الوحدة الثانية والثلاثون: بحث هيئة معادلات

الدرس الأوّل: نحلّ ألغازًا

تمثيل بيانيّ (هندسيّ) لهيئة المعادلات

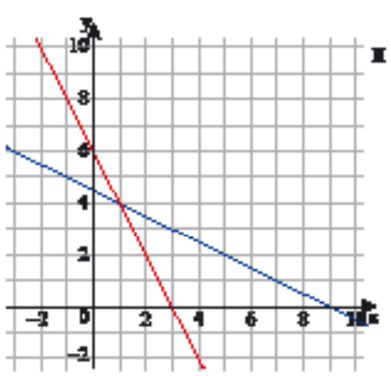
بنى كلّ زوج من التلاميذ، في صف **وسيم**، لغزًا.
أمامكم اللغز الّذي بناه **باسم** و**سامي**.

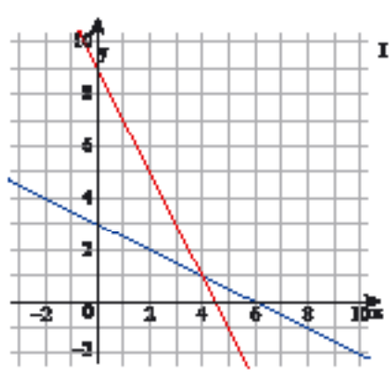
جدوا العددين الذين اختارهما **باسم** و**سامي**.

نستعين بهيئة معادلات لإيجاد، إذا كان الأمر ممكنًا، أزواج من الأعداد يتمّ اختيارها في الألغاز المختلفة.

حلّ وحيّد

1. نتطرّق إلى اللغز الذي بناه **باسم** و**سامي** في مهمّة الافتتاحيّة.
   أ. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة.
   ب. في أيّ رسم بيانيّ رُسم الخطان البيانيّان المناسبان لهيئة معادلات اللغز؟ اشرحوا.



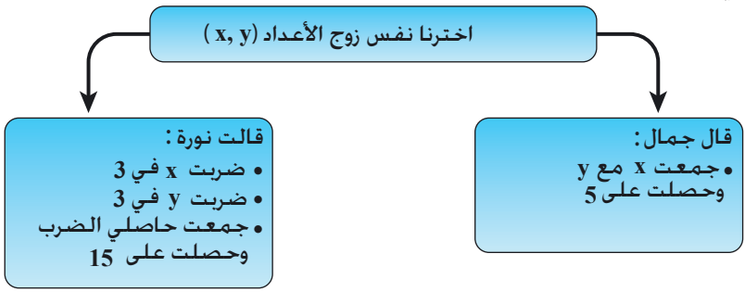


ت. ما هما العددان اللذان اختارهما **باسم** و**سامي**؟

للتذكير:
حلّ هيئة معادلات بمتغيّرين (من الدرجة الأولى) بطريقة بيانيّة هو عبارة عن زوج مرتَّب من الأعداد المناسب لنقطة تقاطع المستقيمين.

حلول كثيرة

2. أمامكم اللغز الّذي بناه **جمال** و**نورة**.



أ. حدّدوا لكلّ زوج من الأعداد هل يمكن أن يكون حلًّا للغز؟ اشرحوا.

(2, 3) (7, −2) (1.5, 3.5) (1, −4) (−3, 8)

ب. اكتبوا حلين إضافيّين للغز.

3. حلّ **تامر** و**حسن** هيئة المعادلات المناسبة للغز **جمال** و**نورة**. $\begin{cases} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \end{cases}$

أ. حلّ **تامر** هيئة المعادلات بطريقة جبريّة.

$$\begin{array}{l} 3x + 3y = 15 \\ x + y = 5 \;/\cdot 3 \\ \hline 3x + 3y = 15 \\ - \quad 3x + 3y = 15 \\ \hline 0x + 0y = 0 \end{array}$$

اختاروا الإجابة المناسبة لمعنى الحلّ الذي حصل عليه **تامر**.

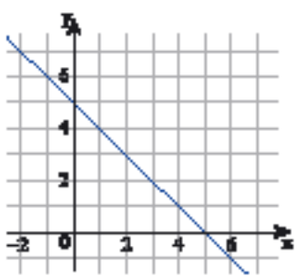
- زوج الأعداد (0, 0)
- لا يوجد حلّ
- كل زوج من الأعداد
- حلول كثيرة لكن ليس كلّ زوج من الأعداد

ب. حلّ **حسن** هيئة المعادلات بطريقة جبريّة.

رسم، في هيئة المحاور، خطوطًا مستقيمة مناسبة لهيئة المعادلات وحصل على خطّ مستقيم واحد فقط.

اختاروا الإجابة المناسبة لمعنى الحلّ الذي حصل عليه **حسن**.

- لا يوجد حلّ
- كل النقاط في المستوى
- فقط كلّ النقاط التي تقع على الخطّ المستقيم في الرسم البيانيّ



ت. لخّصوا استنتاجاتكم:

أيّ زوج من الأعداد يمكن أن يكون حلًّا للغز **جمال** و**نورة**؟

أحيانًا، في هيئة معادلات من الدرجة الأولى بمتغيِّرين، تصف المعادلتين نفس العلاقة بين المتغيّرين.
في هذه الحالات:

- عندما نحلّ هيئة معادلات بطريقة جبريّة نحصل على **مساواة** بين الطرفين.

  حلّ هيئة المعادلات هو **كلّ الأزواج المرتبة** الّتي تحقّق العلاقة بين المتغيِّرين

- عندما نحلّ هيئة معادلات بطريقة بيانيّة (هندسيّة) **يتّحد** المستقيمان المناسبان للمعادلتين إلى مستقيم واحد.

  حلّ هيئة المعادلات هو **كلّ أزواج الأعداد** المناسبة للنقاط التي تقع على المستقيم.

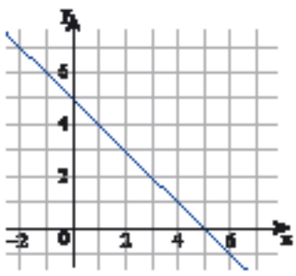
أمثلة:

حلّ **تامر**، في المهمّة 3أ، هيئة المعادلات:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + 3y = 15 \end{cases}$$

حصل على **المساواة** $0 = 0$
الحلّ: **كلّ الأزواج المرتبة** (x, y)
التي تحقّق $x + y = 5$

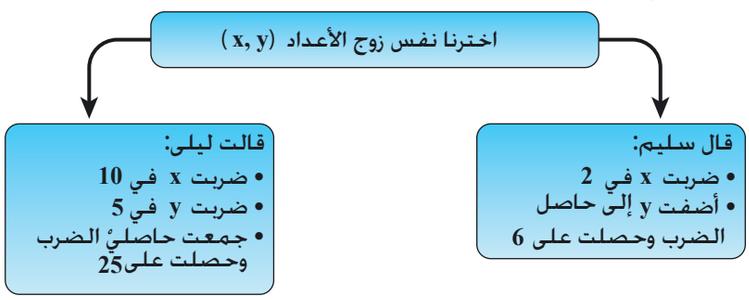
رسم **حسن**، في المهمّة 3ب، خطًّا بيانيًّا مناسبًا لهيئة المعادلات.



حصل على **مستقيم واحد**.
الحلّ: كلّ **أزواج الأعداد** المناسبة للنقاط التي تقع على المستقيم في الرسمة.

لا يوجد حلّ

4. أمامكم اللغز الذي بناه **سليم** و**ليلى**.



أ. حلّوا اللغز بطريقة جبريّة.
ب. حلّوا اللغز بمساعدة التمثيل الهندسيّ (رسم مستقيمات).

5. حلّ **جميل** و**جميلة** هيئة المعادلات المناسبة للغز **سليم** و**ليلى**.

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 10x + 5y = 25 \end{cases}$$

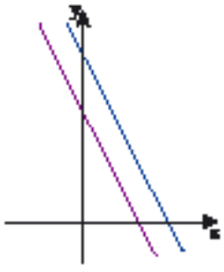
أ. حلّ **جميل** هيئة المعادلات بطريقة جبريّة.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \;/\cdot 5 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \\ 10x + 5y &= 30 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \\ 0x + 0y &= 5 \\ 0 &= 5 \end{aligned}$$

_____اختاروا الإجابة المناسبة لمعنى الحلّ الذي حصل عليه **جميل**.

- زوج الأعداد $(0, 5)$
- لا يوجد حلّ
- كلّ زوج من الأعداد
- حلول كثيرة لكن ليس كلّ زوج من الأعداد

ب. حلّت **جميلة** هيئة المعادلات بمساعدة تمثيل بيانيّ (هندسّي).
رسمت المستقيمين المناسبين لهيئة المعادلات في هيئة المحاور.
ما معنى حلّ **جميلة**؟



ت. لخّصوا استنتاجاتكم:

أيّ زوج من الأعداد يمكن أن يكون إجابة للغز **سليم** و**ليلى**؟

أحيانًا، في هيئة المعادلات بمتغيِّرين (من الدرجة الأولى) ، تصف كلّ معادلة علاقة مختلفة بين المتغيِّرين، ولا تتحقّق العلاقتين بين المعادلتين معًا.
في هذه الحالات:

- عندما نحلّ هيئة المعادلات بطريقة جبريّة نحصل على أعداد مختلفة في الطرفين.

  لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.

- عندما نحلّ هيئة معادلات بمساعدة تمثيل بيانيّ (هندسيّ) يكون المستقيمان المناسبان للمعادلتين **متوازيين**. **لا توجد نقطة مشتركة** للمستقيمين، لذا **لا يوجد حلّ** لهيئة المعادلات.

أمثلة:

حلّ **جميل**، في المهمّة 5أ، هيئة المعادلات:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ \underline{10x + 5y &= 25} \end{aligned}$$

حصل على $0 = 5$

الحلّ: **لا** توجد أزواج مرتّبة مناسبة للمعادلتين.
لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.

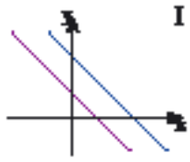
رسمت **جميلة**، في المهمّة 5ب، خطًّا بيانيًّا مناسبًا لهيئة المعادلات. حصلت على **مستقيمين متوازيين**.

الحلّ: لا يوجد زوج من الأعداد يحقّق المعادلتين. **لا يوجد حلّ** للهيئة.

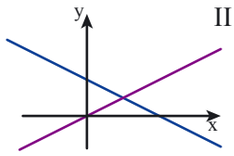
6. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات، واختاروا التمثيل الهندسيّ (البيانيّ) المناسب لها.

أ. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

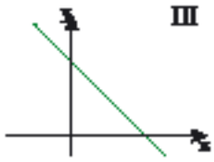
I



II

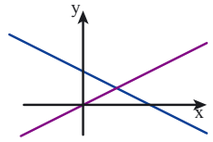


III



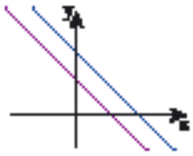
هنالك ثلاث حالات ممكنة للتمثيل البيانيّ (الهندسيّ) لهيئة معادلات بمتغيِّرين من الدرجة الأولى.

المستقيمان متقاطعان



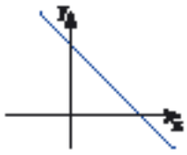
يوجد **حلّ وحيد** لهيئة المعادلات، وهو الزوج المرتّب المناسب لنقطة التقاطع.

المستقيمان متوازيان



لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.
لا توجد نقطة مشتركة للمستقيمين

المستقيمان متّحدان لمستقيم واحد



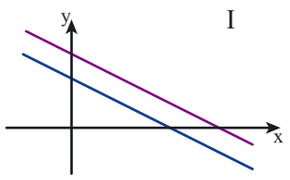
الحلّ لهيئة المعادلات هو **عدد لا نهائيّ من أزواج الأعداد** المناسبة للنقاط التي تقع على المستقيم.

مجموعة مهامّ

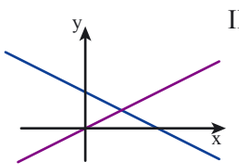
1. لائموا كلّ بند للتمثيل الهندسيّ (البيانيّ) المناسب له.

أ. هنالك حلّ وحيد لهيئة المعادلات.
ب. لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.
ت. هنالك عدد لا نهائيّ من الحلول لهيئة المعادلات..
ث. حلّ هيئة المعادلات هو زوج مرتّب.

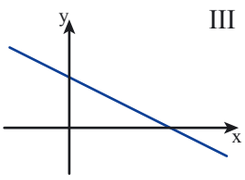
I



II



III



2. تصف المستقيمات المرسومة المعادلات الآتية:

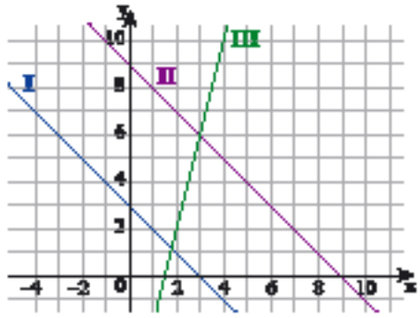
$x + y = 9$ $\quad x + y = 3$ $\quad 4x - y = 6$

أ. لائموا كلّ معادلة للمستقيم المناسب لها.

ب. ابنوا هيئة معادلات لها حلّ وحيّد. ما هو الحلّ؟

ت. ابنوا هيئة معادلات لا يوجد لها حلّ.

.



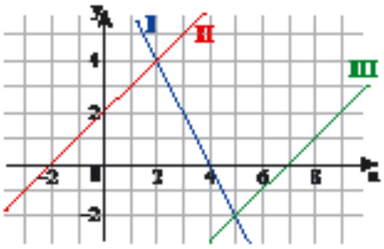
3. تصف المستقيمات المرسومة المعادلات الآتية:

$x - y + 2 = 0$ $\quad x - y = 7$ $\quad 2x + y = 8$

أ. لائموا كلّ معادلة للمستقيم المناسب لها.

ب. ابنوا هيئة معادلات لها حلّ وحيّد. ما هو الحلّ؟

ت. ابنوا هيئة معادلات لا يوجد لها حلّ.



4. تصف المستقيمات المرسومة المعادلات الآتية:

$x - y + 3 = 0$ $\quad x - y = 2$ $\quad x = 3$

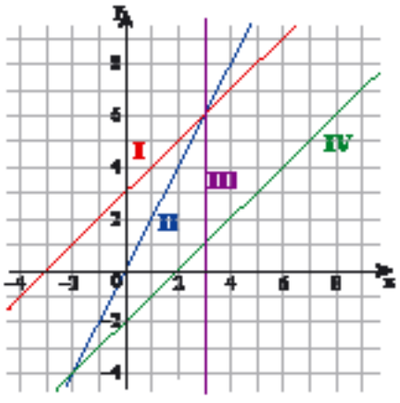
$2x - y = 0$ $\quad 3x - 3y = 6$

أ. لائموا كلّ معادلة للمستقيم المناسب لها.

ب. ابنوا هيئة معادلات لها حلّ وحيّد. ما هو الحلّ؟

ت. ابنوا هيئة معادلات لا يوجد لها حلّ.

ب. ابنوا هيئة معادلات لها عدد لا نهائيّ من الحلول.



5. ارسموا، في كلّ بند، خطوطًا بيانيّة تصف هيئات المعادلات، وحدّدوا هل الحلّ هو زوج مرتّب، وهل تقع كلّ النقاط على مستقيم واحد أو أنّه لا يوجد حلّ للهيئة.

أ. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$

6. ارسموا، في كلّ بند، خطوطًا بيانيّة تصف هيئات المعادلات، وحدّدوا هل الحلّ هو زوج مرتّب، وهل تقع كلّ النقاط على مستقيم واحد أو أنّه لا يوجد حلّ للهيئة.

أ. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$

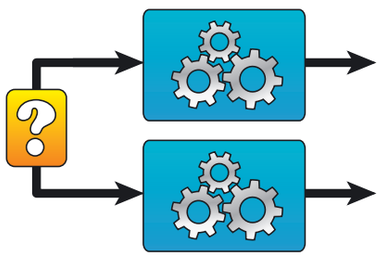
7. حلّوا.

أ. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

8. معطاة معادلة $x - y = 5$.

أضيفوا، في كلّ بند، معادلة ثانية بحيث يكون التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات::

أ. مستقيمان متوازيان ب. مستقيمان متقاطعان ت. مستقيمان متّحدان



الدرس الثاني: علاقات بين التمثيلات في هيئة المعادلات

عدد حلول هيئة المعادلات

أمامكم ثلاث هيئات معادلات بمتغيّرين (من الدرجة الأولى).

I. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$ III. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$

قال **عامر**: يمكن معرفة عدد حلول كلّ هيئة معادلات دون حلها.

ما هي اعتبارات **عامر**؟

نستمرّ في بحث الحالات الثلاث الممكنة لهيئة المعادلات.

1. نتطرّق إلى هيئة المعادلات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

في كلّ هذه الهيئات، نجد في أحد الطرفين جميع المتغيّرات، وفي الطرف الثاني العدد.

أ. في الهيئة I:

حصلنا على المعادلة الثانية بعد أن ضربنا طرفي المعادلة الأولى في 3.

هل تصف المعادلتان نفس العلاقة؟ اشرحوا.

هل يوجد للهيئة I حلّ وحيّد، عدد لا نهائيّ من الحلول أو لا يوجد حلّ؟ اشرحوا.

ب. في الهيئة II:

حصلنا على المعادلة الثانية بعد أن ضربنا، في المعادلة الأولى، طرف المتغيّرات **فقط** في 3.

هل يوجد للهيئة II حلّ وحيّد، عدد لا نهائيّ من الحلول أو لا يوجد حلّ؟ اشرحوا.

ت. في الهيئة III:

طرف المتغيّرات في إحدى المعادلتين ليس من مضاعفات طرف المتغيّرات في المعادلة الثانية.

هل يوجد للهيئة III حلّ وحيّد، عدد لا نهائيّ من الحلول أو لا يوجد حلّ؟ اشرحوا.

2. حدّدوا، في كلّ بند، عدد حلول كلّ هيئة معادلات (لا يوجد حلّ، حلّ وحيّد، عدد لا نهائيّ من الحلول).

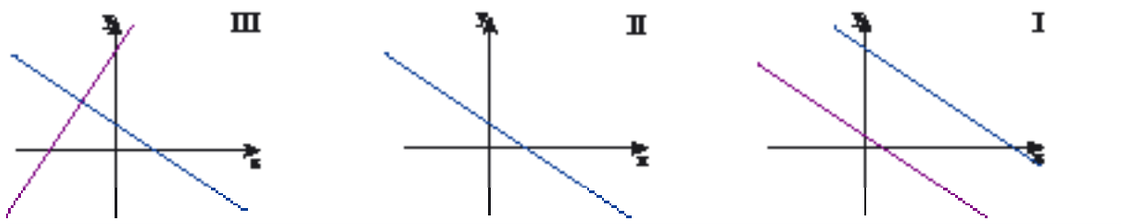
أ. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases}$

3. أمامكم ثلاث هيئات معادلات وثلاث تمثيلات هندسيّة (بمساعدة رسوم بيانيّة).

حدّدوا عدد حلول كلّ هيئة معادلات، ولائموا التمثيل الهندسيّ المناسب لها.

أ. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$



تبيّن لنا أنّ هنالك عدّة إمكانيّات لهيئة معادلات بمتغيّرين (من الدرجة الأولى): حلّ وحيّد، عدد لا نهائيّ من الحلول، لا يوجد حلّ. للتمييز بين الحالات المختلفة، يجب أن نرتب المعادلات بحيث تكون جميع المتغيّرات في طرف واحد والعدد في الطرف الثاني.

أمثلة: في المهمّة 3،

- إذا استطعنا أن نحصل على معادلة من خلال ضرب طرفي المعادلة الثانية في نفس العدد (ليس صفرًا) فعندئذٍ تصف المعادلتان **نفس العلاقة.** هذا يعني أنّ المعادلة الثانية لا تعطي معلومات إضافيّة. كل الأزواج المرتبة التي تحقّق كلّ معادلة تعتبر حلولًا ممكنة. هنالك **عدد لا نهائيّ من الحلول** لهيئة المعادلات. التمثيل الهندسيّ هو مستقيمان متّحدان.

في الهيئة $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$
نحصل على المعادلة الثانية بواسطة ضرب طرفي المعادلة الأولى في 3.
تصف المعادلتان نفس العلاقة.
لذا هنالك عدد لا نهائي من الحلول، وهي كلّ الأزواج المرتبة التي تحقق $2x + 3y = 4$

- إذا استطعنا أن نحصل، في إحدى المعادلتين، على طرف المتغيّرات **فقط** من خلال ضرب طرف المتغيّرات في المعادلة الثانية في نفس العدد (ليس صفرًا) فعندئذٍ تصف المعادلتان علاقات لا يمكن أن تتحقّق معًا. **لا يوجد** حلّ لهيئة المعادلات. التمثيل الهندسيّ هو **مستقيمان متوازيان**.

في الهيئة $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 10 \end{cases}$
يَنْتُج طرف المتغيّرات (فقط) في المعادلة الثانية بواسطة ضرب طرف متغيّرات المعادلة الاولى في 3.
تصف المعادلتان علاقات مختلفة لا يمكن أن تتحقّق معًا لنفس زوج الأعداد.
لذا، لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.

- إذا كان طرف المتغيّرات في إحدى المعادلتين ليس من مضاعفات طرف المتغيّرات في المعادلة الثانية فعندئذٍ تصف المعادلتان علاقات مختلفة تتحقّق معًا لزوج أعداد وحيّد. هنالك **حلّ** وحيّد لهيئة المعادلات (زوج مرتّب واحد). التمثيل الهندسيّ هو **مستقيمان متقطعان**. حلّ هيئة المعادلات هو نقطة تقاطع المستقيمين.

في الهيئة $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ 6x + 9y = 12 \end{cases}$
طرف المتغيّرات في إحدى المعادلتين ليس من مضاعفات طرف المتغيّرات في المعادلة الثانية.
تصف المعادلتان علاقات مختلفة تتحقّق معًا لزوج الأعداد $(-1, 2)$ فقط. لذا حل الهيئة هو $(-1, 2)$.

4. حدّدوا، في كلّ بند، عدد حلول كلّ هيئة معادلات (لا يوجد حلّ، حلّ وحيّد، تقع جميع النقاط على مستقيم واحد) اشرحوا.

أ. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 4 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x - 6y = 7.5 \end{cases}$

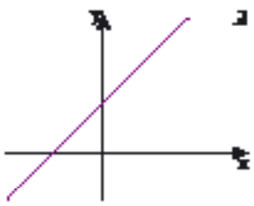
ب. $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 9 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 6 = 2y \end{cases}$

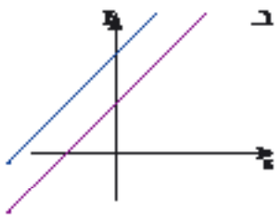
5. معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x + \square \cdot y = \square \end{cases}$

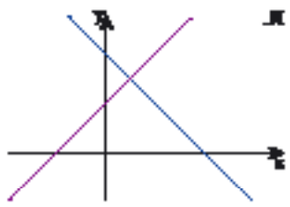
انسخوا، في كل بند، هيئة المعادلات واكتبوا أعدادًا مناسبة في الأماكن الفارغة..

أ. هنالك عدد لا نهائي من الحلول لهيئة المعادلات ب. لا يوجد حل لهيئة المعادلات ت. يوجد حل وحيد لهيئة المعادلات
حددوا عدد الإمكانيّات الموجودة.

6. اكتبوا، في كل بند، هيئة معادلات مناسبة.







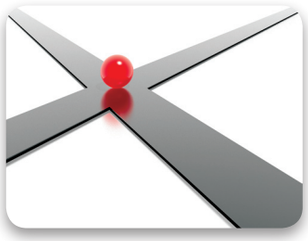
مجموعة مهامّ

1. حدّدوا، في كلّ بند **دون أن تحلوا**، هل هنالك حلّ وحيّد لهيئة معادلات، أم عدد لا نهائي من الحلول، أم لا يوجد حلّ، اشرحوا.

أ. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 15 \end{cases}$ ن. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$

2. حدّدوا، في كلّ بند، عدد حلول كلّ هيئة معادلات (حلّ وحيّد، عدد لا نهائي من النقاط التي تقع على مستقيم واحد، لا يوجد حلّ)، وارسموا رسمة تقريبية مناسبة.

أ. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x + 5y = 12 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$



3. معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + \square \cdot y = \square \end{cases}$

انسخوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات واكتبوا أعدادًا مناسبة في الأماكن الفارغة.

حلّوا هيئة المعادلات التي حصلتم عليها، وافحصوا إجاباتكم.

أ. هنالك عدد لا نهائيّ من الحلول لهيئة المعادلات.

ب. لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات

ت. يوجد حلّ وحيّد لهيئة المعادلات. ما هو الحلّ؟

4. معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 8x + 6y = \square \end{cases}$

أ. أيّ عدد يجب كتابته في المكان الفارغ إذا كان التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات مستقيمين متوازيين.

ب. أيّ عدد يجب كتابته في المكان الفارغ إذا كان التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات مستقيمًا واحدًا.

ت. قال **وائل**: لا يمكن أن تصف المعادلتين مستقيمين متقاطعين في نقطة واحدة.

هل قول **وائل** صحيح؟ اشرحوا.

5. معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 5x - 3y = 4 \\ 10x - 6y = \square \end{cases}$

انسخوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات واكتبوا عددًا مناسبًا في المكان الفارغ، إذا لم تتمكنوا فاشرحوا.

أ. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيمان متوازيان.

ب. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيم واحد.

ت. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيمان متقاطعان.

6. معطاة هيئة معادلات: $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ \square \cdot x - 2y = 6 \end{cases}$

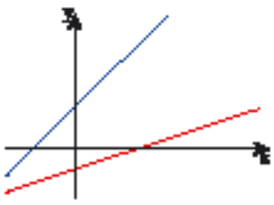
حدّدوا، في كلّ بند، عدد الإمكانيّات المختلفة لإكمال المكان الفارغ. اشرحوا.

أ. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيمان متقاطعان.

ب. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيمان متّحدان.

ت. التمثيل الهندسيّ لهيئة المعادلات هو مستقيمان متوازيان.

7. حلّ **أمير** هيئة معادلات بمساعدة التمثيل الهندسيّ. حصل على الرسمة الآتية.



قال **أمير**: لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات.

هل قوله صحيح؟ اشرحوا.

8. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$ $y < 5 \ , \ x > 0$

ب. $\begin{cases} 2y = 3x - 1 \\ 5x + 4y = 42 \end{cases}$ x وَ y أعداد طبيعيّة

ت. $\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4 = y + 9 \end{cases}$ $y > 0 \ , \ x > 0$

ث. $\begin{cases} 5x = y + 10 \\ 6x = 5y - 7 \end{cases}$ $y > 0 \ , \ x > 0$

9. معطاة معادلة: $2x - 5y = 18$

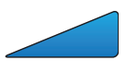
اختاروا، في كلّ بند، معادلة مناسبة من بين المعادلات الآتية.

$x + 5y = 3$	$4x - 10y = 9$	$5y + 18 = 2x$	$x - 2\frac{1}{2}y = 9$
$4x - 10y = 36$	$2x - 3y = 18$	$x - 2\frac{1}{2}y = 18$	$4x - 10y = 5$
$5y - 2x = 18$	$3y = 18$	$2x - y = 18$	$\frac{2}{5}x - y = 3\frac{3}{5}$

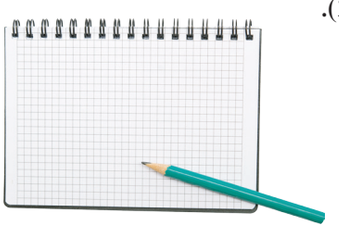
أ. المعادلة التي اخترتموها والمعادلة المعطاة تكوّنان هيئة معادلات لا يوجد لها حلّ.

ب. المعادلة التي اخترتموها والمعادلة المعطاة تكوّنان هيئة معادلات لها عدد لا نهائيّ من الحلول.

ت. المعادلة التي اخترتموها والمعادلة المعطاة تكوّنان هيئة معادلات لها حلّ وحيّد.



10. انسخوا واكتبوا أعدادًا في الأماكن الفارغة بحيث تَنْتُج هيئة معادلات حلّها $(2, 1)$.



$$\begin{cases} 2x - \square \cdot y = -6 \\ \square \cdot x + \square \cdot y = 6 \end{cases}$$

كم امكانيّة هنالك؟ اشرحوا.

الدرس الثالث: لياقة بدنيّة، لياقة بدنيّة، لياقة بدنيّة.....

نبسّط ونحلّ هيئات معادلات بمتغيِّرين

حلّ هيئة المعادلات $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ هو (1, 2). افحصوا .

في أيّ بند حلّ هيئة المعادلات يساوي حلّ هيئة المعادلة المعطاة؟ اشرحوا.

أ. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 2\frac{1}{2} \\ 9x - 3y = 3 \end{cases}$

نحلّ هيئات معادلات بواسطة التبسيط أو بواسطة رؤية قالب.

1. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ حلّها (4, 1)

في أيّ بند حلّ هيئة المعادلات يساوي حلّ هيئة المعادلة المعطاة؟
أيّ هيئة معادلات يجب حلّها؟ اشرحوا

أ. $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 2x + 6y = 18 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 2x + 6y = 14 \\ 6x - 4y = 20 \end{cases}$

نبسّط ونحلّ

2. بسّطوا، في كلّ بند، وحدّدوا نوع الحلّ لهيئة المعادلات (حلّ وحيد، عدد لا نهائيّ من الحلول، لا يوجد حلّ).

مثال:

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \\ 2(x - 5) - 2(2y - 1) = 2 \end{cases}$$

نبسّط المعادلة الأولى:

$$\frac{2x+y}{5} - \frac{x-3}{2} = 1 \quad /\cdot 10$$
$$4x + 2y - 5x + 15 = 10$$
نحصل على: $-x + 2y = -5$

نبسّط المعادلة الثانية:

$$2(x - 5) - 2(2y - 1) = 2$$
$$2x - 10 - 4y + 2 = 2$$
نحصل على: $2x - 4y = 10$

نحصل على المعادلة الثانية بواسطة ضرب طرفي المعادلة الأولى في (−2)، هنالك عدد لا نهائيّ من الحلول لهيئة المعادلات، وهي كلّ الأزواج المرتبةَ التي هي حلّ لإحدى المعادلات.

أ. $\begin{cases} \frac{2x+y}{3} - \frac{x+1}{2} = 1 \\ 10 + 3(x + y) = 5(y + 5) \end{cases}$ ت. $\begin{cases} (x - 5)(y - 2) = y(x + 2) \\ (x + 2)(y - 5) = (x - 1)(y - 1) + 3 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 3(x + y) - 5 = 10 - 4x \\ 3(4x + 3y) - 20 = 25 - 9x \end{cases}$ ث. $\begin{cases} (x + 4)(y + 7) = (x + 3)(y + 4) \\ (x + 5)(y + 2) = (x + 4)(y - 1) - 2 \end{cases}$

3. أمامكم هيئتان من المعادلات بمتغيِّرين.

$$\begin{cases} 3(x+y)-(y+3)=2(x+2) \\ 2(x-y)+5=4-y \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \quad (II)$$

أ. بسّطوا المعادلتين في الهيئة I.

ب. ما هو حلّ كلّ هيئة معادلات؟

4. معطاة هيئة المعادلات: $\begin{cases} 3(x-2)+4(y-1)=5-(x+y) \\ 5(y-x)-1=3(4-3x) \end{cases}$

بسّطوا وارسموا رسمة تقريبيّة تصف هيئة المعادلات بطريقة بيانيّة.

رؤية قالب

5. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$ حلّها $(5, 1)$.

استعينوا، في كلّ بند، بحلّ هيئة المعادلات المعطاة وحلّوا

أ. $\begin{cases} 2(x-1)+3(y-1)=13 \\ 3(x-1)-4(y-1)=11 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2(x+3)+3(y-2)=13 \\ 3(x+3)-4(y-2)=11 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2(3x-1)+3(5y-4)=13 \\ 3(3x-1)-4(5y-4)=11 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} 2\cdot\frac{(x-1)}{3}+3\cdot\frac{(y+5)}{2}=13 \\ 3\cdot\frac{(x-1)}{3}-4\cdot\frac{(y+5)}{5}=11 \end{cases}$

- بشكل عام، من الأسهل حلّ هيئة معادلات بعد تبسيط كلّ معادلة.
من الأفضل، ترتيب المعادلة بحيث تكون كلّ المتغيِّرات في طرف، والعدد في الطرف ثاني.

مثال: في المهمّة 4، بعد تبسيط وترتيب المعادلات نحصل على هيئة المعادلات: $\begin{cases} 4x+5y=15 \\ 4x+5y=13 \end{cases}$

تصف المعادلتان علاقات لا تتحقّق معًا، لا يوجد حلّ لهيئة المعادلات..

- يمكن أحيانًا تمييز مبنى ثابت لكلّ هيئات المعادلات، وعندئذٍ من الأفضل أن لا نبسّط.

مثال: في المهمّة 5، مبنى جميع هيئات المعادلات يشبه هيئة المعادلات المعطاة: $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-4y=11 \end{cases}$

لذا، يمكن الاستعانة بحلّ هيئة المعادلات المعطاة ($x=5$ وَ $y=1$)

لحلّ هيئات المعادلات الأخرى.

مثلًا: عند حلّ هيئة المعادلات $\begin{cases} 2(x-1)+3(y-1)=13 \\ 3(x-1)-4(y-1)=11 \end{cases}$

نحصل على: $x-1=5$ لذا، $x=6$

$y-1=1$ لذا، $y=2$

مجموعة مهامّ

1. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$ حلّها (7, 1). افحصوا.

استعينوا، في كلّ بند، بحلّ هيئة المعادلات المعطاة وجدوا حلّ الهيئة.

أ. $\begin{cases} 2x - 6y = 8 \\ 3x - y = 20 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 6x - 2y = 40 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 5x - 15y = 20 \\ 9x - 3y = 60 \end{cases}$

2. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} 2y - x = 1 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$ حلّها (3, 2). افحصوا.

استعينوا، في كلّ بند، بحلّ هيئة المعادلات المعطاة وجدوا حلّ الهيئة.

أ. $\begin{cases} 4y - 2x = 2 \\ 10y + 3x = 29 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 8y - 4x = 4 \\ -10y - 3x = -29 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 6y - 3x = 3 \\ 5y + 1.5x = 14.5 \end{cases}$

3. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ -2x + 5y = -12 \end{cases}$ حلّها (2−, 1). افحصوا.

استعينوا، في كلّ بند، بحلّ هيئة المعادلات المعطاة وجدوا حلّ الهيئة.

أ. $\begin{cases} 6x - 4y = 14 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 6y - 9x = -21 \\ 10y - 4x = -24 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 1.5x - y = 3.5 \\ x - 2.5y = 6 \end{cases}$

4. اكتبوا هيئة معادلات حلّها مساوٍ لحلّ هيئة المعادلات: $\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 4x + 3y = 15 \end{cases}$

5. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y + 1 = 8 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = x + 4 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y - x - 1 = 6 \end{cases}$

6. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 3(x + y) + y = 7 \\ 2(x - y) + 3y = 7 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} 7(x + 3) + 3y = 27 \\ 5(1 - y) - x = 8(x + 1) + y \end{cases}$ ت. $\begin{cases} 5 - (2x + 3) = y + 2 \\ 5 - 2(3x + 2) = 9y + 13 \end{cases}$

7. حلّوا، في كلّ بند، هيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} \frac{3x+y}{2} - x = -4 \\ 2y - 3x = 9 \end{cases}$ ب. $\begin{cases} \frac{3x+2y+2}{6} = \frac{2x-y+3}{2} \\ 2x + 3y + 11 = 0 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + \frac{y+1}{3} = 2.5 \\ 2(x - 4) - 5(y - 3) = x + y \end{cases}$

8. معطاة هيئة المعادلات: $\begin{cases} 2x + 5y = 12 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$

أ. حلّوا الهيئة.

ب. استعينوا بحلّ هيئة المعادلات المعطاة، وحلّوا هيئات المعادلات الآتية.

(i) $\begin{cases} 2(x + 1) + 5(y + 1) = 12 \\ 3(x + 1) + 4(y + 1) = 11 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(x - 1) + 5(y - 1) = 12 \\ 3(x - 1) + 4(y - 1) = 11 \end{cases}$

9. معطاة هيئة المعادلات: $\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 4x + 5y = 15 \end{cases}$

أ. حلّوا الهيئة.

ب. استعينوا بحلّ هيئة المعادلات المعطاة، وحلّوا هيئات المعادلات الآتية.

(i) $\begin{cases} 2(x + 1) - 3(y + 2) = 13 \\ 4(x + 1) + 5(y + 2) = 15 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(x - 3) - 3(y + 1) = 13 \\ 4(x - 3) + 5(y + 1) = 15 \end{cases}$

10. معطاة هيئة المعادلات: $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 10y + 3x = -10 \end{cases}$

أ. حلّوا الهيئة.

ب. استعينوا بحلّ هيئة المعادلات المعطاة، وحلّوا هيئات المعادلات الآتية.

(i) $\begin{cases} 2(y + 1) - (x + 2) = 6 \\ 10(y + 1) + 3(x + 2) = -10 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 2(2y - 1) - (x + 3) = 6 \\ 10(2y - 1) + 3(x + 3) = -10 \end{cases}$

11. أ. جدوا حلًّا لكلّ هيئة معادلات، اشرحوا معنى الحلّ بطريقة بيانيّة (هندسيّة).

(i) $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 \\ 4x - 3y + 13 = 0 \end{cases}$

ب. استعينوا بحلّ هيئات المعادلات التي وردت في بند أ، وجدوا، دون أن تحلوا، حلولًا لهيئات المعادلات الآتية.

(i) $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = xy + 5 \\ \frac{x+1}{4} + \frac{y+2}{5} = 1 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x - 3y + 13 = 0 \\ (x - 1)(y + 2) = xy - 7 \end{cases}$

الدرس الرابع: إيجاد قانونيّة في هيئة المعادلات

حلّ **نعيم، هيثم، ياسمين** و**ليلى** أربع هيئات معادلات.

هيئة **نعيم**: $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$ هيئة **ياسمين**: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 5y = 4 \end{cases}$

هيئة **هيثم**: $\begin{cases} 8x + 9y = 10 \\ 5x + 4y = 3 \end{cases}$ هيئة **ليلى**: $\begin{cases} 9x + 10y = 11 \\ -2x - 3y = -4 \end{cases}$

نحلّ ونجد قانونيّة مثيرة للاهتمام في هيئات المعادلات.

نتطرّق في المهام 1 - 4 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. أ. تمعّنوا في هيئات المعادلات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة، وحاولوا أن تكتشفوا صفة مشتركة لجميع الهيئات.

ب. حلّوا الهيئات.

ت. ما هو المشترك للهيئات الأربع؟

2. نظرت **إيمان** إلى حلول زملائها وسجّلت الهيئة الآتية: $\begin{cases} 99x + 100y = 101 \\ 99x + 98y = 97 \end{cases}$

قالت **إيمان**: حلّ هيئة معادلتي يساوي حلّ هيئة معادلاتكم.

هل قول **إيمان** صحيح؟ اشرحوا.

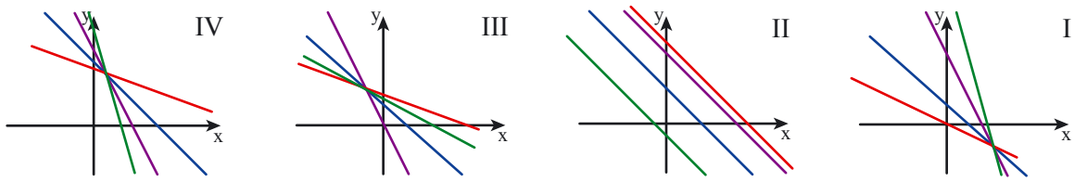
3. قال **رامي**: في كلّ معادلة، هنالك ثلاثة أعداد متتاليّة مرتّبة تصاعديًّا أو تنازليًّا.

أ. هل قول **رامي** صحيح؟ اشرحوا.

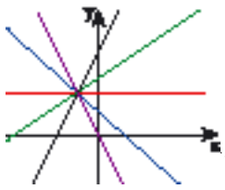
ب. اكتبوا هيئة معادلات من عندكم بحيث تحقّق الصفة التي ذكرها **رامي**.

افحصوا هل حلّ الهيئة التي سجّلتموها يساوي حل الهيئات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة؟

4. أمامكم رسوم بيانيّة، أيّ رسم بيانيّ يصف المعادلات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة؟ اشرحوا.



رأينا أنّ $(2, -1)$ هو حلّ كلّ معادلة صورتها $ax + by = c$
عندما تكون a, b, c أعداد متتالية.
الشرح: نسجِّل المعادلة كالتالي: $ax + (a + 1)y = a + 2$
نعوِّض $x = -1, y = 2$ في المعادلة ونحصل على: $a + 2(a + 1) = a + 2$
نحصل بعد التبسيط على المساواة $a + 2 = a + 2$



5. الأعداد a, b, c هي أعداد متتالية.
الأعداد d, e, f هي أعداد متتالية.
اشرحوا لماذا حلّ الهيئة $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ هو $(2, -1)$

6. أ. حلّوا الهيئات الآتية.

$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 5y = 9 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$

ب. جدوا، دون أن تحلوا، حلّ الهيئة الآتية: $\begin{cases} x + 4y = 7 \\ x + 6y = 11 \end{cases}$

7. قالت **عدن**: النقطة $(2, -1)$ هي حلّ كل هيئة معادلات فيها الفرق بين الأعداد ثابت.
هل قول **عدن** صحيح؟ اشرحوا.

ادّعاء: إذا كانت معطاة معادلات صورتها $ax + by = c$ والفرق بين a, b وَ c في كلّ معادلة هو فرق ثابت k،
عندئذٍ تمرّ جميع المستقيمات عبر النقطة $(2, -1)$
برهان الادّعاء: نسجِّل المعادلة بالصورة $ax + (a + k)y = a + 2k$, a وَ k أعداد معيّنة .
نعوّض $x = -1, y = 2$ في المعادلة العامّة
ونحصل على $-a + 2(a + k) = a + 2k$
نحصل بعد التبسيط على المساواة $a + 2k = a + 2k$

مجموعة مهامّ

1. هل حلّ الهيئة $\begin{cases} 6x + 7y = 8 \\ 9x + 10y = 11 \end{cases}$ هو $(2, -1)$؟ اشرحوا.

2. سجّلوا هيئة معادلات حلّها $(2, -1)$.

3. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 6x + 7y = 8 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ 3x + 10y = 17 \end{cases}$

4. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 8x + 7y = 6 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

5. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 5x + 8y = 11 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 6x - 2y = -10 \\ 2x + 8y = 14 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 10x + 4y = -2 \\ -3x + 5y = 13 \end{cases}$

6. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases} 3(x + y) - y = 1 \\ 2(x + 3) + 3(y - 1) = 7 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2(x + 1) + 3y = 6 \\ 3(x - 2) + 5y = 1 \end{cases}$

7. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases}(x+1)(y-3)=xy+2\\(x-2)(y-1)=xy-1\end{cases}$

ب. $\begin{cases}(x+3)(y-2)=xy+2\\(x-4)(y+1)=xy-13\end{cases}$

8. جدوا، في كلّ بند، حلًّا لهيئة المعادلات.

أ. $\begin{cases}\frac{x+1}{2}+\frac{y+1}{3}=1\\\frac{3x-1}{4}-\frac{y-2}{3}=-1\end{cases}$

ب. $\begin{cases}\frac{3y-2x}{2}+\frac{y-x}{3}=5\\\frac{2x+5}{3}-\frac{y+2}{4}=0\end{cases}$

9. أ. الحلّ لكلّ هيئة معادلات هو أحد الأزواج الآتية: $a1,\ \frac{1}{2}k$ $a-1,\ 1\frac{1}{2}k$

لائموا كلّ حلّ للمعادلة المناسبة.

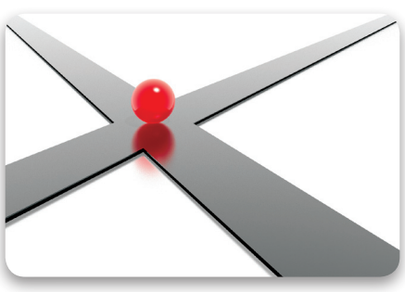
I. $\begin{cases}x+y=\frac{1}{2}\\x-2y=-4\end{cases}$ II. $\begin{cases}x+2y=2\\4x-2y=3\end{cases}$ III. $\begin{cases}y=-\frac{1}{2}x+1\\y=x+2\frac{1}{2}\end{cases}$ IV. $\begin{cases}y=-2x-\frac{1}{2}\\y=1\frac{1}{2}\end{cases}$

ب. أُخذت المعادلتان الآتيتان من بند أ $\begin{cases}y=-2x-\frac{1}{2}\\y=1\frac{1}{2}\end{cases}$ ما هو حلّ الهيئة؟ اشرحوا.

10. انسخوا وأكملوا، في كلّ بند، أعدادًا مناسبة في الأماكن الفارغة بحيث تَنْتُج هيئة حلّها $(2,\ -1)$.

أ. $\begin{cases}\square\cdot x+2y=5\\3x-5y=\cdot\ \square\end{cases}$

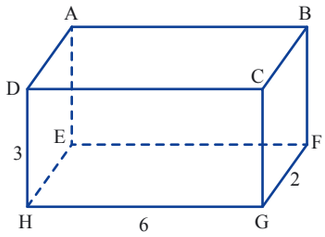
ب. $\begin{cases}2x-\square\cdot y=-6\\\square\cdot x+\square\cdot y=6\end{cases}$



نحافظ على لياقة رياضيّة

مكعّب وصندوق

1. معطى صندوق. أُعِدّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

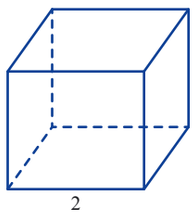


أ. سجّلوا 3 أزواج من السطوح المتوازية.

ب. احسبوا مساحة السطح الخارجيّ للصندوق.

ت. احسبوا حجم الصندوق.
(**للتذكير**: حجم الصندوق يساوي حاصل ضرب مساحة القاعدة في طول ارتفاع الصندوق).

2. أمامكم علبة مكعّبة الشكل. أُعِدّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

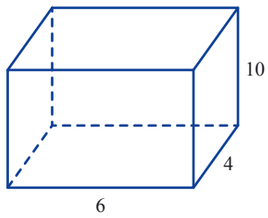


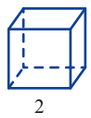
ت. احسبوا حجم العلبة.

ب. احسبوا مساحة السطح الخارجيّ للصندوق.

ت. بودّنا أن نطليّ غلاف العلبة.
نحتاج 0.1 لترًا من الدهان لكلّ متر مربّع.
كم لترًا من الدهان نحتاج لطلاء كلّ العلبة؟

3. أمامكم مكعّب صغير وصندوق.
أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.
كم مكعبًا صغيرًا نحتاج كي نملئ الصندوق؟ اشرحوا.





4. اقترحوا 3 قياسات مختلفة لصناديق حجم كلّ منها 72 سنتمترًا مكعّبًا.

5. أ. معطى حجم مكعّب 1,000 سنتمتر مكعّب.
ما هو طول ضلع المكعّب؟
هل يمكن أن نبني هيكل هذا المكعّب من عصا طولها 1 متر؟ اشرحوا.
(للتذكير: هيكل المكعّب هو مجموع أطوال أضلاع المكعّب).

ب. معطى حجم مكعّب 3,375 مترًا مكعّبًا.
ما هو طول الخيط الذي يمكن أن نبني منه هيكل هذا المكعّب؟ اشرحوا.