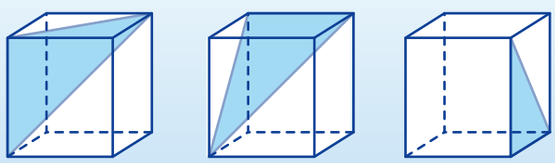
الوحدة الثالثة والثلاثون: نظرية فيثاغوروس في الفراغ

الدرس الأوّل: مثلّثات داخل صناديق

"شد" / "تحوم بشكل كبير"، منشى كيدشمان

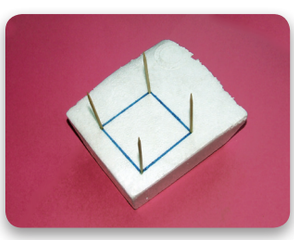
أمامكم رسومات مكعّبات في داخلها رسومات مثلّثات.

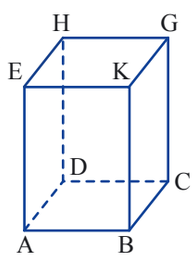


هل المثلّثات الملوّنة قائمة الزاوية؟ إذا كانت الإجابة نعم فأين الزاوية القائمة؟

نحسب أطوال قِطع داخل صندوق بواسطة نظرية فيثاغوروس.

1. أ. حضّروا نموذجًا لصندوق، على كلكار، بمساعدة مسواك (كما يظهر في الصورو) أو استعينوا بنموذج صندوق شفّاف؟





ب. هل يقع الرأسان H وَ G على نفس السطح؟

ت. هل يقع الرأسان H وَ A على نفس السطح؟

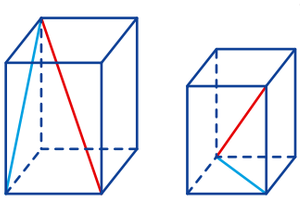
ث. هل يقع الرأسان H وَ B على نفس السطح؟

نسمِّي القطعة التي تربط بين رأسين متقابلين، في الصندوق، يقعان على نفس السطح "**قُطر السطح**".

نسمِّي القطعة التي تربط بين رأسين لا يقعان على نفس السطح "**قُطر الصندوق**".

أمثلة:

- القطع **الحمراء** هي أقطار الصندوق.
- القطع **الزرقاء** هي أقطار السطوح..



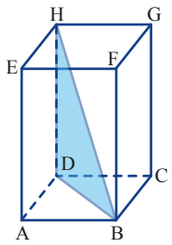
2. نتطرّق إلى الصندوق الذي وَرَدَ في المهمّة 1.

أ. أيّ قِطع من بين القطع الآتية هي أقطار الصندوق: CH, DB, DK, HK, AC, EC, HB, AG؟

ب. كم قطرًا يوجد في الصندوق؟

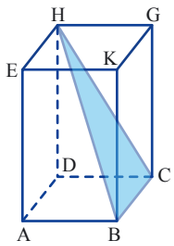
ت. سجّلوا أزواجًا من أقطار السطوح المتساوية. اشرحوا.

3. أ. أمامكم رسمة صندوق وفي داخله مثلّث ملوّن ΔHDB.



- ما هو نوع المثلّث HDB؟ (استعينوا بنموذج الصندوق).
- ارسموا المثلّث وسجِّلوا حرفًا مناسبًا بجانب كلّ رأس.
- حدّدوا هل كلّ ضلع في المثلّث هو:
  قُطر السطح، قُطر الصندوق أم ضلع الصندوق؟

ب. رُسم، على يساركم، نفس الصندوق الذي وَرَدَ في بند أ ولُوِّن فيه المثلّث ΔHCB.



- ما هو نوع المثلّث؟
- حدّدوا هل كلّ ضلع في المثلّث ΔHCB هو:
  قُطر السطح، قُطر الصندوق أم ضلع الصندوق؟
- هل يتطابق المثلّث ΔHCB مع المثلّث ΔHDB (في رسمة البند أ)؟ علّلوا.

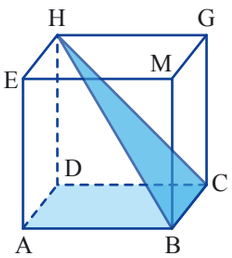
للتذكير

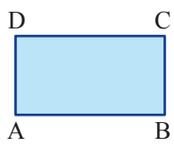
نسمّي المستقيم العمودي لجميع المستقيمات، في المستوى، التي تمرّ في نقطة تقاطعه مع المستوى **"عموديّ للمستوى"**.

- إذا رسمنا جسمًا ثلاثيّ الأبعاد في مستوى ثنائيّ الأبعاد فإنّ الرسمة تختلف عن رسمة شكل ثنائيّ الأبعاد.

مثال: يبدو المثلّث CBH القائم الزاوية في رسمة الصندوق كمثلّث متساوي الساقين، ويبدو المستطيل ABCD كمتوازي أضلاع.

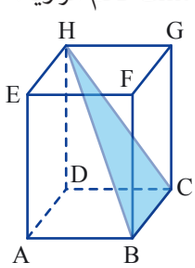
عندما نرسم هذه الأشكال خارج الصندوق نرسمها كما تبدو في المستوى.

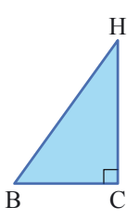


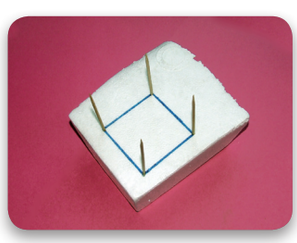


انتبهوا، الضلع BC عموديّ للسطح HGCD لذا فهو عموديّ لكلّ مستقيم يمرّ عبر C ويقع في مستوى هذا السطح، وبشكل خاص للمستقيم HC الذي هو قُطر السطح.

- رأينا في الأمثلة أن المثلّث الناتج من قُطر الصندوق، قُطر السطح ومن ضلع الصندوق هو مثلث قائم الزاوية.



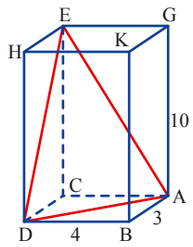




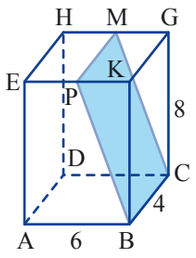
4. أطوال أضلاع الصندوق هي: 3 سم، 4 سم وَ 10 سم.
(أُعِدّت الرسمة للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم).

أ. احسبوا أطوال أقطار السطوح (الملوّنة بالأحمر).

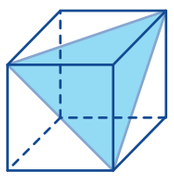
ب. احسبوا محيط المثلّث ADE.

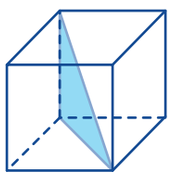


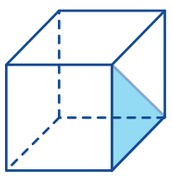
5. أطوال أضلاع الصندوق هي: 4 سم، 6 سم وَ 8 سم.
(أُعِدّت الرسمة للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم).
النقطتان M وَ P هما منتصفا الضلعان HG وَ EK للصندوق.
استعينوا بالنموذج الذي بنيتموه وجدوا نوع الشكل الرباعيّ MPBC.
احسبوا أطوال أضلاع الشكل الرباعيّ ومساحته.

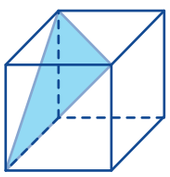


6. جدوا، في كلّ رسمة، نوع المثلّث البارز داخل المكعّب.

أ.


ب.


ت.


ث.


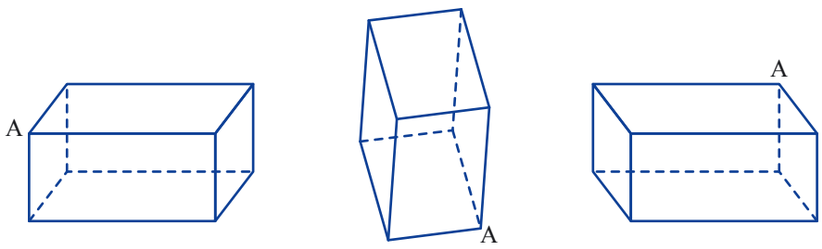
7. ارسموا صندوقين متطابقين، وارسموا في كلّ صندوق:
مثلّثًا أضلاعه قُطر الصندوق، قُطر السطح وضلع الصندوق
بحيث **لا** يتطابق المثلّثان (استعينوا بنموذج الصندوق).

مجموعة مهامّ

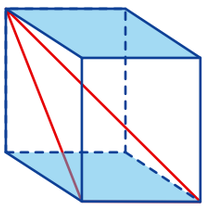
أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم.

دققوا عند تنفيذ حسابات المهام الآتية حتى منزلة واحدة بعد النقطة العشرية.

1. ضعوا ورقة شفّافة على رسومات الصناديق. ارسموا، في كلّ صندوق، قطر الصندوق وقطر السطح بحيث يخرجان من الرأس A.



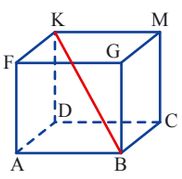
2. أمامكم صندوق رباعيّ (القاعدتان الملوّنتان هما مربّعان).



أ. جدوا نوع المثلّث الأحمر.
(استعينوا بنموذج صندوق على الكلكار، ابنوا المثلّث الأحمر وارسموه خارج النموذج).

ب. معطى طول قُطر الصندوق 25 سم، وطول ضلع القاعدة المربّعة الشكل 7 سم.
احسبوا طول قُطر السطح.

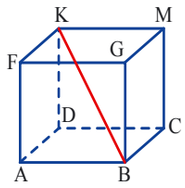
3. لُوِّن، في الرسمة، قُطر المكعب KB.



أ. ارسموا مثلثًا أضلاعه: قُطر المكعّب KB، قُطر السطح وضلع المكعّب. ما هو نوع المثلّث؟
(يمكن الاستعانة بنموذج مكعّب، بناء المثلّث في النموذج ورسم المثلّث خارج المكعّب).

ب. هل جميع المثلّثات التي أضلاعها: قُطر المكعّب، قُطر السطح وضلع المكعّب هي مثلّثات متطابقة؟ اشرحوا.

4. لُوِّن، في الرسمة، قُطر الصندوق KB. تختلف أضلاع الصندوق بالطول.



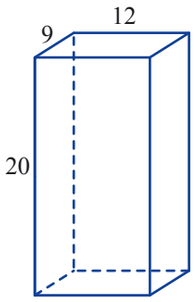
أ. ارسموا مثلّثين **متطابقين** أضلاعهما: قُطر الصندوق KB، قُطر السطح وضلع الصندوق.

ب. اشرحوا لماذا المثلّثان اللذان رسمتموهما متطابقان؟

ت. ارسموا مثلّثين **غير متطابقين** أضلاعهما: قُطر الصندوق KB، قُطر السطح وضلع الصندوق.

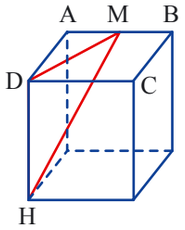
اشرحوا لماذا المثلّثان غير متطابقين؟

5. معطى، في الرسمة، صندوق أطوال أضلاعه 9 سم، 12 سم وَ 20 سم.



احسبوا أطوال أقطار السطوح.

6. أمامكم رسمة مكعّب. M منتصف AB.



أ. أيّ زاوية في المثلّث DMH هي زاوية قائمة؟

ب. ضعوا ورقة شفّافة على رسمة الصندوق، وارسموا مثلّثًا يتطابق مع المثلّث DMH.

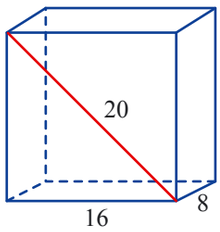
اشرحوا.

ت. معطى طول ضلع المكعّب 6 سم.

احسبوا طول DM.

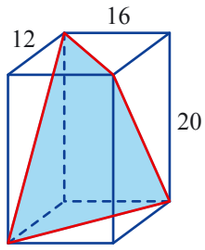
ث. احسبوا طول HM.

7. أمامكم رسمة صندوق. سُجِّلت المعطيات في الرسمة.



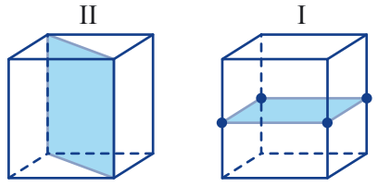
احسبوا طول ارتفاع الصندوق وحجمه.

8. اشترت **سامية** هدية لصديقتها ووضعتها في علبة شكلها صندوق.
ألصقت **سامية** شريطًا أحمر على الرزمة (انظروا الرسمة).



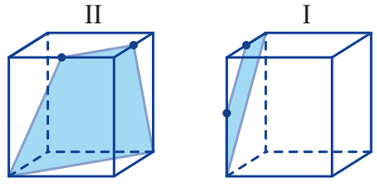
أ. ما هو طول الشريط؟
ب. هل الشكل الذي نتج بواسطة الشريط هو شكل رباعيّ؟

9. أمامكم رسمتا مكعّبان. النقاط البارز هي منتصفات أضلاع المكعّب.



أ. جدوا نوع الشكل الرباعيّ الملوّن في كلّ مكعّب. اشرحوا.
ب. طول ضلع المكعّب 10 سم.
احسبوا، في كلّ مكعّب، أطوال أضلاع الشكل الرباعيّ الملوّن ومساحته.

10. أمامكم رسمتا مكعّبان. النقاط البارز هي منتصفات أضلاع المكعبين.



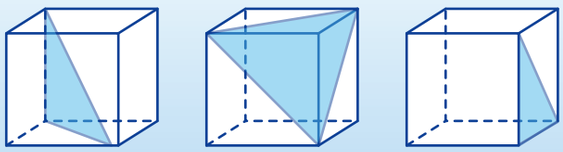
أ. جدوا نوع الشكل الرباعيّ الملوّن في كلّ مكعّب. اشرحوا.
ب. طول ضلع المكعّب هو 10 سم.
احسبوا، في كلّ مكعّب، أطوال أضلاع الشكل الرباعيّ الملوّن ومحيطه.

11. أ. معطى حجم صندوق 150 سنتمترًا مكعّبًا.
- سجّلوا 3 إمكانيّات لأطوال أضلاع الصندوق.
- اختاروا صندوقًا واحدًا من بين الصناديق التي اقترحتموها، واحسبوا أطوال أقطار السطوح.
هل طول **كلّ** قُطر في السطح أكبر من طول كلّ ضلع من أضلاعه؟

ب. اختاروا معطيات لصندوق حجمه 120 سنتمترًا مكعّبًا، وطول أحد أقطار السطح أصغر من طول أحد أضلاع الصندوق.

الدرس الثاني: أقطار الصندوق

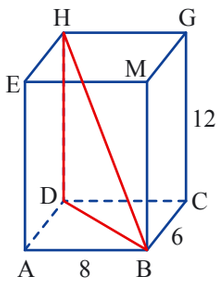
أمامكم رسومات ثلاثة مكعّبات متساوية، رُسمت داخلها مثلّثات.
خمّنوا:
أيّ مثلّث له المحيط الأكبر؟
أيّ مثلّث له المحيط الأصغر؟



نحسب طول قُطر الصندوق.

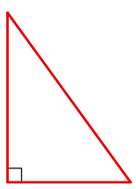
أُعِدّت الرسومات في الدروس وفي مجموعة المهام للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم

1. أ. ما هو نوع المثلّث HDB؟

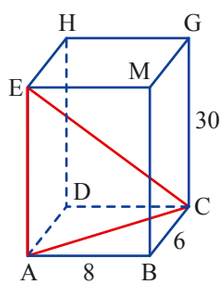


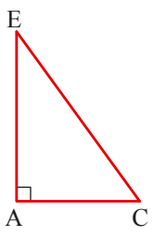
ب. ارسموا السطح ABCD واحسبوا طول القطر DB.
دقّقوا في كل الحسابات حتّى منزلة واحدة بعد النقطة العشريّة.

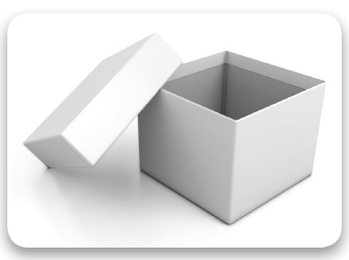
ت. المثلّث الذي يظهر في الرسمة هو رسمة نموذجيّة للمثلث HDB.
انسخوا الرسمة، سجّلوا رؤوس المثلّث والمقادير المعروفة.
احسبوا طول القطر HB.



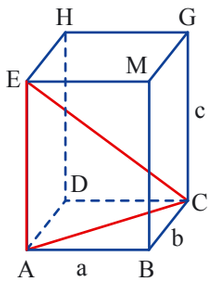
ث. المثلث EAC الذي يظهر في الرسمة هو رسمة نموذجية للمثلث EAC.
احسبوا طول قطر الصندوق EC
(احسبوا بدايةً طول AC).
قارنوه بطول HB الذي حسبتموه في بند ت.







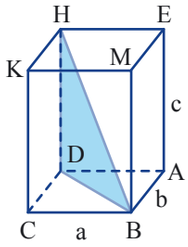
2. أ. عبّروا عن مربّع طول قُطر السطح (AC^2) بواسطة a وَ b.



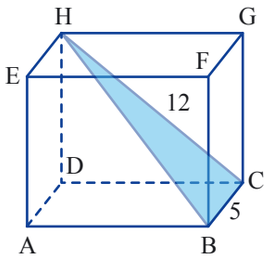
ب. عبّروا عن EC^2 بمساعدة AE وَ AC .
اشرحوا لماذا: $EC^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

ت. اشرحوا لماذا نحصل على نفس التعبير لأقطار الصندوق الثلاثة الأخرى أيضًا:
HB, GA وَ MD؟

أقطار الصندوق الأربعة متساوية.
نشرح ذلك في الصندوق ABCDEMKH (انظروا الرسمة).
في ΔABD $DB^2 = AD^2 + AB^2 = a^2 + b^2$
في ΔHDB $HB^2 = DB^2 + HD^2 = DB^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$
يمكن الحصول على نفس التعبير لأقطار الصندوق الثلاثة الأخرى.

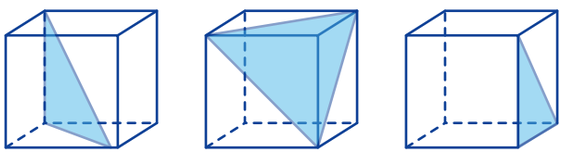


3. أمامكم رسمة صندوق فيها معطيات عن طول ضلع الصندوق وطول قُطر السطح.



أ. قال **جمال**: ΔHBC هو مثلث متساوي الساقين $(HB = HC)$.
قال **سليم**: ΔHBC هو مثلث قائم الزاوية $(\sphericalangle HCB = 90^\circ)$.
استعينوا بنموذج الصندوق وحدّدوا من منهما قوله صحيح؟
ب. ارسموا الرسمة المناسبة، سجّلوا عليها المعطيات واحسبوا طول قُطر الصندوق.

4. أمامكم رسومات المكعّبات الثلاثة المتساوية التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.
طول ضلع المكعّب 12 سم.



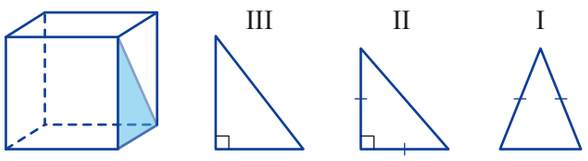
أ. احسبوا محيط المثلث في كلّ رسمة.
ب. افحصوا هل حساباتكم مناسبة للتخمين الذي اقترحتموه في مهمّة الافتتاحيّة؟

مجموعة مهامّ

أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم.

دققوا عند تنفيذ حسابات المهام الآتية حتّى منزلة واحدة بعد النقطة العشريّة.

1. أمامكم رسومات لمكعّب وثلاثة مثلّثات متساوية الساقين.

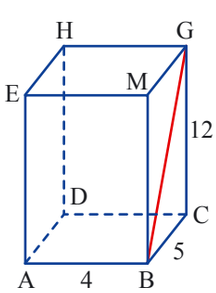


أ. أيّ مثلّث، من بين المثلّثات المرسومة، مناسب للمثلّث الملوّن في المكعّب؟ ارسموه.

ب. **معطى**: طول ضلع المكعّب هو 10 سم.

سجّلوا المعطيات على المثلّث الذي رسمتموه، واحسبوا أطوال أضلاع المثلّث.

2. أمامكم رسمة صندوق.

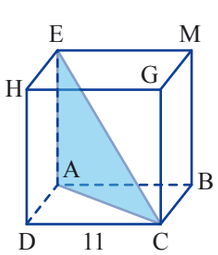


أ. ارسموا السطح BCGM واحسبوا طول القطر BG.

ب. هل هنالك سطوح أخرى فيها قُطر السطح يساوي BG؟

إذا كانت الإجابة نعم فسجّلوها.

3. أ. أمامكم رسمة مكعّب، رُسم فيه مثلّث EAC. ما هو نوع المثلّث؟

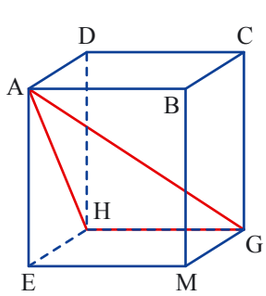


ب. ارسموا السطح ABCD. سجّلوا المعطيات في الرسمة واحسبوا طول AC.

ت. ارسموا DEAC (كما يظهر في المستوى).

سجّلوا المقادير المعروفة واحسبوا طول قُطر المكعّب EC.

4. طول ضلع المكعّب هو 17 سم.

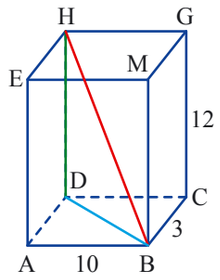


احسبوا طول قُطر المكعّب.

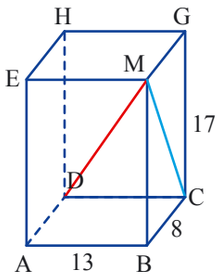
(ارسموا السطح ADHE والمثلّث AHG كما يظهران في المستوى.)

5. احسبوا، في كلّ رسمة، قُطر الصندوق الأحمر.
إرشاد: استعينوا بنموذج الصندوق وابنوا المثلّث الملوّن. ارسموا، خارج الصندوق، السطح المرسوم فيه قُطر السطح (الملوّن بالأزرق) والمثلث الملوّن.

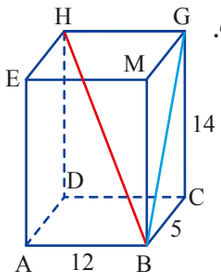
أ.



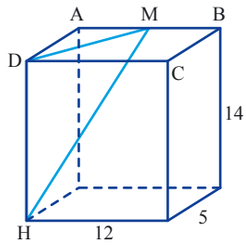
ب.



ت.

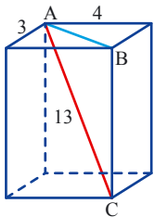


6. أمامكم رسمة صندوق، سُجلت فيها أطوال أضلاع الصندوق. M منتصف الضلع AB.



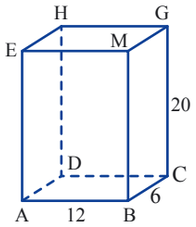
أ. ما هو نوع المثلّث MDH؟
ب. ارسموا المثلّث ADM خارج الصندوق، واحسبوا طول DM.
ت. ارسموا المثلّث HDM خارج الصندوق، واحسبوا طول MH.

7. أمامكم رسمة صندوق، سُجلت عليها معطيات.



أ. احسبوا طول الضلع BC.
ب. احسبوا حجم الصندوق.

8. أمامكم رسمة صندوق قياساتها 12 x 6 x 20

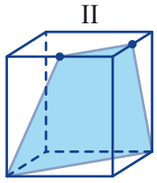


أ. احسبوا طول قُطر الصندوق.
ب. قال **تامر**: حسبت طول القطر HB في المثلّث HDB.
قال **سامر**: حسبت طول القطر EC في المثلّث EAC.
هل حصل **تامر** و**سامر** على نتائج مختلفة؟ اشرحوا.

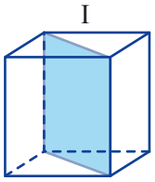
9. عندما نسافر في الطائرة إلى خارج البلاد يُسمح لنا الصعود إلى الطائرة مع حقيبة يد عمقها 25 سم، عرضها 45 سم وارتفاعها 56 سم.
هل يمكن أن نرزم، في حقيبة اليد، شمسية طولها 75 سم؟

10. أمامكم رسمتا مكعّبان. طول ضلع المكعّب 10 سم.
(النقاط البارزة في الرسمة II هي منتصفات الأضلاع.)
احسبوا محيطيْ الشكلين الرباعيين الملونين.

II

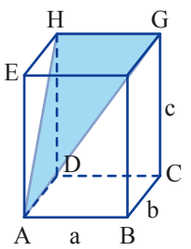


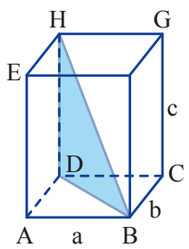
I

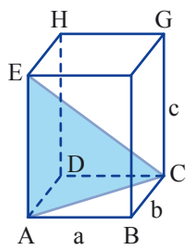


11. معطى حجم صندوق 120 سنتمترًا مكعّبًا.
أ. سجّلوا 3 إمكانيّات لأطوال أضلاع الصندوق.
ب. اختاروا أحد الصناديق التي اقترحتموها، واحسبوا طول قُطر الصندوق الذي اخترتموه.
ت. هل طول قُطر الصندوق أكبر من طول كلّ ضلع من أضلاعه؟ اشرحوا.

12. أمامكم ثلاثة رسومات لنفس الصندوق. (استعينوا بنموذج الصندوق).
أ. هل $AG = HB = EC$؟ اشرحوا.
ب. هل $\Delta HDB \cong \Delta GHA$؟ اشرحوا.
ت. هل $\Delta HDB \cong \Delta EAC$؟ اشرحوا.







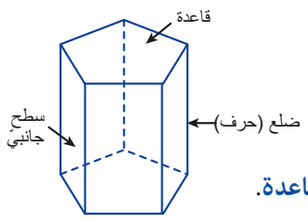
الدرس الثالث: استعمالات نظرية فيثاغوروس في المناشير

الأعمدة في بركة الأشكال السداسيّة، في الجولان، تشبه المناشير.
تَنْتُج هذه الأعمدة بسبب شدة الحرارة النابعة من انخفاض درجة حرارة الحمم البركانيّة ومن انقباضها.
يتراوح "عرض" الأعمدة في بركة الأشكال السداسيّة بين 40 إلى 60 سم وارتفاعها بين 3 إلى 5 م.
أُخذت، من بركة الأشكال السداسيّة، عينة مكوّنة من 60 عمودًا، وُجد أن قاعدة 40% من هذه الأعمدة مضلّعات سداسيّة، قاعدة 40% منها مضلّعات خماسيّة، وقاعدة 10% منها مضلّعات سباعيّة أو رباعيّة. لذا من المناسب أن نسمّي هذا المكان "بركة الأشكال السداسيّة والخماسيّة).

بركة الأشكال السداسية في جدول زفيتان، في هضبة الجولان

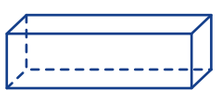
نستعمل نظرية فيثاغوروس لحساب أطوال أضلاع مناشير مختلفة.

للتذكير



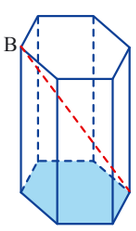
يوجد في المنشور سطحان مضلّعان متطابقان (يقعان في مستويين متوازيين)، نسمّيهما **"قاعدتا المنشور"**.
نسمّي السطوح الأخرى **"سطوح جانبيّة"**.
السطوح الجانبية في المنشور القائم هي **مستطيلات**، والأضلاع الجانبية **متعامدة للقاعدة**.
نتناول في هذا الدرس **مناشير قائمة**.

1. الصندوق هو نوع من أنواع المناشير



اشرحوا لماذا كل زوج من السطوح المتقابلة يمكن أن يكون قاعدتا المنشور؟

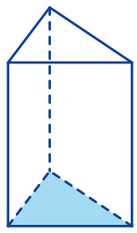
2. أمامكم رسمة منشور سداسيّ.



أ. ابنوا منشورًا سداسيًّا من مساوك مغروزة في الكلكار.
ب. كم قطرًا، غير أقطار السطوح، يخرج من الرأس المشار إليه بـ B؟
ت. كم قطرًا، غير أقطار السطوح، يوجد في المنشور السداسيّ؟

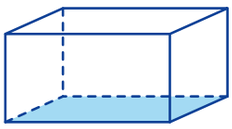
3. افحصوا، في كلّ بند، كم قطرًا (غير أقطار السطوح) يوجد في المنشور؟

أ.



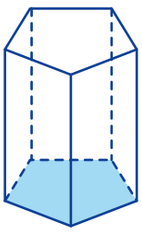
منشور ثلاثيّ

ب.



منشور رباعيّ- صندوق

ت.



منشور خماسيّ

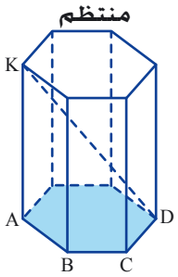
4. أمامكم رسمة منشور قاعدته مسدس منتظم.
ابنوا منشورًا كهذا بواسطة مساوك مغروزة في الكلكار.
طول ضلع المسدس المنتظم 4 سم، وطول ارتفاع المنشور 6 سم.
(أُعِدّت الرسمة للتوضيح.)

أ. احسبوا طول AD.

(**إرشاد**: ارسموا المسدس المنتظم واربطوا مركزه مع الرؤوس).

ب. احسبوا طول قُطر المنشور KD.

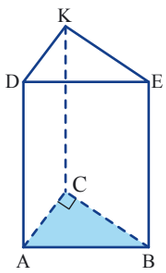
القاعدة - مسدس منتظم



5. أمامكم رسمة منشور ثلاثي قاعدته مثلّث قائم الزاوية.
طولا القائمان هما 8 سم وَ 15 سم. ارتفاع المنشور 20 سم.
(أُعِدّت الرسمة للتوضيح.)

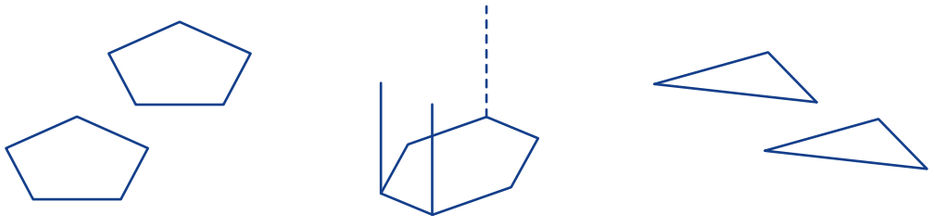
أ. احسبوا أطوال أقطار السطوح.

ب. كم قطرًا من أقطار السطوح تختلف عن بعضها في هذا المنشور؟ اشرحوا.



مجموعة مهامّ

1. انسخوا، أكملوا إلى منشور،وسجّلوا اسمًا مناسبًا لكلّ منشور.



2. أمامكم رسمة سطح منشور.

أ. انسخوا الرسمة وأكملوها إلى صندوق.

ب. انسخوا الرسمة وأكملوها إلى منشور ثلاثيّ.

ت. انسخوا الرسمة وأكملوها إلى منشور خماسيّ.

3. حدّدوا، في كلّ بند، هل الإدّعاء صحيح؟

أ. المكعّب هو منشور.

ب. الصندوق هو منشور.

ت. عدد أضلاع المنشور هو 12 دائمًا.

ث. هنالك منشور أعداد أضلاعه 12.

ج. عدد أضلاع المنشور ضعفا عدد رؤوس القاعدة.

ح. عدد أضلاع المنشور 3 أضعاف عدد رؤوس القاعدة.

ج. عدد أضلاع المنشور يساوي عدد رؤوس القاعدة.

4. أ. كم قطرًا (غير أقطار السطوح) يوجد في المنشور الثلاثيّ؟ في المنشور الرباعيّ؟

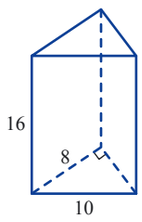
في المنشور السداسيّ؟في المنشور الثمانيّ؟ في منشور قاعدته مضلّع مكوّن من 10 أضلاع؟

ب. كم قطرًا (غير أقطار السطوح) يوجد في منشور قاعدته مضلّع مكوّن من n أضلاع؟ (n عدد طبيعيّ.)

أُعِدّت الرسومات في المهام الآتية للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم.

5. أمامكم رسمة منشور قائم ثلاثيّ (أُعِدّت الرسمة للتوضيح وقياسات الطول معطاة بالسم.)

احسبوا حجم المنشور.



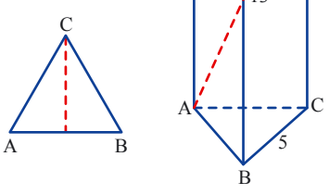
6. قاعدة المنشور هي مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 5 سم.

أ. احسبوا مساحة القاعدة ABC (رُسمت القاعدة خارج المنشور أيضًا).

ب. طول قُطر السطح AD هو 13 سم.

احسبوا طول ارتفاع المنشور.

ت. احسبوا حجم المنشور.

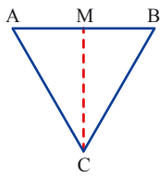


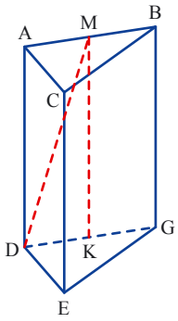
7. أمامكم رسمة منشور قاعدته مثلّث متساوي الأضلاع.
طول ضلع المثلّث 18 سم.
M منتصف الضلع AB, K منتصف الضلع DG.

أ. احسبوا مساحة القاعدة (رُسم ΔABC خارج المنشور).

ب. طول DM هو 15 سم.
احسبوا طول ارتفاع المنشور.

ت. احسبوا حجم المنشور.



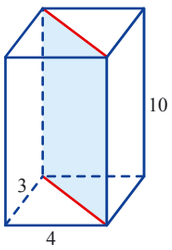


8. أمامكم رسمة صندوق.
نَصفوا الصندوق على طول قُطريِ القاعدتين الملونين بالأحمر.

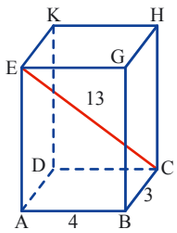
أ. أيّ جسمين نتجا؟

ب. ما هو حجم كلّ جسم من الجسمين اللذين نتجا؟

ت. احسبوا مساحة السطح المشترك للجسمين.



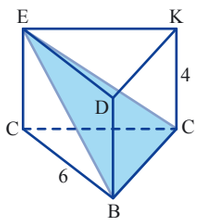
9. طول قُطر الصندوق EC هو 13 سم.
احسبوا حجم الصندوق.



10. قاعدة المنشور هي مثلّث متساوي الأضلاع.

أ. احسبوا حجم المنشور.

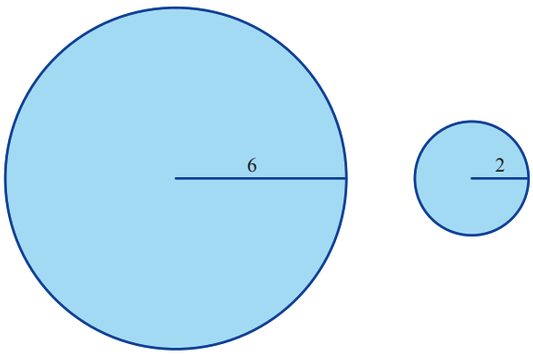
ب. ما هو نوع المثلّث الملون؟ احسبوا مساحته.



نحافظ على لياقة رياضيّة

الدائرة والمحيط

1. معطى دائرتان.



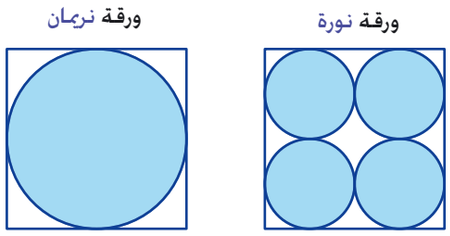
أ. احسبوا مساحة كلّ دائرة.

ب. كم ضعفًا مساحة الدائرة الكبيرة أكبر من مساحة الدائرة الصغيرة؟

ت. احسبوا محيط كلّ دائرة.

ث. كم ضعفًا محيط الدائرة الكبرى أكبر من محيط الدائرة الصغرى؟

2. حصلت كل من **نورة** و**نريمان** على ورقة مربّعة الشكل طول ضلعها 16 سم. وقد قصتا دوائرًا من الورقة.

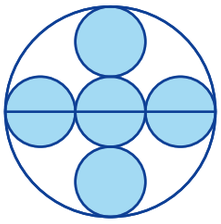


أ. أيتهما بقي لديها مساحة أكبر (المساحة البيضاء)؟

(**للتذكير**: مساحة الدائرة هي πr^2)

ب. هل تتغيّر إجاباتكم، عن بند ب، إذا كان طول ضلع الورقة 15 سم؟

3. معطى دائرة طول قُطرها 24 سم، وفي داخلها 5 دوائر متساوية (انظروا الرسمة).



أ. احسبوا طول نِصف قُطر كلّ دائرة داخليّة.

ب. احسبوا مساحة كلّ دائرة داخليّة.

ت. احسبوا مساحة الدائرة الكبيرة.

ث. كم ضعفًا مساحة الدائرة الكبيرة أكبر من مساحة الدوائر الداخليّة الخمس؟

ج. احسبوا أيُّهما أطول محيط الدائرة الخارجيّة أم مجموع محيطات الدوائر الداخليّة الخمس؟

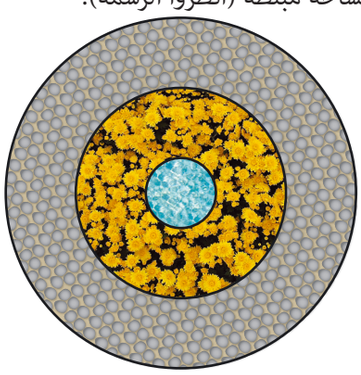
4. تمّ تصميم منظر جميل دائريّ الشكل.

هنالك بركة في مركز الدائرة، وحولها حلقة من الأزهار، وحول الحلقة هنالك مساحة مبلّطة (انظروا الرسمة).

القطر الكليّ للمنظر هو 30 مترًا.

عرض الحلقة المبلّطة 10 أمتار.

عرض حلقة الأزهار 5 أمتار.



أ. احسبوا المساحة التي أُعِدَّت لتصميم المنظر.

ب. احسبوا مساحة البركة ومساحة حلقة الأزهار.

ت. كم ضعفًا محيط المنظر الجميل أكبر من محيط البركة؟