الوحدة الواحدة والثلاثون: مسائل كلاميّة

الدرس الأوّل: نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة متغيّرات

اشترت مجموعة من التلاميذ حاجيات من دكاكين الحيّ استعدادًا للرحلة السنويّة.
استلم التلاميذ فواتيرًا.
نبحث معلومات يمكن استخراجها من الفواتير بطريقة حسابيّة وبمساعدة هيئة معادلات.

1. في دكان سامي

مجموعة عدن:

دكان سامي فاتورة			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة بالشواقل	السعر الكليّ بالشواقل
عُلب الذرة	4	5	
عُلب التونة	6	4.60	
المجموع الكليّ			

مجموعة سحر:

دكان سامي فاتورة			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة بالشواقل	السعر الكليّ بالشواقل
عُلب الذرة		5	25
عُلب التونة		4.60	36.80
المجموع الكليّ			

انسخوا وأكملوا التفاصيل الناقصة في كلّ فاتورة.

2. في دكان رامي

مجموعة جمال:

دكان رامي فاتورة			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة بالشواقل	السعر الكليّ بالشواقل
عُلب الذرة	8		
عُلب التونة	6		
المجموع الكليّ			66.80

مجموعة يوسف:

دكان رامي فاتورة			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة بالشواقل	السعر الكليّ بالشواقل
عُلب الذرة	4		
عُلب التونة	8		
المجموع الكليّ			58.40

أ. بناءً على هذه الفواتير، هل يمكن تحديد سعر علبة الذرة وسعر علبة التونة **في دكان رامي**؟ اشرحوا.

ب. ارمزوا بـ x إلى سعر علبة الذرة (بالشواقل)، وارمزوا بـ y إلى سعر علبة التونة (بالشواقل) **في دكان رامي**.
أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا

ت. انسخوا وأكملوا التفاصيل الناقصة (بمساعدة الحرفان x وَ y) في الفتورتين.

ث. اكتبوا معادلة مناسبة بناءً على كلّ فاتورة.

ج. حلّوا هيئة المعادلات الّتي حصلتم عليها.

ح. ما هو سعر علبة الذرة؟ وما هو سعر علبة التونة؟ افحصوا إذا ما كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

للتذكير

تعلّمنا أن نحلّ مسألة كلاميّة بمساعدة معادلات.

مراحل حلّ المسألة هي:

- بناء نموذج رياضيّ يشمل: تعريف متغيِّرات، تمييز شروط المسألة ومحدوديّة المتغيِّرات، كتابة تعابير جبريّة، بناء معادلة (أو هيئة معادلات) مناسبة.
- إيجاد حلّ المعادلة (أو هيئة المعادلات).
- كتابة الإجابة بطريقة كلاميّة مناسبة للحلّ من خلال التطرق إلى معطيات المسألة ومحدوديّة المتغيِّرات

مثال: في المهمّة 2،

x يمثِّل سعرعلبة الذرة بالشواقل $(x > 0)$

y يمثِّل سعرعلبة التونة بالشواقل $(y > 0)$

هيئة معادلات مناسبة: $\begin{cases} 8x + 6y = 66.80 \\ 4x + 8y = 58.40 \end{cases}$

حلّ هيئة المعادلات: $x = 4.60 \, , \, y = 5$

الإجابة: سعر علبة الذرة 4.60 شواقل، وسعر علبة التونة 5 شواقل.

عُلب المخللات

اقترحت حكومة نابليون، سنة 1800، أن تمنح جائزة مالية عالية لمن يكتشف طريقة مريحة وناجعة للحفاظ على كمّيّات كبيرة من الطعام الّتي يستعملها الجيش الفرنسي أثناء حملاته. فاز في الجائزة حلواني فرنسيّ، سنة 9081، وقد اكتشف طريقة للحفاظ على طعام موجود في مرطبان زجاجيّ. فيما بعد طُوّرت علبة المخللات، وهي عبارة عن علبة مُحكمة الإغلاق، يُحفظ الطعام داخلها بعد مروره بعمليّة تعقيم للقضاء على الكائنات الحيّة الدقيقة الملوثة. اكتشفوا مفتاح علب المخللات بعد مرور 30 سنة. حتّى هذا الاكتشاف فتح الجنود الفرنسيون علب المخللات بمساعدة سكين حادّ أو حجر حادّ.

خلافًا للاعتقاد الشائع، ليس بالضرورة أن تحتوي المخللات على مواد حافظة.

لا يمكن الحفاظ على الطعام في علبة المخللات بعد فتحها.

3. اشترت مجموعة **ماهر** من "سوبر بوتيك".

أمامكم الفاتورة التي حصلوا عليها:

سوبر بوتيك فاتورة			
المنتوج	عدد العلب	سعر العلبة بالشواقل	السعر الكليّ بالشواقل
عُلب الذرة		9.20	
عُلب التونة		10	
المجموع الكليّ	17		166

أ. هل هنالك حاجة إلى المزيد من المعطيات لمعرفة عدد العلب التي اشتروها من كلّ نوع؟ اشرحوا.

ب. عرِّفوا متغيّرين، واكتبوا هيئة معادلات مناسبة.

ت. كتبت نورة معادلة بمجهول واحد، وادّعت بأنه يمكن حلّ المسألة بمساعدة هذه المعادلة.
اشرحوا حلّ نورة.

يمكن أحيانًا حلّ مسائل كلاميّة:
بمساعدة هيئة معادلات بمتغيِّرين أو بمساعدة معادلة بمتغيِّر واحد.

مثال:

في مهمّة 3،

- حلّ بمساعدة هيئة معادلات **بمتغيِّرين**

نرمز:

x عدد عُلب الذُّرة $(x \geq 0$,x عدد صحيح)

y عدد عُلب التونة $(y \geq 0$,y عدد صحيح)

نحصل على هيئة المعادلات:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ 9.2x + 10y = 166 \end{cases}$$

- حلّ بمساعدة معادلة **بمتغيِّر واحد**

نرمز:

x عدد عُلب الذُّرة

$(0 \leq x \leq 17$,x عدد صحيح)

$17 - x$ عدد عُلب التونة

نحصل على المعادلة:

$$9.2x + 10(17 - x) = 166$$

4. حلّوا المسألة الآتية بالطريقة المريحة لكم (بمساعدة متغيِّر واحد أو بمساعدة متغيّرين).

ذهب 36 تلميذًا إلى المسرح.
اشتروا نوعين من التذاكر:
تذكرة بسعر 40 شاقلاً للتذكرة الواحدة، وتذكرة بسعر 30 شاقلًا للتذكرة الواحدة.
السعر الكليّ الّذي دفعوه هو 1,320 شاقلًا.
كم تذكرة من كلّ نوع اشترى التلاميذ؟

5. حلّوا، في كل بند، هيئة المعادلات، وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 4x + 5y = 22 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x = 1 - 5y \\ x = 2y - 6 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 5y - 4(x + 2) = 16 \\ 6x - 2(y + 3) = 3x - 17 \end{cases}$

6. حلول المعادلة $2x + 3y = 18$ هي أزواج من الأعداد الطبيعيّة.
جدوا جميع الحلول الممكنة.

مجموعة مهامّ

يشتري **السيد هلال** كلّ شهر طوابعًا بريديّة وظروفًا بمبلغ كليّ مقداره 44 شاقلًا.
سعر الطابع الواحد 3 شواقل، وسعر الظرف الواحد شاقلاً واحدًا.
استعينوا بهذه المعطيات للإجابة عن المهمّات 1 - 4 .

1. أ. اقترحوا ثلاث إمكانيّات مختلفة لعدد الطوابع ولعدد الظروف التي يشتريها السيد هلال في الشهر الواحد.
ب. هل يمكن أنّ يشتري 10 طوابع؟ 15 طابعًا؟ اشرحوا.
ت. اشترى السيد هلال 11 طابعًا في شهر شباط. كم مغلفًا اشترى في هذا الشهر؟
ث. اشترى السيد هلال 8 ظروف في شهر آذار. كم طابعًا اشترى في هذا الشهر؟

2. مجموع الطوابع والظروف التي اشتراها السيد هلال في شهر نيسان هو 30.
كم طابعًا وكم ظرفًا اشترى في هذا الشهر؟

3. عدد الطوابع التي اشتراها السيد هلال، في شهر أيار، مساوٍ لعدد الظروف.
كم طابعًا وكم ظرفًا اشترى في هذا الشهر؟

4. في شهر حزيران، النسبة بين عدد الطوابع إلى عدد الظروف التي اشتراها السيد هلال هي 3:2.
كم طابعًا وكم ظرفًا اشترى في هذا الشهر؟

5. اشترت **رانية** منتوجات حليب من دكان "**سوبر جيّد**".
مُحي قسم من المعطيات في الفاتورة.
تمعّنوا في الفاتورة وأجيبوا عن السؤالين.
أ. كم شاقلاً دفعت **رانية** مقابل الجبنة البيضاء؟
ب. كم علبة مُحلّى الفاكهة اشترت **رانية**؟ اشرحوا.

التاريخ: 28/9/13

دكان "سوبر جيّد"

اسم المنتوج	سعر المنتوج	الكمّيّة	المجموع للدفع
محلّى الفاكهة	6.23		
لبن	6.00	3	
جبنة بيضاء	6.29	5	
المجموع:			86.83

6. مجموع عددين هو 16.
إذا ضربنا العدد الأول في 2 وضربنا العدد الثاني في 3 وجمعنا حاصليِ الضرب فنحصل على 28.
ما هما العددان؟

7. حلّوا، في كلّ بند، هيئات المعادلات الآتية، وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 6x + 5 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 7x + 2y = 9 \end{cases}$

8. حلّوا، في كلّ بند، هيئات المعادلات الآتية، وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ y + 2x = 3 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} 3(x + y) + 2(y + 5) = 20 \\ 5(x - 2) + 3(y - x) = 1 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} y = x + 3 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 5x + 5(y - 1) = 24 \\ 5(x - 2) + 3(y - x) = 1 \end{cases}$

9. حلّوا، في كلّ بند، هيئات المعادلات الآتية، وافحصوا إجاباتكم.

أ. $\begin{cases} y = x - 5 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 5 \\ 2y - \frac{x}{2} = 12 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{3} = 4 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} y - 2x = 4 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} x - y = 5 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ \frac{3x}{5} - \frac{2-y}{5} + 4 = 0 \end{cases}$

10.

الدرس الثاني: متغيِّر واحد أم متغيّرين؟

حلّ مسائل في الحركة بمساعدة متغيِّر واحد أو بمساعدة متغيّرين

تركض **سهاد**، كلّ صباح، باتجاه معين، وتعود إلى البيت مشيًّا في نفس المسار.
سرعة ركض **سهاد** 18 كم في الساعة، وسرعة مشيها 6 كم في الساعة.
خرجت، في صباح يوم الأحد، من بيتها عند الساعة الـ 6:00 ورجعت إلى البيت عند الساعة الـ 7:00.

خمّنوا المسافة التي قطعتها **سهاد** ركضًا في هذا الصباح؟

نحلّ مسائل في الحركة بطرق مختلفة.

1. حلّ بمساعدة متغيِّرين

رَمَز **عمر** بـ x إلى زمن ركض **سهاد** بالساعات، ورَمَز بـ y إلى زمن مشيها بالساعات.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. انسخوا الجدول وأكملوا.

.

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
الركض	18	x	
المشي		y	

ت. سجّل **عمر** هيئة معادلات.
صفوا كلّ معادلة بالكلمات.

$$\begin{cases} 18x = 6y \\ x + y = 1 \end{cases}$$

ث. حلّوا هيئة المعادلات وجدوا زمن ركض **سهاد** وزمن مشيها في يوم الأحد.
افحصوا ما اذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

ج. ما هي المسافة التي قطعتها **سهاد** في هذا الصباح؟

2. حلّ بمساعدة متغيِّر واحد

رَمَزت **أماني** بـ x إلى زمن ركض **سهاد** بالساعات.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. انسخوا الجدول وأكملوا.

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
الركض		x	
المشي			

ت. سجّلت **أماني** المعادلة $18x = 6(1 - x)$.
صفوا معادلة **أماني** بالكلمات.

ث. حلّوا المعادلة وجدوا زمن ركض **سهاد** وزمن مشيها.
افحصوا ما اذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

ج. ما هي المسافة التي قطعتها **سهاد** في هذا الصباح؟

3. حلّ آخر بمساعدة متغيِّر واحد

رَمَزت **هناء** بـ x إلى المسافة التي قطعتها سهاد ركضًا (أو مشيًّا) بالكيلومترات.

أ. أيّ قيم مناسبة لـ x بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. انسخوا الجدول وأكملوا..

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
الركض	18	$\frac{x}{18}$	x
المشي			x

ت. سجّلت **هناء** المعادلة $\frac{x}{18}+\frac{x}{6}=1$.

صفوا المعادلة التي سجّلتها **هناء** بالكلمات.

ث. حلّوا المعادلة وجدوا المسافة التي قطعتها **سهاد** ركضًا في هذا الصباح.

افحصوا ما اذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

4. أ. تناقشوا حول إيجابيّات وسلبيّات كلّ طريقة حلّ.

ب. أيّ طريقة حلّ تفضلون؟ اشرحوا.

في كثير من الأحيان، نجد حلاً للمسائل الكلاميّة بمساعدة معادلة (أو هيئة معادلات).
يمكن حلّ المسألة الكلاميّة بواسطة معادلات مختلفة. من الأسهل كتابة قسم منها، و من الأسهل حلّ قسم آخر منها.
تمثّل المتغيِّرات، في معادلات مختلفة، مقادير مختلفة. لذلك، عند حلّ المسائل بطريقة جبريّة، من المهم كتابة ما يمثّل كلّ متغيِّر.

5. قال **أشرف**: أنا لا احتاج إلى معادلات لحلّ المسألة الموجودة في مهمّة الافتتاحيّة.

أنا أعرف أنّ النسبة بين سرعة الركض إلى سرعة المشي هي 3:1، لذا النسبة بين الزمنين هي 1:3.

يمكن الاستنتاج أن سهاد ركضت 15 دقيقة وسارت 45 دقيقة.

هل ادعاء أشرف صحيح؟ اشرحوا.

6. حلّوا بالطريقة المريحة لكم.

سار راكب دراجة هوائية من القرية متجها نحو المدينة بسرعة ثابتة مقدارها 18 كم في الساعة.

وعاد إلى القرية بسرعة ثابتة مقدارها 30 كم في الساعة.

الزمن الكليّ الذي استغرقه السفر هو ساعتين.

ما هي المسافة بين القرية والمدينة؟

إستير روط- شحموروف: هي إحدى لاعبات الرياضة البارزات في إسرائيل. كان انجازها الأكبر في أولمبيادة مونتيريول، سنة 1976، عندما فازت في المكان السادس في المسابقة النهائيّة لركض مسافة مئة متر مع حواجز. هي الرياضيّة الاسرائيليّة الأولى التي اشتركت في التصفيات النهائيّة في الأولمبيادة، وكان ذلك أفضل انجاز حاز عليه عداء إسرائيليّ في الألعاب الأوليمبية حتى أولمبيادة سيدني سنة 2000. حُطّم قسم من أرقامها القياسيّة الاسرائيليّة سنة 2000 فقط. تمّ اختيار شحموروف أكثر من مرّة كرياضيّة متميزة في إسرائيل. وفازت بجائزة اسرائيل للرياضة والتربيّة البدنيّة سنة 1999، كانت إحدى حملة الشعلة في يوم الاستقلال سنة 2004..

مجموعة مهامّ

1. تذهب **نورة** إلى المدرسة مشيًّا لمدّة 20 دقيقة بسرعة ثابتة.
تعود إلى البيت من المدرسة، في نفس المسار، بسرعة ثابتة أقل بـ 10 أمتار في الدقيقة، لذا يستغرق زمن رجوعها 25 دقيقة.

ما هي المسافة بين بيت **نورة** والمدرسة؟

أ. استعملت **سعاد** متغيِّرًا واحدًا وكتبت ما يلي:

	السرعة (أمتار في الدقيقة)	الزمن (دقائق)	المسافة (أمتار)
ذهابًا	x		
إيابًا	x – 10		

انسخوا الجدول وأكملوا بحسب اقتراح **سعاد**.

أيّ قيم مناسبة لـ x بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

اكتبوا معادلة مناسبة وحلّوها.

ب. استعملت **سمر** متغيِّرين وكتبت ما يلي:

	السرعة (أمتار في الدقيقة)	الزمن (دقائق)	المسافة (أمتار)
ذهابًا	x		
إيابًا	y		

انسخوا الجدول وأكملوا بحسب اقتراح **سمر**.

أيّ قيم مناسبة لـ x ، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ت. ما هي المسافة بين بيت **نورة** والمدرسة؟ افحصوا إذا ما كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

2. يسافر **كمال** و**سامر** بسرعة ثابتة، في نفس المسار، من قرية **الوسن** إلى قرية **الزنبق**.
تصف المعطيات، التي تظهر في الجدول، سفرهما.

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
كمال	90	x	y
سامر	75	x + 1	

أ. انسخوا الجدول وأكملوا.

ب. أيّ قيم مناسبة لـ x ، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ت. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ث. ما هو زمن سفر **كمال**؟
ما هو زمن سفر **سامر**؟
ما هي المسافة بين قرية **السوسن** وقرية **الزنبق**؟
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

.

3. تسير شاحنة من إيلات إلى تل أبيب.
تخرج من إيلات عند الساعة الـ 5:00 صباحًا وتسير بسرعة ثابتة مقدارها 60 كم في الساعة.
إذا ازدادت سرعتها بـ 12 كم في الساعة، يقل زمن سفرها بساعة واحدة.
أيّ ساعة تصل الشاحنة تل أبيب؟
ما هي المسافة بين إيلات وتل أبيب؟

4. المسافة بين تل أبيب وإيلات هي 360 كم.
تخرج شاحنة من تل أبيب إلى إيلات عند الساعة الـ 7:00 صباحًا.
تخرج سيّارة من إيلات إلى تل أبيب عند الساعة الـ 8:00 صباحًا.
سرعة الشاحنة تساوي $\frac{3}{4}$ سرعة السيارة.
تسير الشاحنة والسيّارة بسرعة ثابتة في نفس المسار، وقد التقيتا عند الساعة الـ 11:00.
ما هي سرعة الشاحنة؟
ما هي سرعة السيّارة؟

5. تسير شاحنة، كلّ يوم، من A إلى B وتعود في نفس المسار.
تسير الشاحنة من A إلى B بسرعة ثابتة مقدارها 40 كم في ساعة، وتعود بسرعة ثابتة مقدارها 60 كم في الساعة.
زمن السفر ذهابًا وإيابًا هو 5 ساعات.

أ. انسخوا الجدول وأكملوا.

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
من A إلى B		x	
من B إلى A		y	

ب. أيّ قيم مناسبة لـ x ، واي قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ت. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ج. ما هو زمن سفر الشاحنة من A إلى B؟ ما هو زمن سفرها من B إلى A؟ ما هي المسافة بين A وَ B؟
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

6. خرج **باسم** و**راسم** في جولة بدراجتيهما. يعرض الجدول معطيات سفرهما.

	السرعة (كم في الساعة)	الزمن (ساعات)	المسافة (كم)
باسم	30	x	y
راسم	20	x + 3	y – 10

أ. اكتبوا قصة مناسبة لمعطيات الجدول.

أيّ قيم مناسبة لـ x ، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة للقصة وحلّوها.

ت. ما هو زمن سفر **باسم**؟ ما هي المسافة التي قطعها؟

ت. ما هو زمن سفر **راسم**؟ ما هي المسافة التي قطعها؟
افحصوا إذا ما كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

7. تخرج شاحنة، كلّ يوم، مليئة بالبضائع من المصنع إلى أماكن مختلفة.
يبعد **كيبوتس حوريش** عن المصنع مسافة 130 كم.
خرجت الشاحنة من المصنع متجهه نحو الكيبوتس.سارت ساعتين على شارع مُعبّد وساعتين على شارع غير مُعبّد.
تبعد بلدة **ياعار** عن المصنع 95 كم.
خرجت الشاحنة من المصنع متجهه نحو البلدة. سارت 30 دقيقة على شارع مُعبّد وَ 3 ساعات على شارع غير مُعبّد.
ارمزوا بـ x إلى سرعتها الثابتة على شارع مُعبّد (بالكيلومترات في الساعة)، وارمزوا بـ y إلى سرعتها الثابتة على شارع غير مُعبّد (بالكيلومترات في الساعة).
اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وجدوا سرعة الشاحنة على شارع مُعبّد وسرعتها على شارع غير مُعبّد.
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

8. أمامكم حلول لهيئات معادلات. قسم منها حلول غير صحيحة.
جدوا الأخطاء واقترحوا كيف يمكن تصحيحها؟

أ.
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ y &= -2x \\ \hline x - 2x &= 3 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \\ y &= -2 \cdot (-3) = 6 \end{aligned}$$

ب.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x &= 2y \\ \hline 2y + 2y &= 10 \\ 4y &= 10 \\ y &= 2.5 \\ x &= 2 \cdot 2.5 = 5 \end{aligned}$$

ت.
$$\begin{aligned} y - 4x &= 20 \\ 2x + 3y &= 18 \\ \hline y &= 20 + 4x \\ 2x + 3(20 + 4x) &= 18 \\ 2x + 60 + 4x &= 18 \\ 6x &= -42 \\ x &= -7 \\ y &= 20 + 4 \cdot (-7) = -8 \end{aligned}$$

ث.
$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x + y &= 2 \\ \hline y &= 2 - x \\ 2x + 3(2 - x) &= 6 \\ 2x + 6 - 3x &= 6 \\ -x + 6 &= 6 \\ -x &= 0 \end{aligned}$$

9. المسافة بين **هاني** و**سامي** هي 30 كم. خرجا يوم الأحد مشيًّا على الأقدام الواحد باتجاه الآخر.
التقيا بعد مرور 4 ساعات. سرعة كلّ واحد منهما ثابتة.
خرج **سامي**، يوم الاثنين، بعد مرور 5 ساعات منذ خروج هاني، والتقيا بعد مرور ساعتين منذ خروج **سامي**.
ما هي سرعة مشي **هاني**؟ ما هي سرعة مشي **سامي**؟

10. تجوّل **نزار** لمدة 5 ساعات.
سار، في البداية، في طريق عادية بسرعة ثابتة مقدارها 4 كم في الساعة.
بعد ذلك صعد **نزار** جبلًا بسرعة ثابتة مقدارها 3 كم في الساعة.
بَعد وصوله قمة الجبل عاد إلى بيته في نفس المسار.
سار بسرعة 6 كم في الساعة أثناء نزوله من قمة الجبل.
ما هي المسافة التي قطعها **نزار** في جولته؟

الدرس الرابع: نحلّ مسائل كلاميّة بمساعدة الموازنة

حصلت كلّ مجموعة من مجموعات التلاميذ على وعاءين فيهما سائل.
يوجد في الوعاء الأوّل ماء، وفي الوعاء الثاني عصير.
x يمثّل حجم الماء باللترات في الوعاء الأوّل $(x > 0)$.
y يمثّل حجم العصير باللترات في الوعاء الثاني $(y > 0)$

نحاول أن نكتشف، إذا كان الأمر ممكنًا، كمّيّة الماء وكمّيّة العصير في كلّ وعاء، في البداية، في حالات مختلفة.

نتطرّق في المهامّ 1 – 4 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

1. في مجموعة **أمير**

أ. كان حجم الماء، في البداية، مساويًا لحجم العصير.
اكتبوا معادلة مناسبة لهذه الحالة.

ب. بعد ذلك، نقل التلاميذ 4 لترات من وعاء الماء إلى وعاء العصير.
اكتبوا تعبيرين جبريّين يمثّلان حجم السائل في كلّ وعاء بعد عمليّة النقل.
أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟

ت. بعد عمليّة النقل، قاسوا ووجدوا أن حجم الماء أقلّ ضعفين من حجم المخلوط (ماء وعصير).اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ث. ما هو حجم الماء وما هو حجم العصير، في كلّ وعاء، في البداية؟
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

2. في مجموعة **أميرة**

كان حجم العصير، في البداية، ضعفيْ حجم الماء.
بعد ذلك، نقل التلاميذ 5 لترات من وعاء الماء إلى وعاء العصير.
قاسوا ووجدوا أن حجم المخلوط (ماء وعصير) يساوي 4 أضعاف حجم الماء.

أ. اكتبوا تعبيرين جبريين يمثّلان حجم السائل في كلّ وعاء في البداية وبعد عمليّة النقل.
أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟

ب. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ث. جدوا حجم الماء وحجم العصير، في كلّ وعاء، في البداية.
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

3. في مجموعة **مها**

كان حجم السائلين معًا، في البداية، في الوعاءين 16لترًا.
بعد ذلك، أضافوا لترين من الماء إلى وعاء الماء، وسكبوا 3 لترات من وعاء العصير.
عندئذٍ أصبح حجم الماء ضعفيْ حجم العصير.
أي هيئة معادلات مناسبة للقصة؟ اشرحوا.

أ. $\begin{cases} x + y = 16 \\ x + 2 = 2(y - 3) \end{cases}$

ب. $\begin{cases} x + y = 16 \\ 2(x + 2) = y - 3 \end{cases}$

للتذكير

إذا أردنا كتابة معادلة عن كمّيّات غير متساوية فنُنْتِج موازنة بين الطرفين على النحو الآتي:
نُصغّر الكمّيّة الكبرى، أو نُكبّر الكمّيّة الصغرى.
مثال: في مجموعة أمير، بعد عمليّة النقل، يمكن أن:

نضرب في 2 حجم الماء (الحجم الأصغر) $2 \cdot \underbrace{(x-4)}_{\text{حجم الماء}} = \underbrace{y+4}_{\text{حجم عصير}}$

أو

نُقسِّم على 2 حجم العصير (الحجم الأكبر). $\underbrace{x-4}_{\text{حجم الماء}} = \underbrace{(y+4)}_{\text{حجم عصير}} : 2$

4. حدّدوا، في كلّ بند، ما إذا كانت المعطيات ممكنة.
إذا كانت المعطيات ممكنة فجدوا حجم الماء وحجم العصير، في كلّ وعاء، في البداية.
إذا كانت المعطيات غير ممكنة فاشرحوا.

	البداية	العمليّة الّتي نُفِّذت	بعد العمليّة
أ.	حجم السائلين في الوعاءين معًا 12 لترًا	نقلوا 3 لترات من وعاء الماء إلى وعاء العصير	حجم السائل في الوعاءين متساوي
ب.	حجم العصير 3 أضعاف حجم الماء	نقلوا لترين من وعاء الماء إلى وعاء العصير	حجم الماء الّذي بقي في الوعاء 3 أضعاف حجم المخلوط في وعاء العصير
ت.	حجم العصير أكبر بـ 7 لترات من حجم الماء	كبّروا حجم الماء ضعفين	حجم العصير 3 أضعاف حجم الماء

رؤية قالب

5. معطاة هيئة معادلات $\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ حلها $(5, 2)$. افحصوا.

استعينوا، في كلّ بند، بحلّ هيئة المعادلات المعطاة وجدوا حلّ هيئات المعادلات الآتية.

أ. $\begin{cases} 2(x-1) + 3(y-1) = 16 \\ 3(x-1) - 4(y-1) = 7 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2(x-4) + 3(y+1) = 16 \\ 3(x-4) - 4(y+1) = 7 \end{cases}$

ت. $\begin{cases} 2(2x+1) + 3(y-2) = 16 \\ 3(2x+1) - 4(y-2) = 7 \end{cases}$

ث. $\begin{cases} 2(3x-1) + 3(3y-1) = 16 \\ 3(3x-1) - 4(3y-1) = 7 \end{cases}$

مجموعة مهامّ

1. يوجد مع رنا وعاءين.
يوجد في الوعاء الأوّل x لترات من الماء $(x > 0)$ وفي الوعاء الثاني y لترات من العصير $(y > 0)$.

أ. كان حجم الماء، في البداية، 4 أضعاف حجم العصير.
اكتبوا معادلة مناسبة.
ب. أضافت رنا لترًا واحدًا من الماء إلى كلّ وعاء.
اكتبوا تعبيرين جبريين يمثلان حجم السائل، في كل وعاء، بعد عملية الإضافة.
ت. قاست رنا، ووجدت بعد عملية الإضافة أن حجم الماء في الوعاء الاوّل 3 أضعاف حجم المخلوط (الماء والعصير) في الوعاء الثاني. اكتبوا معادلة مناسبة.
ث. حلوا هيئة المعادلات.
ج. كم لترًا من الماء وكم لترًا من العصير كان في كلّ وعاء في البداية؟
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

2. كان عدد الأولاد الّذين خرجوا إلى الساحة، في الاستراحة، ضعفيْ عدد الاولاد الّذين بقوا في البناية.
خرج، بعد ذلك، 10 أولاد إلى الساحة أيضًا.
نتيجة لذلك، أصبح عدد الأولاد في الساحة 3 أضعاف عدد الأولاد الّذين بقوا في البناية.
كم ولدًا خرج، في البداية، إلى الساحة في الاستراحة ؟

3. هنالك 300 لتر من الوقود في برملين معًا.
بعد أن نقلوا $\frac{1}{6}$ حجم الوقود من البرميل الأوّل إلى البرميل الثاني، أصبح حجم الوقود في البرميلين متساوٍ.

كم لترًا من الوقود كان في البرميلين في البداية؟

4. كان عدد التلاميذ في صفيْ الثامن، في بداية السنة، 69 تلميذًا.
في منتصف السنة، ترك 3 تلاميذ الصفّ الثامن أ، وانضم تلميذين إلى الصفّ الثامن ب، فأصبح عدد التلاميذ في الصفين متساوٍ.
كم تلميذًا كان في كلّ صفّ في بداية السنة؟
إرشاد: انسخوا الجدول وأكملوا.

	عدد التلاميذ في الصفّ الثامن أ	عدد التلاميذ في الصفّ الثامن ب
في بداية السنة	x	y
في منتصف السنة		

اكتبوا هيئة معادلات (اذكروا شروط المحدودية)، حلّوا واكتبوا إجابة للمسألة.
افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

5. اشتغل **تامر** و**موسى** في العطلة الصيفيّة.

كانت أُجرة **تامر** أعلى بـ 200 شاقل من أجرة **تامر**.

بعد أن سدّ **تامر** دَيْن 300 شاقل لموسى، أصبح معه نِصف كمّيّة النقود الموجودة مع موسى.

كم كانت أُجرة تامر؟ وكم كانت أُجرة موسى؟

6. يوجد في غرفتين 38 طاولة.

يجلس، في الغرفة **أ**، 4 أشخاص حول كلّ طاولة، ويجلس، في الغرفة **ب**، 6 أشخاص حول كلّ طاولة.

إذا انتقل 24 شخصًا من الغرفة **أ** إلى الغرفة **ب** فيصبح عدد الأشخاص في الغرفتين متساوٍ.

كم طاولة يوجد في كلّ غرفة؟

7. طُلب من التلاميذ أن يقترحوا معادلات بحيث يكون أحد حلولها الزوج (3 ,1).

أمامكم قسم من المعادلات التي اقتُرحت:

$2x + y = 5$	$y = 10x - 8$	$4x - y = 1$	$3x + y = 6$
$2x + 3y = 11$	$2x - y + 1 = 0$	$y = x + 2$	

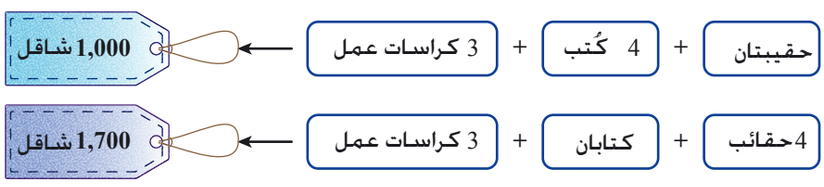
أ. أيّ معادلات حلّها هو الزوج (3 ,1) ؟

ب. اختار **سامر** معادلتين من المعادلات المقترحة وكتبها كهيئة معادلات:

$$\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$$

ما هو حلّ هيئة المعادلات التي كتبها **سامر**؟

8.



أ. كم شاقلًا ندفع مقابل ما يلي:

ب. أيُّهما سعره أغلى: الحقيبة أم الكتاب؟ اشرحوا.

الدرس الرابع: مسائل في النسب المئويّة

يوجد في موقفيْ سيارات معًا 110 سيّارات باللون الأحمر، 240 سيّارة باللون الأزرق، وسيّارات بألوان أخرى.

أمامكم رسمان بيانيّان دائريّان يصفان التكراريّة النسبيّة للسيّارات في كلّ موقف.

خمّنوا كم سيّارة يوجد في كلّ موقف؟

نحلّ مسائل في النسب المئويّة.

1. تطرّقوا إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

أ. ارمزوا بـ x إلى عدد السيّارات في الموقف **أ**.

ارمزوا بـ y إلى عدد السيّارات في الموقف **ب**.

أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

ب. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.

ت. كم سيّارة يوجد في كلّ موقف؟ افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

ث. كم سيّارة تمثّل المساحة البيضاء في الرسم البيانيّ الدائريّ؟

2. يوفّر **يوسف**، كل سنة، 10% من مصروفه، ويوفّر أخيه **رامي** 20% من مصروفه.

أ. ارمزوا بـ x إلى المصروف السنويّ (بالشواقل) الذي يحصل عليه **يوسف**.

ارمزوا بـ y إلى المصروف السنويّ (بالشواقل) الذي يحصل عليه **رامي**.

أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.

اكتبوا تعبيرين جبريّين يصفان المبلغ بالشواقل الّذي وفره كلّ واحد منهما في السنة.

ب. بعد سنة من التوفير، قررا أن يشتريا هدية، وتبين لهما بأنّهما وفرا معًا60 شاقلًا.

اكتبوا معادلة مناسبة.

ت. اكتبوا، في كلّ حالة من الحالات الآتية، معادلة واحسبوا بمساعدة المعطى الإضافيّ مبالغ المصروف التي حصل عليها **يوسف** و**رامي**.

- حصل الاثنين على نفس المبلغ للمصروف.
- حصل **يوسف** على مبلغ يساوي ضعفي المبلغ الذي حصل عليه **رامي**.
- حصل **رامي** على مبلغ أكبر بـ 30 شاقلًا من المبلغ الذي حصل عليه **يوسف**.

افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة

3. أمامكم ست هيئات معادلات.

أ. $\begin{cases} x + y = -1 \\ 4x - y = 6 \end{cases}$ ت. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ ج. $\begin{cases} x + y = 1 \\ y - x = 3 \end{cases}$

ب. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$ ث. $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ ح. $\begin{cases} 3x = 3 \\ 3x - 2y = 17 \end{cases}$

الحلّ لهيئتي معادلات هو $(-2, 1)$. جدوا الهيئتين.
ما هو الحلّ لهيئات المعادلات الأخرى؟

مجموعة مهامّ

1. يتعلّم في مدرسة السلام 270 تلميذًا في الصفوف الثامنة والصفوف التاسعة.
تمّ اختيار 4% من تلاميذ الصفوف الثامنة وَ 5% من تلاميذ الصفوف التاسعة لمجلس طلاب المدرسة.
عدد التلاميذ الذين تمّ اختيارهم من الشعبتين هو 12 تلميذًا.
أ. ارمزوا بـ x إلى عدد التلاميذ في الصفوف الثامنة.
ارمزوا بـ y إلى عدد التلاميذ في الصفوف التاسعة.
أيّ قيم مناسبة لـ x، وأيّ قيم مناسبة لـ y، بحسب شروط المسألة؟ اشرحوا.
اكتبوا تعبيرين جبريّين يصفان عدد التلاميذ الذين تمّ اختيارهم لمجلس الطلاب من كلّ شعبة.
ب. اكتبوا هيئة معادلات مناسبة وحلّوها.
ت. كم تلميذًا يتعلّم في كلّ شعبة في المدرسة؟
ث. كم تلميذًا تمّ اختياره من كل شعبة لمجلس الطلاب؟
ج. افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم في البنود السابقة مناسبة لشروط المسألة.

2. قررت عائلة رياض أن تشتري طاولة وست كراسي للمطبخ. اقترح عليهم البائع نموذجًا يكلف 2,500 شاقلًا. بعد أن فحصوا الأسعار، قرروا أن يشتروا النموذج الذي أُقترح عليهم، ولكن تبين لهم بأنّ الأسعار تغيّرت. ارتفع سعر الكرسي بنسبة 10%، وانخفض سعر الطاولة بنسبة 10%.
لذا اضطرت عائلة رياض أن تضيف 110 شواقل إلى السعر السابق.
كم كان سعر الكرسيّ في البداية، وكم كان سعر الطاولة في البداية؟

3. دفعوا 59 شاقلًا مقابل 2 كيلوغرام تفاح وَ 5 كيلوغرام أجاص.
إذا ارتفع سعر كيلوغرام واحد من التفاح بنسبة 10% وسعر كيلوغرام واحد من الأجاص بنسبة 20% فسيدفعون مقابل نفس الكمّيّة 69.40 شاقلا.
ما هو سعر كيلوغرام واحد من التفاح، وما هو سعر كيلوغرام واحد من الأجاص قبل الغلاء؟

4. قرر **يوسف** أن يستثمر 10,000 شاقل في البنك لمدّة سنة كاملة.

قرر أن يقسِّم استثماره على برنامجيْ توفير. يحصل في البرنامج الأوّل على ربح بنسبة 4%، وفي البرنامج الثاني يحصل على ربح بنسبة 5%. ربح **يوسف** 440 شاقلًا كلّ السنة، كم شاقلاً استثمر في كلّ برنامج؟

إرشاد: انسخوا الجدول وأكملوا.

اكتبوا هيئة معادلات (اذكروا شروط المحدوديّة)، حلّوا واكتبوا إجابة للمسألة.

افحصوا ما إذا كانت إجاباتكم مناسبة لشروط المسألة.

	برنامج التوفير أ	برنامج التوفير ب
مبلغ الاستثمار (بالشواقل)	x	y
الربح (بالشواقل)		

5. يوجد في برملين معًا 720 لترًا من العصير.

إذا نقلنا 20% من الكمّيّة الموجودة في البرميل الأوّل إلى البرميل الثاني فيصبح حجم العصير في البرميلين متساوٍ.

كم كان حجم العصير في كلّ برميل في البداية؟

6. يوجد في برملين معًا 960 لترًا من العصير.

إذا نقلنا 20% من الكمّيّة الموجودة في البرميل الأوّل إلى البرميل الثاني فيصبح حجم العصير في البرميل الثاني ضعفيْ حجم العصير في البرميل الأول.

كم كان حجم العصير في كلّ برميل في البداية؟

7. انسخوا واكتبوا أعدادًا مناسبة بحيث تحصلون على هيئة معادلات حلّها (3 ,5).

$$\begin{cases} x + 2y = \square \\ 3x - y = \square \end{cases}$$

8. معطاة هيئة معادلات

$$\begin{cases} 4x + 2(y - x) = y - 3x \\ 3(x + y) - y = 2x + y + 4 \end{cases}$$

قال **أشرف**: حلّ هيئة المعادلات هو (, 1–).

قال **أنس**: حلّ هيئة المعادلات هو (5 ,).

إذا كان معلومًا أن ادعاءيهما صحيحًا فما هو حلّ هيئة المعادلات؟

9. إذا قسَّمنا عددًا طبيعيًّا على 5 فنحصل على ناتج (خارج قسمة) وباقي.

إذا قسَّمنا نفس العدد على 7 فنحصل على ناتج أصغر بـ 1 من الناتج السابق، وعلى باقي يساوي 4 أضعاف الباقي السابق. ما هو العدد؟