخارجيّ

يتمّ تغليف غلاف البركتين في برجيِ الماء، كلّ سنة، بمادة عازلة. سُمك الغلاف متساوي.

في البرج أ: طول قُطر البركة الأسطوانيّة 12 م، وطول الارتفاع 10 م.

في البرج ب: طول قُطر البركة الأسطوانيّة 10 م، وطول الارتفاع 12 م.

خمّنوا هل تكلفة تغليف البركتين متساوٍ؟

إذا كانت الإجابة لا فأيّ بركة تغليفها أغلى؟

البرج ب

البرج أ

نحسب مساحة غلاف الأسطوانة ومساحة سطحها الخارجيّ.

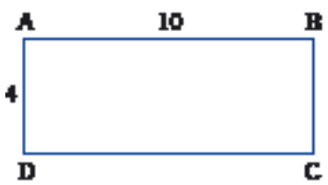
أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية وفي مجموعة المهام للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم.

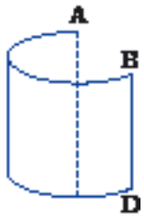
1. بُني غلاف أسطوانة من ورقة مستطيلة الشكل قياساتها 10 سم x 4 سم.

أ. ما هو محيط قاعدة الأسطوانة الناتجة؟

ب. ما هو طول ارتفاع الأسطوانة؟

ت. ما هي مساحة الغلاف؟





2. قَصُّوا أسطوانة على طول ارتفاعها وفرشوا غلافها (انظروا الرسمة).
طول نِصف قُطر قاعدة الأسطوانة r وطول ارتفاعها h ($r>0, h>0$).

أ. انسخوا المستطيل وعبروا عن أطوال أضلاعه بواسطة r وَ h.

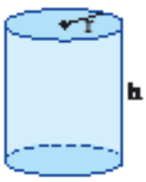
ب. عبروا عن مساحة غلاف الأسطوانة بواسطة r وَ h.

ت. عبروا عن مساحة السطح الخارجيّ للأسطوانة بواسطة r وَ h.

(للتذكير: مساحة السطح الخارجيّ للأسطوانة هي تغطية الأسطوانة كلّها: القاعدتان والغلاف).

مساحة غلاف الأسطوانة تساوي حاصل ضرب محيط قاعدة الأسطوانة في طول ارتفاع الأسطوانة.

نكتب: $2\pi r \cdot h$.

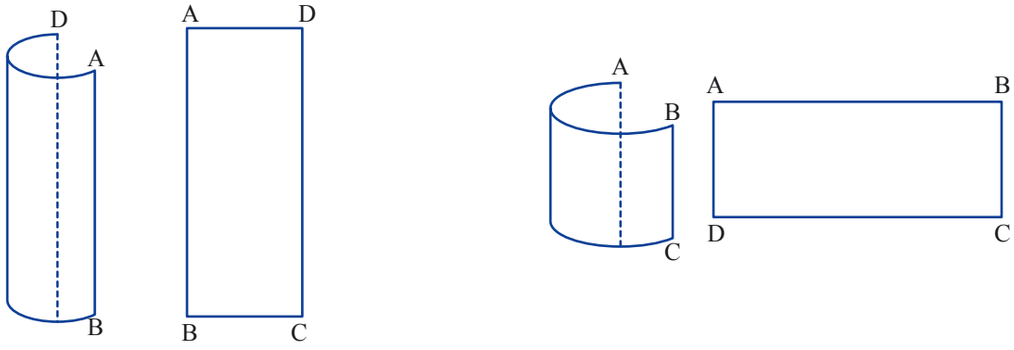


مساحة السطح الخارجيّ للأسطوانة تساوي مجموع مساحة غلاف الأسطوانة ومساحتيِ القاعدتين.

نكتب: $2\pi r \cdot h + \pi r^2 \cdot 2$.

(r طول نِصف قُطر الأسطوانة، h طول ارتفاع الأسطوانة $r > 0$, $h > 0$,
r وَ h بوحدات الطول، مساحة الغلاف ومساحة السطح الخارجي بوحدات مساحة مناسبة).

3. بُنيت أسطوانتان من مستطيلين متطابقين.
طووا في أحد المستطيلين الضلع الطويل، وطووا في المستطيل الآخر الضلع القصير (انظروا الرسمة).



أ. خمنوا واشرحوا تخمينكم:

- هل الأسطوانتان متساويتان في مساحة الغلاف؟ إذا كانت الإجابة لا فأيّ أسطوانة مساحة غلافها أكبر؟
- هل الأسطوانتان متساويتان في مساحة السطح الخارجيّ؟ إذا كانت الإجابة لا فأيّ أسطوانة مساحة سطحها الخارجيّ أكبر؟
- هل الأسطوانتان متساويتان في الحجم؟ إذا كانت الإجابة لا فأي أسطوانة حجمها أكبر؟

ب. معطى: أطول أضلاع مستطيل 12 سم وَ 5 سم.

- احسبوا مساحة غلافيِ الأسطوانتين، وافحصوا تخمينكم في بند أ.
- احسبوا مساحة السطح الخارجيّ للأسطوانتين، وافحصوا تخمينكم في بند أ.
- احسبوا حجم الأسطوانتين، وافحصوا تخمينكم في بند أ.

4. طول قُطر غطاء بئر مجاري هو 60 سم وسُمكه 9 سم.

لإغلاق البئر بشكل مُحكم يتمّ تغليف غلاف الغطاء بشريط مطاطيّ (كما هو الأمر مع الأشرطة التي يتمّ بواسطتها إغلاق باب الملجأ بشكل مُحكم).
احسبوا مساحة الشريط المطاطيّ المناسب لإغلاق الغطاء المعطى بشكل مُحكم.

لماذا آبار شبكة مياه المجاري الموجودة على الأرصفة والشوارع دائريّة الشكل عادةً؟ الأغطية ثقيلة جدًّا، يُسهل شكلها الدائريّ ملائمتها للبئر، لأنّه لا توجد حاجة لتدويرها كي تغطي البئر. لو كان شكل الغطاء مضلّعًا فسيؤدّي رفع الغطاء بزاوية غير دقيقة إلى سقوطه داخل البئر.

5. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة.
يتمّ تغليف **غلاف** البركتين في برجي الماء، كلّ سنة، بمادة عازلة.
في البرج أ: طول قُطر البركة الأسطوانيّة 12 م، وطول الارتفاع 10 م.
في البرج ب: طول قُطر البركة الأسطوانيّة 10 م، وطول الارتفاع 12 م.
أ. احسبوا مساحة غلاف كلّ بركة.
ب. هل تكلفة تغليف البركتين متساوية أم أن تغليف إحداهما أغلى من الأخرى؟

البرج أ

البرج ب

مجموعة مهامّ

1. طول قُطر علبة مشروب خفيف هو 2.6 سم، وطول ارتفاعها 11 سم.
احسبوا مساحة لوحة الألومينيوم المطلوبة لإنتاج علبة المشروب (تشمل القاعدتين).

2. طول قُطر طنجرة نيروستا هو 30 سم وطول ارتفاعها 20 سم.

أ. احسبوا مساحة لوحة النيروستا المطلوبة لإنتاج الطنجرة دون غطاء.

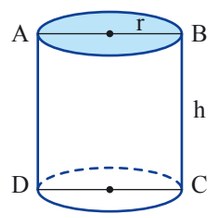
ب. احسبوا حجم الطنجرة باللترات (للتذكير: 1,000 سنتمتر مكعّب = 1 لتر).

ت. خمّنوا لماذا معظم الطناجر دائريّة الشكل؟

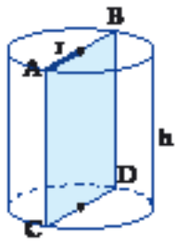
3. طول قُطر علبة كبيرة للمشروب الخفيف هو 8 سم، وحجمها $\frac{1}{2}$ لتر (500 سنتمتر مكعّب).
احسبوا مساحة لوحة الألومينيوم المطلوبة لإنتاج علبة المشروب (تشمل القاعدتين).

4. احسبوا، في كلّ بند، مساحة غلاف الأسطوانة حسب المعطيات.

أ. r = 2 سم
h = 6 سم

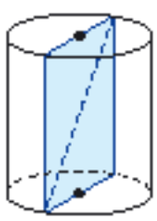


ب. مساحة ABCD هي 60 سنتمترًا مربّعًا
r = 3 سم



5. طول نِصف قُطر قاعدة أسطوانة هو 5 م، ومساحة غلافها 128 مترًا مربّعًا.
احسبوا ارتفاع الأسطوانة وحجمها.

6. طول قُطر المستطيل الملوّن 10 سم.
طول قُطر قاعدة الأسطوانة تساوي ارتفاع الأسطوانة.
جدوا مساحة غلاف الأسطوانة.



7. دهنوا بركة ماء من الخارج.
طول قُطر قاعدة البركة 10 م، وطول ارتفاع البركة 1 م.
نستعمل 0.5 لتر دهان لطلاء متر مربّع واحد.
ما هي كمّيّة الدهان المطلوبة لطلاء البركة؟