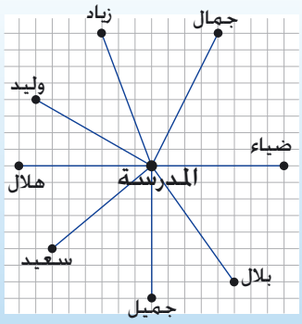
الوحدة السادسة والعشرون: نظرية فيثاغوروس

الدرس الأول: تمهيد لنظرية فيثاغوروس

تصف القطع الّتي تظهر في الرسم التخطيطيّ أبعاد بيوت التلاميذ عن المدرسة (يمثّل طول كلّ تربيعة 100 م).

جدوا أقرب بيت إلى المدرسة.

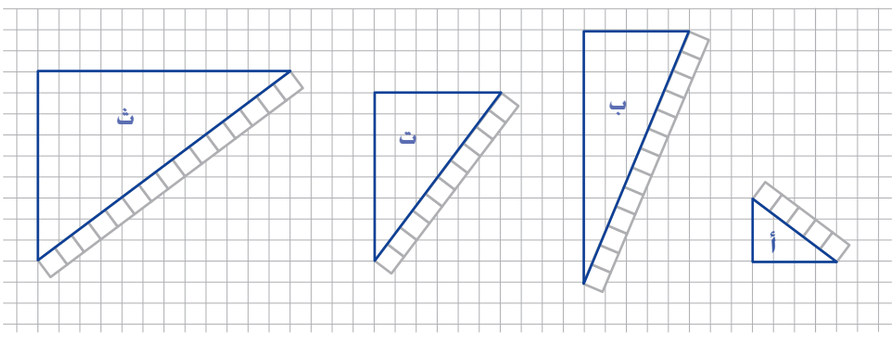
جدوا أبعد بيت عن المدرسة.



نربط بين طولَي القائمين في المثلّث القائم الزاوية وطول الوتر في المثلّث.

العلاقة بين طولَي القائمين وطول الوتر في المثلّث القائم الزاوية

1. أمامكم رسومات أربعة مثلّثات قائمة الزاوية.



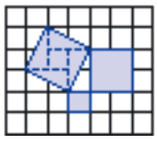
أ. انسخوا الجدول وأكملوا أطوال الأضلاع (بوحدات طول ضلع التربيعة).

المثلّث	طول القائم الصغير	طول القائم الكبير	طول الوتر
أ			
ب			
ت			
ث			

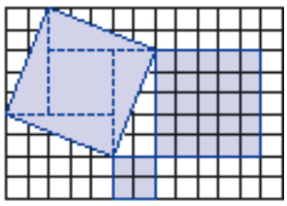
ب. قال **آدم**: إذا قمنا بتربيع طول القائم الصغير فنحصل على مجموع طول القائم الكبير والوتر كالتالي: $a^2 = b + c$.
افحصوا في الجدول هل قول **آدم** صحيح؟

ت. فتّشوا في الجدول عن علاقات بين طولَي القائمين وطول الوتر، وافحصوا هل جميع أسطر الجدول تحقّق هذه العلاقة؟

2. أمامكم رسومات ثلاثة مربّعات ملوّنة.
جدوا مساحة كلّ مربّع (بوحدة المساحة تربيعة).
جدوا علاقة بين مساحات المربّعات.



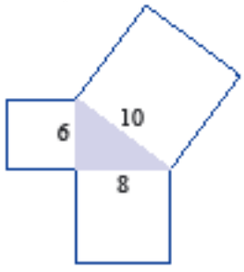
3. أمامكم رسومات ثلاثة مربّعات ملوّنة.
أ. جدوا مساحة كلّ مربّع (بوحدة المساحة تربيعة).
ب. جدوا علاقة بين مساحات المربّعات.



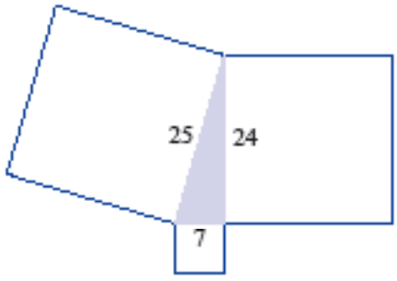
4. في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون فعّاليّة "مربّعات على أضلاع مثلّث قائم الزاوية" "**ריבועים על צלעות של משולש ישר - זווית**". ستفحصون في هذه الفعّاليّة هل مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر؟ نفذوا الفعالية حسب التعليمات.

5. بُنيت، في كلّ رسمة، مربّعات على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).
أ. احسبوا مساحات المربّعات في كلّ رسمة.

I



II

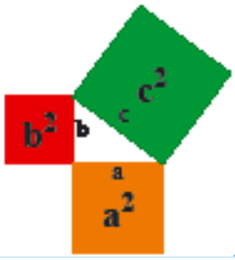


ب. افحصوا، في كلّ رسمة، هل مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر؟

6. تطرّقوا إلى الجدول المعطى في مهمّة 1، وافحصوا في كلّ مثلّث ما يلي:
مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر.

رأينا أمثلة فيها ما يلي:

في المثلّث القائم الزاوية، مساحة المربّع المبني على الوتر تساوي مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين.



هذا يعني أنّه رأينا إذا كان a وَ b طولا قائمين وَ c طول الوتر $(a>0, b>0, c>0)$ فإنّ $a^2 + b^2 = c^2$

نسمّي هذا الادّعاء **نظرية فيثاغوروس**.

نفحص، في الدرس القادم، هل هذه النظرية صحيحة **في كلّ** مثلّث قائم الزاوية؟

كان فيثاغوروس رياضيًّا وفيلسوفًا يونانيًّا، وُلد في جزيرة ساموس سنة 582 قبل الميلاد تقريبًا.

استوطن فيثاغوروس سنة 529 قبل الميلاد في قرية يونانيّة في جنوب إيطاليا، وقد بنى حوله المدرسة الفيثاغورية - جماعة فلسفيّة دينيّة.

اعتقد الفيثاغوريون أنّه يمكن وصف كلّ العالَم بنسب وعلاقات رياضيّة بين أعداد طبيعيّة.

ننسب عادةً البرهان العام الأول لنظرية فيثاغوروس، إلى فيثاغوروس نفسه ، على الرغم من أنه ليس من المؤكد أنّ فيثاغوروس هو الّذي برهن هذه النظرية. كانت النظرية دون البرهان معروفة قبل عهد فيثاغوروس بمئات السنين - في بابل، مصر القديمة والصين، لكن الرياضيون اليونانيون كانوا أول من عَمِل على إيجاد براهين لأفكار رياضيّة.

ثلاثيّات فيثاغورية

نسمّي ثلاثية الأعداد الطبيعيّة a, b, c الّتي تحقّق $a^2 + b^2 = c^2$ **ثلاثيّة فيثاغورية**.

مثال: الأعداد 5, 12, وَ 13 هي ثلاثيّة فيثاغورية: $5^2 + 12^2 = 13^2$

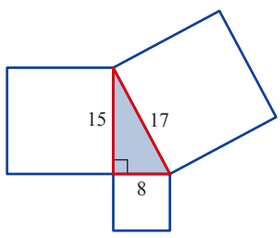
7. افحصوا هل الثلاثيّات الآتية هي ثلاثيّات فيثاغورية؟

أ. 8, 15, 17 ب. 1, 2, 3 ت. 15, 20, 25

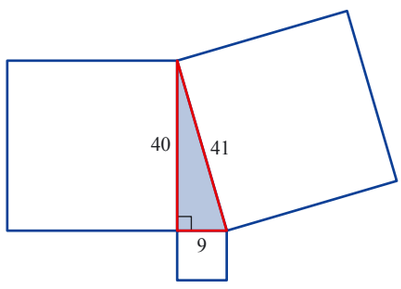
مجموعة مهامّ

1. أمامكم مثلّثات قائمة الزاوية، بُنيت مربّعات على أضلاعها.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، والقياسات معطاة بالسم.).
احسبوا، في كلّ بند، مساحات المربّعات المبنيّة على الأضلاع.
هل مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر؟

أ.

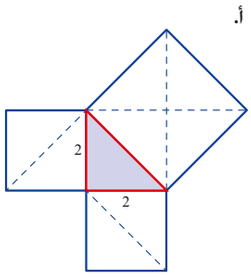


ب.

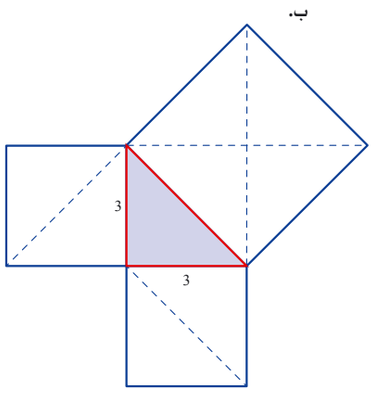


2. أمامكم مثلّثات قائمة الزاوية ومتساوية الساقين، بُنيت مربّعات على أضلاعها.
(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، والقياسات معطاة بالسم.).
احسبوا، في كلّ بند، مساحات المربّعات المبنيّة على الأضلاع.
هل مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر؟

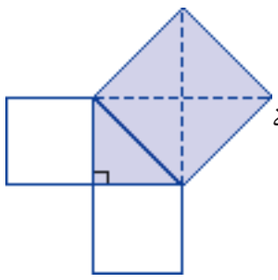
أ.



ب.



3. استعينوا بالرسمة، واشرحوا لماذا تتحقّق نظرية فيثاغوروس في كلّ مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين؟



4. أمامكم ثلاثيّات أعداد، حدّدوا من بينها الثلاثيّات الفيثاغورية. اشرحوا.

أمثلة: 13 12 5 ثلاثيّة فيثاغورية: $5^2 + 12^2 = 13^2$

5 4 2 ثلاثيّة ليست فيثاغورية: $2^2 + 4^2 \neq 5^2$

أ. 8 6 2

ب. 10 6 4

ت. 6 7 2

ث. 10 8 6

ج. 3 2 2

ح. 15 12 9

خ. 61 60 11

د. 26 24 10

ذ. 85 84 13

5. أ. الأعداد 3, 4, 5 هي ثلاثيّة فيثاغورية ($3^2 + 4^2 = 5^2$).

- اضربوا هذه الأعداد في 2 .

افحصوا هل الأعداد الجديدة هي ثلاثيّة فيثاغورية أيضًا؟

- اضربوا الأعداد المعطاة في نفس العدد (يختلف عن العدد 2) حسب اختياركم.

افحصوا هل الأعداد الجديدة تشكّل ثلاثيّة فيثاغورية أيضًا؟

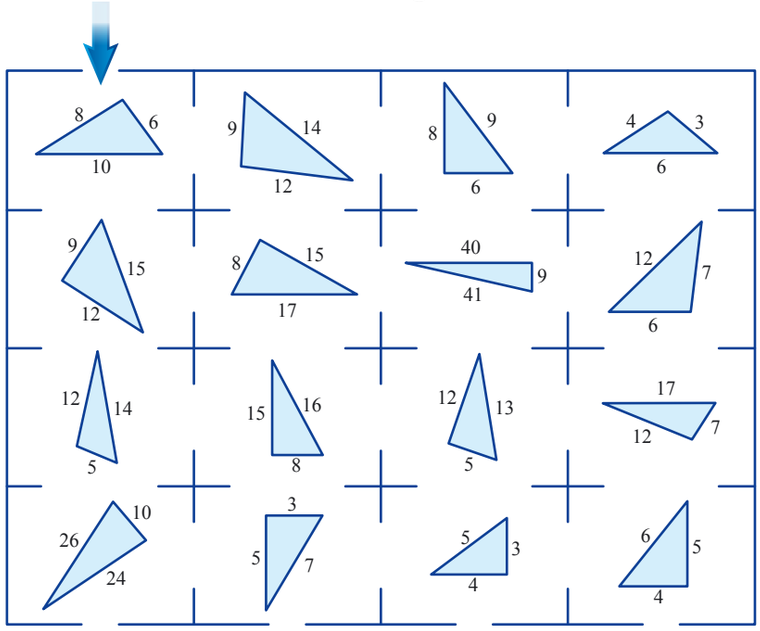
- أضيفوا 2 إلى الأعداد المعطاة وافحصوا هل الأعداد الجديدة تشكّل ثلاثيّة فيثاغورية أيضًا؟

ب. معطاة ثلاثيّة فيثاغورية : 5, 12, 13

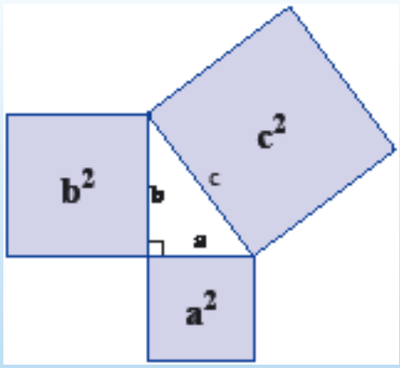
ابنوا ثلاثيّات فيثاغورية إضافيّة بواسطة ضرب الثلاثيّة المعطاة في نفس العدد.

6. أمامكم متاهة مثلّثات. (أُعِدّت الرسومات للتوضيح، والقياسات معطاة بالسم.)

ارسموا، على ورقة شفافة، مسار خروج من المتاهة عبر التربيعات المعطاة فيها قياسات لثلاثيّات فيثاغورية.



الدرس الثاني: برهان نظرية فيثاغوروس



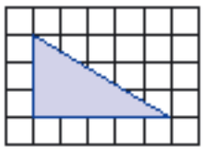
رأينا في الدرس السابق مثلّثات قائمة الزاوية تتحقّق فيها العلاقة الآتية:

مجموع مساحتيِ المربّعين المبنيّين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبنيّ على الوتر.

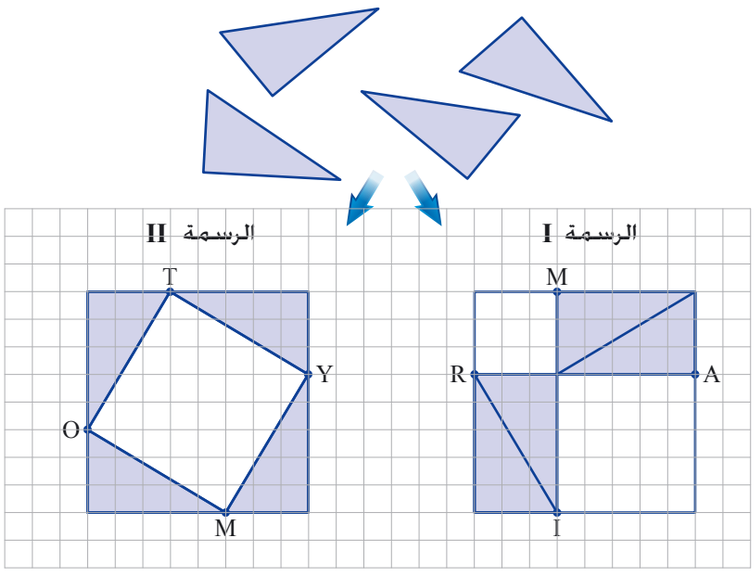
عندما يكون a وَ b طولا القائمين وَ c طول وتر المثلّث $(a>0,\ b>0,\ c>0)$ نسجِّل: $a^2 + b^2 = c^2$

نشرح لماذا تتحقّق هذه العلاقة في كلّ مثلّث قائم الزاوية؟

برهان نظرية فيثاغوروس



1. أمامكم مثلّث قائم الزاوية، طولا قائميه هما 3 وحدات وَ 5 وحدات.
(بوحدة طول ضلع التربيعة.)
نضع المثلّثات الأربعة الآتية داخل مربّع طول ضلعه 8 وحدات بطريقتين. (انظروا الرسمتين I وَ II).

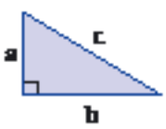


أ. اشرحوا لماذا الشكل الرباعيّ الّذي نَتَج داخل الرسمة II هو مربّع؟

ب. احسبوا مساحتيِ المربّعين اللذين نتجا في الرسمة I (بوحدة المساحة تربيعة).
احسبوا مساحة المربّع الداخليّ الّذي نَتَج في الرسمة II (استعينوا بطرح المساحات).
على ماذا حصلتم؟

ت. قالت **مريم**: يتطابق المربّعان اللذان نتجا في الرسمتين I وَ II مع المربّعين المبنيّين على ضلعيِ المثلّث القائم الزاوية الأصليّ الّذي طولا قائميه 3 وَ 5 وحدات.
هل قول **مريم** صحيح؟ اشرحوا.

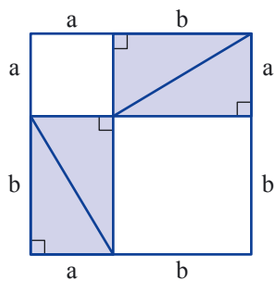
2. في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون فعّاليّة "برهان نظرية فيثاغوروس" "משפט פיתגורס - הוכחה". ستشرحون، في هذه الفعّاليّة، لماذا تتحقّق نظرية فيثاغوروس في كلّ مثلّث قائم الزاوية؟ نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.



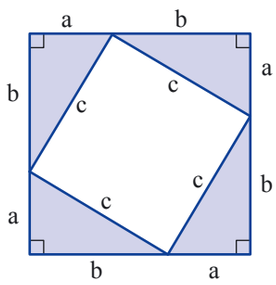
3. نكرر العمليّات الّتي نفّذناها في مهمّة 1 مع مربّعات دون تربيعات.
أمامكم مثلّث قائم الزاوية، طولا قائميه هما a وحدات وَ b وحدات، وطول الوتر c وحدات ($c > 0,\ b > 0,\ a > 0$ وَ a, b وحدات طول).

نضع أربعة مثلّثات كالمثلّث المعطى أعلاه داخل مربّع طول ضلعه $a + b$ سم بطريقتين مختلفتين (انظروا الرسمتين I وَ II).

الرسمة I



الرسمة II

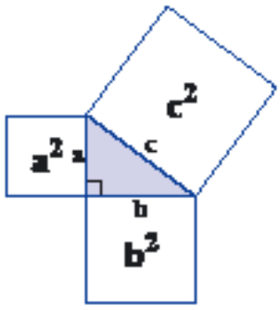


أ. اشرحوا لماذا المساحات الّتي نَتَجت داخل كلّ مربّع (في الرسمتين I وَ II) هي مربّعات؟

ب. سجِّلوا تعابير لمساحات المربّعات الّتي نَتَجت في الرسمتين I وَ II.

ت. اشرحوا لماذا مجموع مساحتي المربّعين اللذين نتجا في الرسمة I يساوي مساحة المربّع الّذي نتج في الرسمة II.

ث. اشرحوا كيف يمكن الاستنتاج بناءً على البنود السابقة أنّه في كلّ مثلّث قائم الزاوية، طولا قائميه a وَ b وطول الوتر c ($a > 0,\ b > 0,\ c > 0$) ، تتحقّق المساواة: $a^2 + b^2 = c^2$

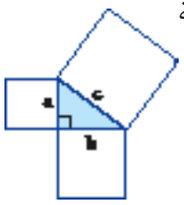


برهنا، في مهمّة 3 ، أنّه في كلّ مثلّث قائم الزاوية، طولا قائميه a وَ b وطول الوتر c $(a > 0, b > 0, c > 0)$، تتحقّق المساواة: $a^2 + b^2 = c^2$.

بالكلمات: في المثلّث القائم الزاوية، مجموع مساحتي المربّعين المبنيين على القائمين يساوي مساحة المربّع المبني على الوتر.

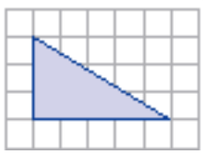
نسمّي هذا الادعاء **نظرية فيثاغوروس**.

قدّمنا هنا برهانًا واحدًا لنظرية فيثاغوروس، لكن هنالك براهين كثيرة لهذه النظرية.



إيجاد أطوال الأضلاع في مثلّث قائم الزاوية

4. نعود إلى المثلّث القائم الزاوية الّذي طولا قائميه 3 وحدات وَ 5 وحدات (بوحدة طول ضلع تربيعة).



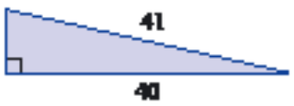
أ. ارسموا المثلّث والمربّعات المبنية على أضلاعه.

ب. سجِّلوا داخل كلّ مربع مساحته.

ت. جدوا طول وتر المثلّث (استعينوا بعملية $\sqrt{\ }$ في الآلة الحاسبة.)

5. معطى مثلّث قائم الزاوية، طول الوتر 41 سم وطول أحد قائميه 40 سم.

(أُعِدّت الرسومات للتوضيح، والقياسات معطاة بالسم.).

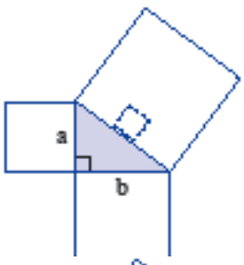


أ. جدوا مساحات المربّعات المبنية على أضلاع المثلّث.

ب. ما هو طول القائم الثاني؟

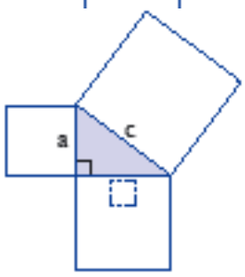
إيجاد طول الوتر

- نحسب مساحتي المربّعين المبنيين على القائمين.
- نحسب مساحة المربّع المبني على الوتر بواسطة نظرية فيثاغوروس.
- نجد طول الوتر (بواسطة عملية $\sqrt{\ }$).



إيجاد طول القائم

- نحسب مساحتي المربّعين المبنيين على الوتر وعلى القائم المعطى طوله.
- نحسب مساحة المربع الثالث بواسطة نظرية فيثاغوروس.
- نجد طول القائم غير المعروف (بواسطة عملية $\sqrt{\ }$).

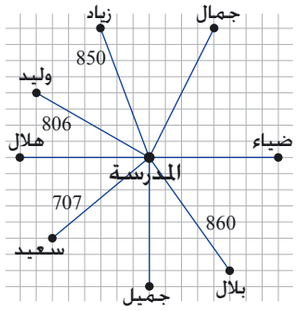


a, b وَ c وحدات طول، $a > 0, b > 0, c > 0$

6. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة من الدرس السابق. نفحص في المهمّة أبعاد بيوت التلاميذ عن المدرسة (يمثّل طول كلّ تربيعة 100 م).
سُجِّل قسم من الأبعاد في الرسمة (بالأمتار).

أ. جدوا الأبعاد غير المسجّلة.

ب. جدوا أقرب بيت إلى المدرسة.
جدوا أبعد بيت عن المدرسة.



مجموعة مهامّ

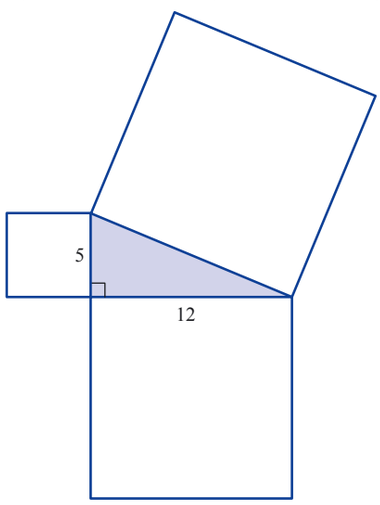
في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "مواد تعليميّة إضافيّة"، ستجدون مهمّة بديلة لمهمّة 14 في مجموعة المهام. أشرنا إلى هذه المهمّة هنا بـ *، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

أُعِدَّت الرسومات في المهام الآتية للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

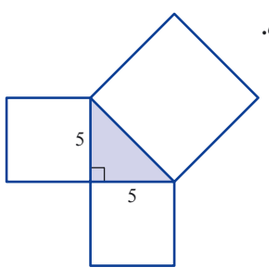
1. احسبوا، في كلّ بند، مساحات المربّعات الثلاثة ولائموا لكلّ مثلث الطول الناقص للضلع.

3.46 سم　　4.9 سم　　7.07 سم　　13 سم

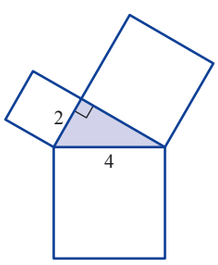
أ.



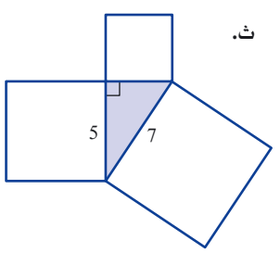
ب.



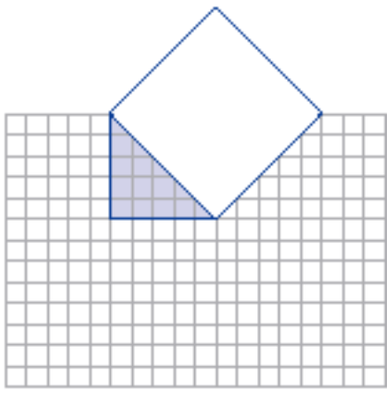
ت.



ث.

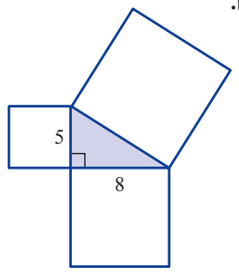


2. انسخوا الرسمة الآتية على ورقة مقسمة إلى تربيعات.
ارسموا مربّعًا على كلّ قائم من قائمي المثلّث القائم الزاوية واحسبوا مساحته (بوحدة المساحة تربيعة).
ما هي مساحة المربّع المبنيّ على الوتر؟
ما هو طول الوتر (بوحدة الطول ضلع تربيعة)؟

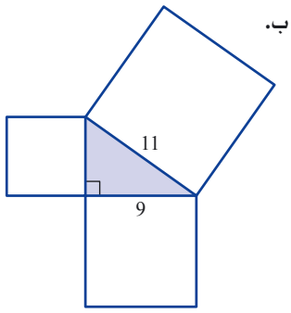


3. احسبوا، في كلّ بند، مساحات المربّعات والطول الناقص للضلع في المثلّث القائم الزاوية.

أ.

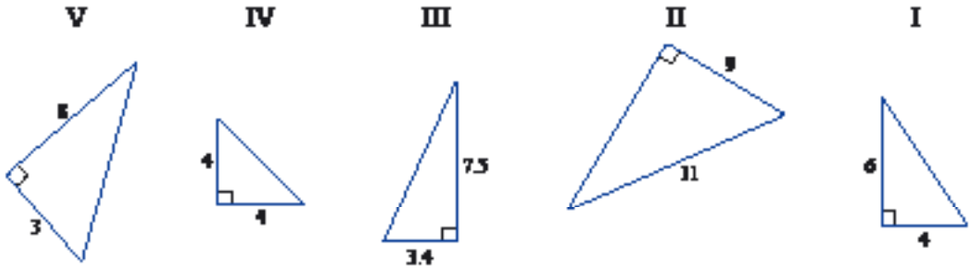


ب.



4. قصوا مربّعين من ورقة مقسمة إلى تربيعات.
اقترحوا طريقة لرسم مربّع مساحته تساوي مجموع مساحتي المربّعين.
ارسموا المربّع الّذي يمثّل المجموع.

5. أ. احسبوا، في كلّ مثلث، الطول الناقص للضلع (يمكنكم أن ترسموا مربّعًا على كلّ ضلع والاستعانة بالمساحات).



ب. احسبوا محيط كلّ مثلّث.

6. احسبوا، في كلّ بند، الطول الناقص للضلع (يمكنكم أن ترسموا رسمة توضيحيّة مع المربّعات المبنيّة على الأضلاع).

أ. طول أحد القائمين 10 سم وطول القائم الآخر 4 سم.

ب. طول أحد القائمين 12 سم وطول الوتر 20 سم.

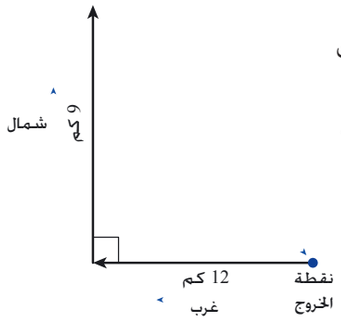
ت. طول أحد القائمين 5 سم، النسبة بين طول الوتر إلى طول القائم هي 3 .

ث. المثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين، وطول كلّ قائم 7 سم.

7. تتدرب **مريم** و**ميسم** من أجل تجنيدهن في جيش الدفاع الإسرائيلي.

خرجتا في حملة سير على الأقدام وقطعتا مسافة 12 كم باتجاه الغرب وبعد ذلك 9 كم باتجاه الشمال.

عادت مريم وميسم، في النهاية، بخطّ مستقيم إلى نقطة الخروج (انظروا الرسمة التوضيحيّة).



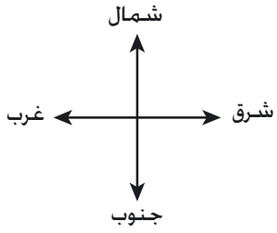
أ. كم كيلومترًا قطعت **مريم** و**ميسم** عندما عادتا إلى نقطة الخروج؟
(ارسموا مربّعات على أضلاع المثلّث.)

ب. كم كيلومترًا قطعت **مريم** و**ميسم** خلال كلّ الحملة؟

8. خرجت مجموعتان من التلاميذ في رحلة.

سافرت إحدى المجموعتين باتجاه الغرب وقطعت مسافة 45 كم.

سافرت المجموعة الثانية باتجاه الجنوب وقطعت مسافة 60 كم.

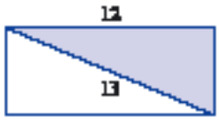


أ. ارسموا رسمة مناسبة.

ب. ما هي المسافة بين المجموعتين؟

9. أمامكم رسمة مستطيل، لُوِّن مثلّث فيه.

أحيطوا، في كلّ بند، الإجابة الصحيحة.



أ. طول الضلع الثاني للمستطيل:

25 سم 1 سم 5 سم 6 سم

ب. مساحة المستطيل:

270 سنتمترًا مربّعًا 30 سنتمترًا مربّعًا 60 سنتمترًا مربّعًا 25 سنتمترًا مربّعًا

ت. مساحة المثلّث الملوّن:

60 سنتمترًا مربّعًا 30 سنتمترًا مربّعًا 25 سنتمترًا مربّعًا 17 سنتمترًا مربّعًا

ث. محيط المستطيل:

17 سنتمترًا مربّعًا 34 سنتمترًا مربّعًا 25 سنتمترًا مربّعًا 30 سنتمترًا مربّعًا

ج. محيط المثلّث الملوّن:

17 سم 25 سم 30 سم 15 سم

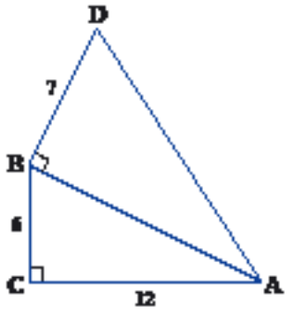
10. بُني مثلّث قائم الزاوية على وتر مثلّث قائم الزاوية ABC.

أ. احسبوا طول الضلع BA.

ب. احسبوا طول الضلع AD.

ت. احسبوا مساحة المثلّثين.

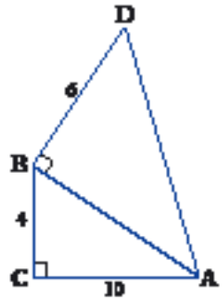
ث. احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ ADBC.



11. بُني مثلّث قائم الزاوية على وتر مثلّث قائم الزاوية.

أ. احسبوا طول الضلع AD.

ب. احسبوا مساحة الشكل الرباعيّ ADBC.



12. أ. ارسموا مثلّثين قائميْ الزاوية متطابقين، طول القائمين في كلّ مثلّث 6 سم وَ 8 سم.
قصّوا المثلّثين، ضعوا المثلّثين بجانب بعضهما، بشكل متجاور، وابنوا أشكالًا مختلفة.

ب. احسبوا مساحة كلّ شكل.

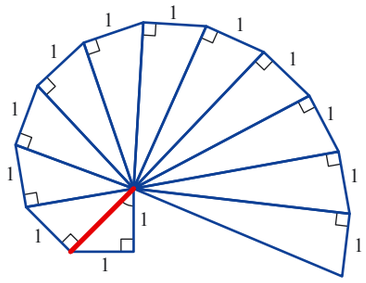
ت. احسبوا محيط كلّ شكل.

13. أمامكم رسمة "قوقعة" مكوّنة من مثلّثات قائمة الزاوية مرتبطة ببعضها.

أ. احسبوا طول الوتر الأحمر.

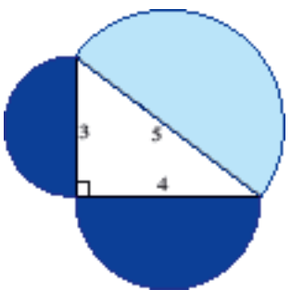
ب. ما هو طول الوتر في المثلّث الأخير في الرسمة؟

ت. نبني قوقعة من n مثلّثات (n عدد طبيعيّ).
ما هو طول الوتر في المثلّث الأخير؟



14*. احسبوا مساحات أنصاف الدوائر المبنيّة على أضلاع مثلّث قائم الزاوية.
هل مجموع مساحتيْ نِصفي الدائرتين المبنيتين على القائمين يساوي مساحة نِصف الدائرة المبنيّة على الوتر؟
إذا كانت الإجابة نعم فاشرحوا السبب.

اسم المهمة البديلة في الموقع: "أنصاف الدوائر على أضلاع مثلّث قائم الزاوية"
"חצאי מעגלים על צלעות משולש ישר-זווית".



الدرس الثالث: نظرية فيثاغوروس في المستطيل

زواج **رائد** و**ورائدة**.
تخبط رائد ورائدة في اختيار إحدى البطاقتين الآتيتين (أُعِدّت الرسمتان للتوضيح).

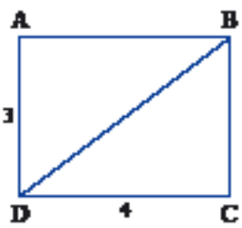
فضلت **رائدة** البطاقة المربّعة الشكلة الّتي طول ضلعها 14 سم.
فضل **رائد** البطاقة المستطيلة الشكل التي طولا ضلعيها 16 سم وَ 12 سم.
نساعد فيما بعد **رائد** و**ورائدة** في اختيار البطاقة.

نبحث مستطيلات ونستعمل نظرية فيثاغوروس لحسابها.

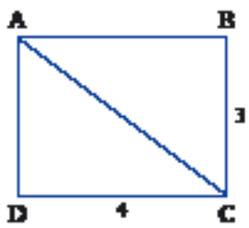
أُعِدَّت الرسومات في الدرس وفي مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. أمامكم رسمتا مستطيلان. (أُعِدَّت الرسمتان للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.)

أ. احسبوا طول القطر DB.



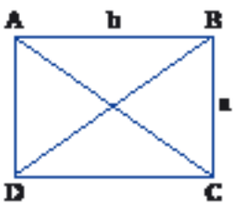
ب. احسبوا طول القطر AC.



2. أمامكم رسمة مستطيل (a وَ b طولا ضلعان، $a>0,\ b>0$).

أ. عبّروا عن طولي الضلعين BD وَ AC للمستطيل (بواسطة a وَb).

ب. أيّ صفة من صفات أقطار المستطيل برهنتموها في البند السابق؟

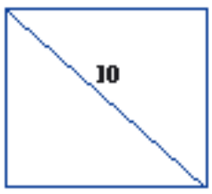


برهنا بواسطة نظرية فيثاغوروس أنّ **قُطري المستطيل متساويين**.

3. نعود إلى مهمّة الافتتاحيّة.
زُينت البطاقتان بشريط مُذهب في القسم الأماميّ.
يتمّ تحديد سعر البطاقة حسب طول الشريط المُذهب. سعر مترًا واحدًا من الشريط شاقلان.
اختار **رائد** و**رائدة** البطاقة الّتي سعرها أقلّ.
أيّ بطاقة اختار رائد ورائدة؟ اشرحوا.

4. في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون فعّاليّة "قُطر ثابت في المستطيل" "אלכסון קבוע במלבן". ستفحصون، في هذه الفعّاليّة، تغيُّرات أطوال أضلاع المستطيلات التي طول قُطرها ثابت. نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

5. معطى مستطيلان، طول القُطر في كلّ واحد منهما 10 سم.



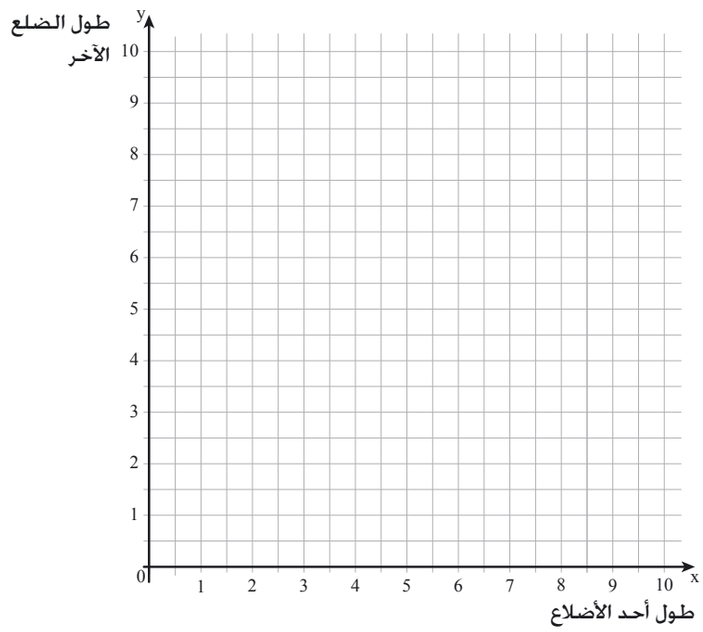
أ. انسخوا الجدول وأكملوه.

أحد الأضلاع	1	2	3	4	5	6	7	9
الضلع الآخر	9.9	9.8	9.5		8.7		7.1	4.4

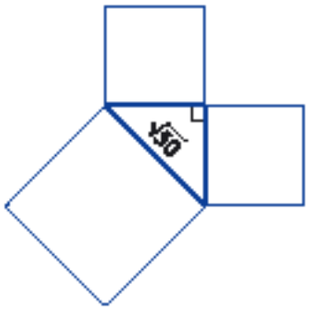
ب. انسخوا هيئة المحاور.
استعينوا بنقاط الجدول، وارسموا خطًّا بيانيًّا للدالّة يصف العلاقة بين طول أحد الأضلاع x ($x > 0$) وطول الضلع الآخر y ($y > 0$)، في المستطيل الّذي طول قُطره 10 سم.

ت. جدوا بواسطة الخطّ البيانيّ، بالتقريب، إحداثيّات النقاط:
(0.5,) , (8,) , (9.5,)

ث. هل تقع النقطتان:
(0, 10) , (10, 0) على الخطّ البيانيّ المناسب لشروط المسألة؟
اشرحوا.



6. أ. ارسموا، على ورقة مقسمة إلى تربيعات، مربعًا طول قطره $\sqrt{50}$ سم. (استعينوا بالرسومات التوضيحية المعطاة).
ما هو طول ضلع المربّع الّذي رسمتموه؟
هل هنالك مربّعات أخرى لها نفس طول القُطر المعطى أعلاه؟

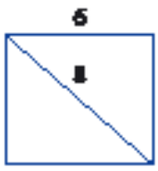


ب. ارسموا مستطيلًا ليس مربّعًا طول قُطره $\sqrt{50}$ وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة.
ما هي أطوال أضلاع المستطيل الّذي رسمتموه؟

مجموعة مهامّ

في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون مهمّة بديلة لمهمّة 7 في مجموعة المهام.
أشرنا إلى هذه المهمّة هنا بـ *، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

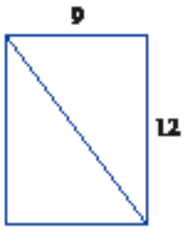
1. أمامكم مستطيل، معطى طول أحد الأضلاع وطول القُطر.



أ. احسبوا طول الضلع الآخر في المستطيل.

ب. احسبوا مساحة المستطيل.

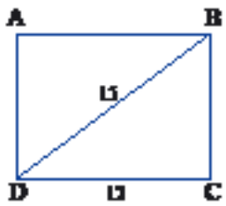
2. أمامكم مستطيل، معطى طولا القائمان.

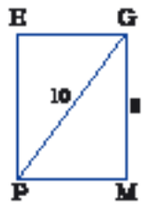


أ. احسبوا طول قطر المستطيل.

ب. ما هي النسبة بين طول القطر وطول الضلع الطويل؟

3. أمامكم رسمتا مستطيلان.





أ. احسبوا، في كلّ مستطيل، طول الضلع الآخر ومساحة المستطيل.

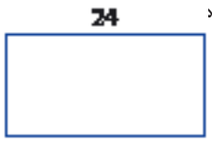
ب. كم ضعفًا مساحة المستطيل ABCD أكبر من مساحة المستطيل EGMP؟

4. معطى مساحة مستطيل 360 سنتمترًا مربّعًا. طول أحد أضلاعه 9 سم.

أ. احسبوا طول الضلع الآخر.

ب. احسبوا طول القطر.

5. معطى مساحة مستطيل168 سنتمترًا مربّعًا. طول أحد أضلاعه 24 سم.



احسبوا طول قُطر المستطيل.

6. ما هو طول قُطر مربّع مساحته 100 سنتمتر مربّع؟

***7.** معطاة مستطيلات في كلّ منها ضلع طوله 3 سم.

أ. انسخوا الجدول وأكملوه.

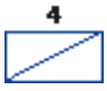
ضلع آخر (x)	1	2	2.5	3	4	5	6	6.5	9	10
القطر (y)	3.1	3.6	3.9			5.8		7.2		10.4

ب. استعينوا بالنقاط التي تظهر في الجدول، وارسموا الخطّ البيانيّ للدالّة التي تصف العلاقة بين القُطر y (y>0) وطول الضلع x (x>0).

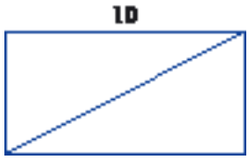
ت. جدوا بواسطة الخطّ البيانيّ إحداثيّات النقاط الآتية بالتقريب: (0.5,), (8, ...), (9.5,).

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "القُطر حسب ضلع المستطيل" *"אלכסון לפי צלע של מלבן"*.

8. احسبوا، في كلّ بند، محيط المستطيل.

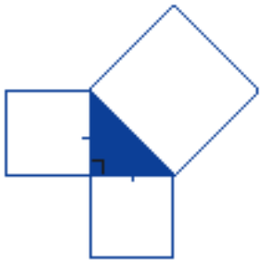


أ. طول القُطر ضعفا طول الضلع المعطى.



ب. النسبة بين طول الضلع المعطى وطول القطر هي 2:3.

9. طول قُطر مثلّث قائم الزاوية ومتساوي الساقين هو $\sqrt{32}$ سم.



أ. ما هي مساحة المربّع المبنيّ على الوتر؟

ب. ما هي مساحة المربّع المبني على كلّ قائم؟

ب. ما هو طول كلّ قائم؟

10. أ. ارسموا، على ورقة مقسمة إلى تربيعات، مربّعًا طول قُطره $\sqrt{98}$ وحدات طول تربيعة، وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة.

ما هو طول ضلع المربّع الذي رسمتموه؟

هل هنالك مربّعات أخرى لها نفس طول القطر المعطى أعلاه؟

ب. ارسموا، على ورقة مقسمة إلى تربيعات، مستطيلًا (ليس مربّعًا) طول قُطره $\sqrt{85}$ وحدات طول تربيعة، وأطوال أضلاعه أعداد صحيحة.

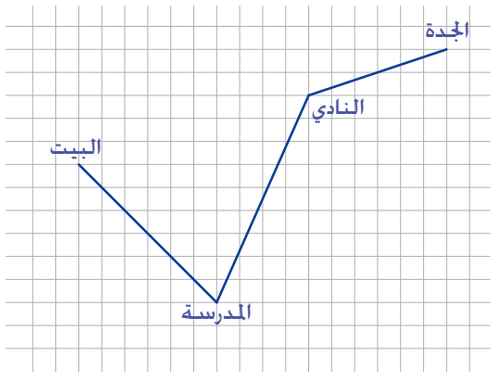
ما هي أطوال أضلاع المستطيل الذي رسمتموه؟

هل هنالك مستطيلات أخرى لها نفس طول القطر المعطى أعلاه وأطوال أضلاعها أعداد صحيحة؟

11. يذهب **نديم** كلّ يوم بعد التعليم إلى النادي ومن هناك إلى جدته.

أمامكم رسمة تصف مسار سير **نديم**.

احسبوا طول مسار سير **نديم** اليوميّ (بوحدات طول ضلع التربيعة).



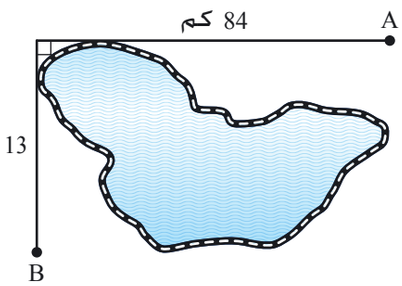
12. هنالك بحيرة بين المكانين المشار إليهما بالنقطتين A وَ B. (انظروا الرسمة التوضيحيّة.)

عُبِّد شارع يُحيط البحيرة ويُنتِج زاوية قائمة للوصول من A إلى B.

قرر المسؤولون أن يبنوا جسرًا فوق سطح البحيرة بخطّ مستقيم بحيث يربط المكانين A وَ B.

أ. ما هو طول الجسر؟

ب. بكم كم الطريق الجديدة أقصر من الطريق القديمة؟



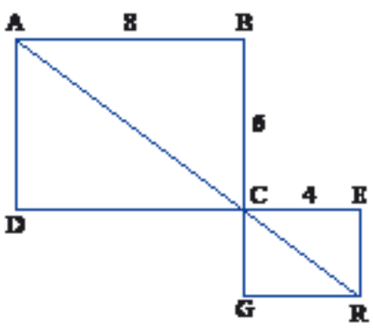
13. أمامكم مستطيلان لهما رأس مشترك C.

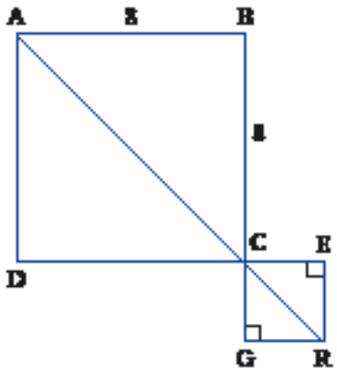
تمرّ القطعة AR عبر C.

أ. احسبوا طول AC.

ب. AR = 15 سم، احسبوا طول CR.

ت. احسبوا طول الضلع RE.





14. أمامكم مستطيلان لهما رأس مشترك C.

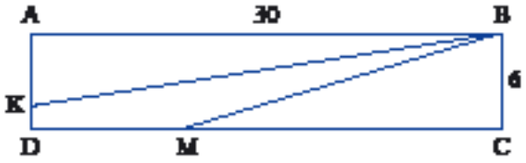
8 سم = AB

تمرّ القطعة AR عبر C.

16 سم = AR.

احسبوا طول ضلع المربّع CERG.

15. أمامكم رسمة مستطيل مقسّم إلى ثلاثة أقسام متساوية في المساحة.



أ. ما هي مساحة المستطيل؟

ب. احسبوا مساحة كلّ قسم من الأقسام الثلاثة.

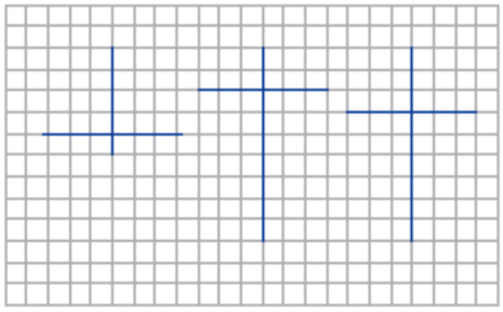
ت. استعينوا بالبند ب، واحسبوا طول MC وطول AK.

ث. احسبوا طول BM وطول BK.

ج. احسبوا محيط الشكل الرباعيّ KBMD.

16. القطع التي في الرسمة هي أقطار ثلاثة أشكال رباعيّة.

أ. انسخوا الرسمة على ورقة مقسمة إلى تربيعات، وارسموا الأشكال الرباعيّة.



ب. هنالك مثلّثان لهما ضلع مشترك ومتساويا الساقين في كلّ شكل رباعيّ رسمتموه. (نسمّي هذه الأشكال الرباعيّة **"دلتونات"**).

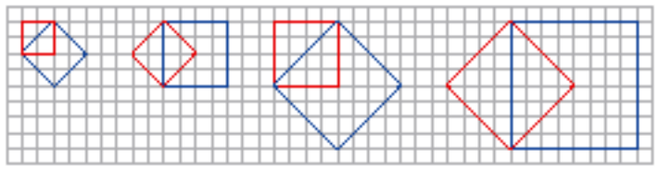
احسبوا مساحة كلّ شكل رباعيّ.

ث. احسبوا أطوال أضلاع كلّ شكل رباعيّ.

17. أمامكم متوالية مربّعات. بُني كلّ مربّع على قُطر المربّع السابق.

أ. احسبوا أطوال أضلاع كلّ شكل رباعيّ (بوحدات طول ضلع التربيعة).

إذا كان طول الضلع عدد غير صحيح فيمكنكم التعبير عنه بكتابة الجذر، مثلًا: $\sqrt{8}$



ب. احسبوا مساحة كلّ مربّع.

ت. ما هو طول ضلع المربّع التالي في متوالية المربّعات الحمراء؟ وما هي مساحته؟

الدرس الرابع: نظرية فيثاغوروس والتشابه

بمناسبة الاحتفال بعيد الاستقلال، زُينت بناية الوكالة اليهوديّة في تل أبيب بسلسلة أعلام.

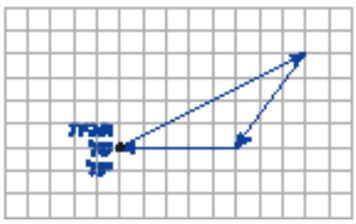
ثُبت الطرف العلويّ للسلسلة بزاوية السطح العلويّ للبناية، وثُبتت السلسلة بزاوية سطح القسم السفليّ للبناية، أما الطرف الثاني للسلسلة فقد رُبط بوتد مغروز في الأرض (انظروا الصورة).

احسبوا طول سلسلة الأعلام حسب القياسات المعطاة.

نتناول حسابات إضافيّة بمساعدة نظرية فيثاغوروس.

أُعِدَّت الرسومات في الدرس وفي مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. تتدرب **عناية** على الركض.
أمامكم رسمة تصف مسار ركضها.
يمثِّل كلّ ضلع في التربيعة مسافة 1 كم.
احسبوا طول المسار.



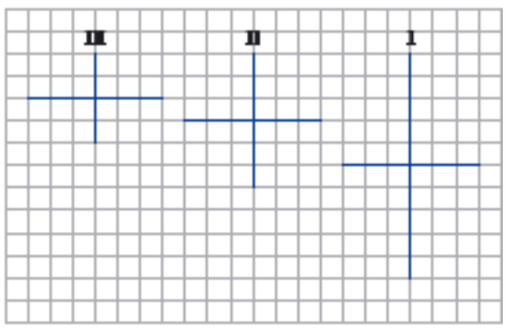
2. الخطوط التي في الرسمة هي أقطار لثلاثة أشكال رباعيّة.

أ. انسخوا الرسمة على ورقة مقسمة إلى تربيعات وارسموا الأشكال الرباعيّة.

ب. اشرحوا لماذا جميع الأضلاع متساوية في كلّ شكل رباعيّ؟

ت. احسبوا طول الضلع لكلّ شكل رباعيّ.

ث. احسبوا مساحة كلّ شكل رباعيّ.



للتذكير: نسمّي الشكل الرباعيّ الذي جميع أضلاعه متساوي "**معين**".

نستعين **بنظرية فيثاغوروس** لحساب أطوال أشكال هندسيّة في المستوى.

3. النسبة بين أطوال أضلاع المربّعين في الرسمة هي 2:3 .

أ. أعطوا مثالًا لأطوال أضلاع تُنتج النسبة 2:3.
احسبوا مساحتي المربّعين والنسبة بين المساحتين في هذه الحالة.

ب. أعطوا مثالًا آخر لأطوال أضلاع تُنتج النسبة 2:3.
احسبوا مساحتي المربّعين والنسبة بين المساحتين.

ت. هل هنالك علاقة بين نسبة أطوال أضلاع المربّعات ونسبة مساحتها؟
إذا كانت الإجابة نعم فما هي العلاقة؟

للتذكير: نسبة مساحات المضلعات المتشابهة هي مربع نسبة أطوال الأضلاع (وهذا يعني مربع نسبة التشابه).

4. المثلثان ABC , DEF هما مثلثان قائما الزاوية ومتشابهان. نسبة التشابه هي 2:1.

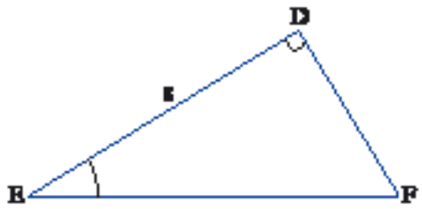
أ. استعينوا بنسبة التشابه وجدوا طول الضلع AB.

ب. احسبوا طول الضلع AC.

ت. احسبوا أطوال أضلاع المثلث DEF.

ث. ما هي النسبة بين مساحتيِ المثلثين؟

ج. افحصوا بواسطة حساب المساحات.



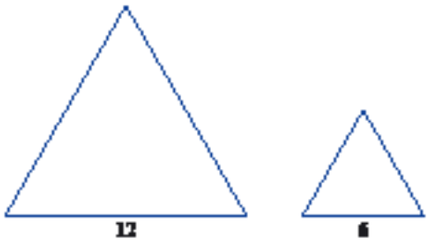
5. أمامكم مثلثان متساويا الأضلاع.

أ. هل المثلثان متشابهان؟ اشرحوا.

ب. ارسموا المثلثين وارسموا ارتفاعًا لأحد الأضلاع في كل مثلث.

ت. احسبوا الارتفاعين ومساحة كل مثلث.

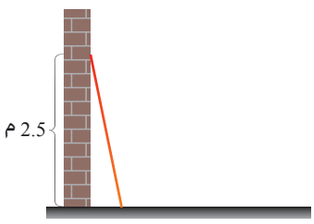
ث. ما هي نسبة المساحتان؟



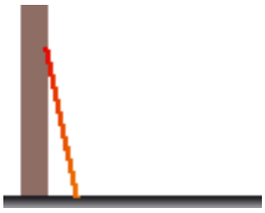
مجموعة مهامّ

في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون مهمّة بديلة لمهمّة 2 في مجموعة المهام. أشرنا إلى هذه المهمّة هنا بـ *، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع.

1. يرتكز سُلّم على حائط. تبعد رِجلا السُّلّم عن الحائط 0.5 م ويقع رأس السُّلّم على ارتفاع 2.5 م. (انظروا الرسمة التوضيحيّة).
احسبوا طول السُّلّم.



2*. يرتكز سُلّم على حائط. تبعد رِجلا السُّلّم عن الحائط 50 سم ويقع رأس السُّلّم على ارتفاع 2.5 م. (انظروا الرسمة التوضيحيّة).



(للتذكير: 1 م = 100 سم).

أ. احسبوا طول السُّلّم.

ب. انزلق السُّلّم وتبعد رِجلاه الآن عن الحائط 60 سم. إلى أي ارتفاع يصل السُّلّم؟

اسم المهمّة البديلة في الموقع: "انزلاق سُلّم" "*סולם מחליק*".

3. طول أحد القائمين في مثلّث قائم الزاوية هو 8 سم.

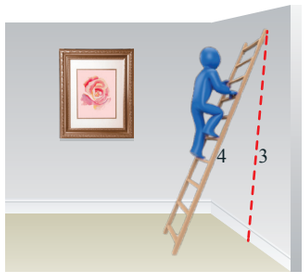
طول الوتر 3 أضعاف طول القائم الثاني.

جدوا طول الوتر وطول القائم الثاني.

4. أراد رسام أن يعلّق صورة في معرض الرسم.

استعان لهذا الغرض بسلّم طوله 4 م.

ارتكز رأس السلّم على ارتفاع 3 م عن أرضية الغرفة.



أ. على أي بُعد عن الحائط يجب أن يضع رجلِي السلّم؟
ارسموا مثلثًا للتوضيح.

ب. أراد أن يُنزل رأس السلّم نِصف متر.
على أي بُعد عن الحائط يجب أن يضع السلّم الآن؟
ارسموا مثلثًا للتوضيح.

5. طول ضلع المربّع الخارجيّ 6 سم.

يربط المربّع الداخليّ بين منتصفات أضلاع المربّع الخارجيّ.

أ. جدوا طول ضلع المربّع الداخليّ.

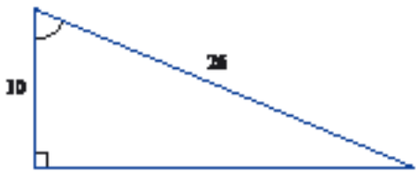
ب. كم ضعفًا طول ضلع المربّع الخارجيّ أكبر من طول ضلع المربّع الداخليّ؟

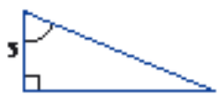
ت. جدوا مساحتيِ المربّعين. كم ضعفًا مساحة المربّع الخارجيّ أكبر من مساحة المربّع الداخليّ؟

ث. المربّعان متشابهان. اشرحوا.

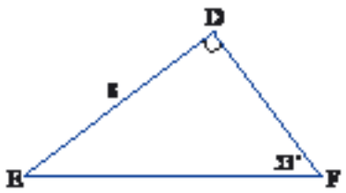
ج. تعلّمنا أن النسبة بين مساحات الأشكال المتشابهة هي مربّع نسبة الأضلاع.
افحصوا هل إجاباتكم عن البنود السابقة ملائمة للادّعاء؟

6. أمامكم مثلّثان متشابهان. لُوِّنت الزوايا المتساوية بنفس اللون.
احسبوا أطوال الأضلاع الأخرى.





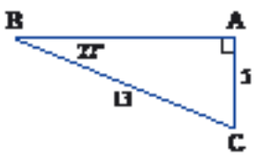
7. أ. احسبوا طول الضلع AB في ΔABC.



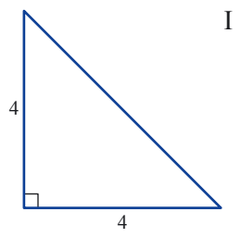
ب. هل المثلّثان متشابهان؟ اشرحوا.
إذا كانت الإجابة نعم فسجّلوا نسبة التشابه.

ت. احسبوا أطوال أضلاع المثلّث EDF.

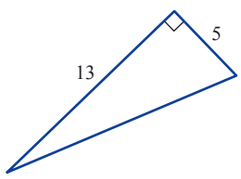
8. أ. أيّ مثلّث من بين المثلّثات (I, II, III) يتشابه مع المثلّث ABC؟ اشرحوا.



I



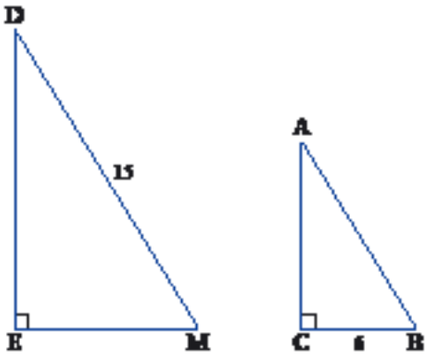
II



III

ب. جدوا أطوال أضلاع المثلّث الذي وجدتموه (المتشابه)، وسجّلوا نسبة التشابه.

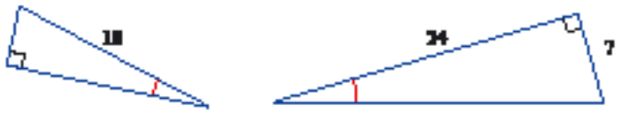
9. المثلّث DEM هو تكبير للمثلّث ΔACB بمقدار 1.5 أضعاف.



أ. جدوا طول الضلع AB.

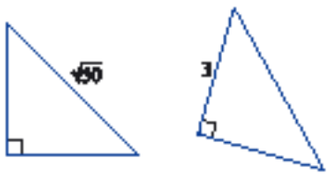
ب. احسبوا أطوال الأضلاع الأخرى في المثلّثين ACB وَ DEM.

10. أمامكم مثلّثان متشابهان. لُوِّنت الزوايا المتساوية بنفس اللون.



احسبوا أطوال الأضلاع الأخرى.

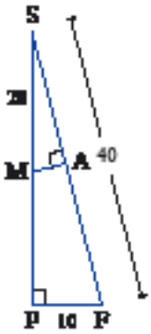
11. أمامكم مثلّثان قائما الزاوية ومتساويا الساقان.



أ. هل المثلّثان متشابهان؟ اشرحوا. إذا كانت الإجابة نعم فاحسبوا نسبة التشابه.

ب. أعطوا مثالًا لقياسات مثلّث متساوي الساقين وقائم الزاوية.
هل يتشابه هذا المثلّث مع المثلّثين في الرسمة؟ اشرحوا.

12. معطى: SPF مثلّث قائم الزاوية، $SF \perp AM$.



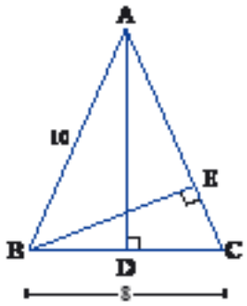
(أُعِدَّت الرسمة للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.)

أ. هل المثلّثان SMA, SFP متشابهان؟ اشرحوا.
إذا كانت الإجابة نعم فسجّلوا النسبة بين الأضلاع المتناظرة.

ب. احسبوا طول AM.

ت. احسبوا طول الضلع SA في المثلّث SMA.

ث. احسبوا طول الضلع SP في المثلّث SFP.



13. مثلّث ABC هو مثلّث متساوي الساقين (AC = AB)
AD ارتفاع على القاعدة، BE ارتفاع على الساق.

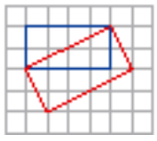
أ. جدوا مثلّثًا يتشابه مع المثلّث BEC (سجِّلوا بمساعدة الإشارة ~)

ب. هل يوجد، في الرسمة، زوج من المثلّثات المتطابقة؟ اشرحوا.

ت. احسبوا طول AD.

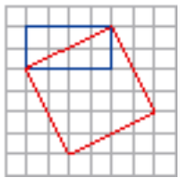
ث. استعينوا بمساواة النسب، بين أطوال أضلاع المثلّثات المتشابهة، التي حصلتم عليها في بند أ، واحسبوا أطوال الأضلاع الأخرى في المثلّث ΔBEC.

14. أ. سجِّلوا أطوال أضلاع المستطيل **الأزرق** الذي يظهر في الرسمة، واحسبوا أطوال أضلاع المستطيل **الأحمر**.
(بوحدات طول ضلع تربيعة).



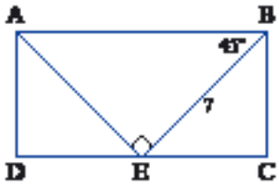
إذا كان طول الضلع عدد غير صحيح فيمكنكم أن تعبِّروا عنه بكتابة الجذور (مثلًا: $\sqrt{8}$).
هل المستطيلان متشابهان؟
إذا كانت الإجابة نعم، فما هي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة؟
ما هي النسبة بين مساحتي المستطيلين؟
هل النسبة بين المساحتين تساوي مربّع النسبة بين أطوال الأضلاع؟

ب. سجِّلوا أطوال أضلاع المستطيل **الأزرق** الذي يظهر في الرسمة، واحسبوا أطوال أضلاع المستطيل **الأحمر**.



هل المستطيلان متشابهان؟
إذا كانت الإجابة نعم، فما هي النسبة بين أطوال الأضلاع المتناظرة؟

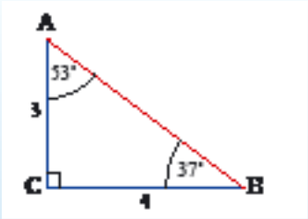
15. أمامكم مستطيل.
احسبوا مساحة المستطيل حسب المعطيات.



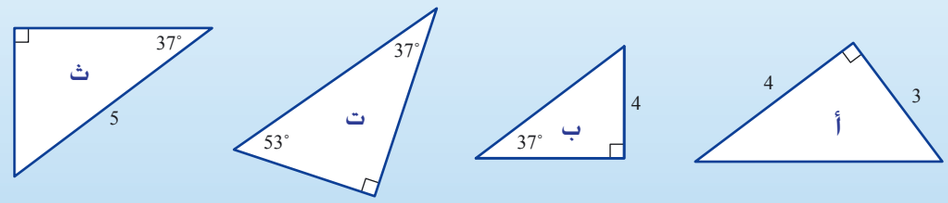
16. أ. معطى طول ضلع مربّع 8 سم. احسبوا طول القُطر.

ب. هل يمكنكم إيجاد مربّع طول ضلعه وطول قطره عددان صحيحان؟ اشرحوا.

الدرس الخامس: تطابق مثلّثات قائمة الزاوية



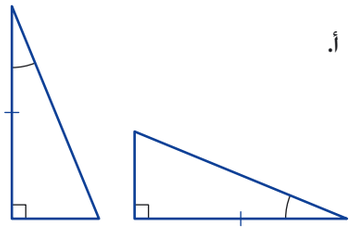
معطى ΔABC وأربعة مثلّثات إضافيّة.
(أُعِدَّت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.)
حدّدوا لكلّ مثلث هل يمكن الاستنتاج حسب المعطيات أنّه يتطابق مع المثلث ΔABC ؟ علّلوا.



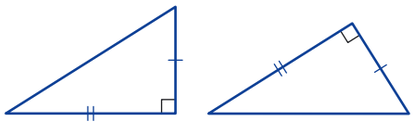
نتناول تطابق المثلّثات القائمة الزاوية ونتعلّم عن نظرية تطابق أخرى.

1. أمامكم أزواج من المثلّثات القائمة الزاوية. أشرنا إلى المقادير المتساوية بنفس الإشارة.
حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن الاستنتاج حسب المعطيات المشار إليها أنّ المثلّثات متطابقة؟
إذا كانت الإجابة نعم فاذكروا النظرية.

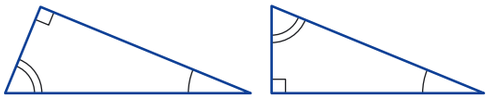
أ.



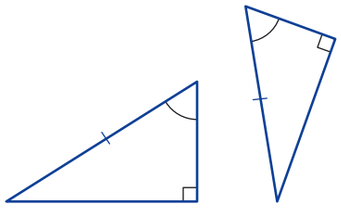
ت.



ب.



ث.



2. طلب المعلم من التلاميذ أن يرسموا، بواسطة مسطرة وزاوية قائمة، مثلّثًا قائم الزاوية فيه طول أحد القائمين 5 سم وطول الوتر 6.5 سم.
قالت **غزالة**: حسبت طول القائم الثاني كي أستطيع أن أرسم المثلّث المطلوب حسب القائمين والزاوية القائمة المحصورة بينهما. ارسموا المثلّث حسب اقتراح **غزالة**.

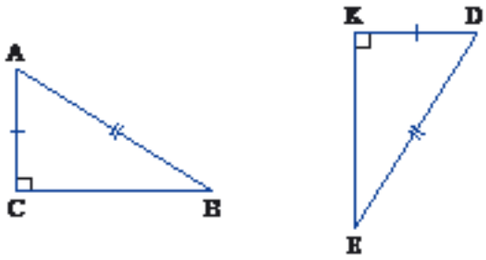
نفكّر بـ ...

3. أمامكم مثلّثان قائما الزاوية متساويان في طول أحد القائمين وفي طول الوتر.

أ. اكتبوا المعطيات بكتابة رياضيّة.

ب. اشرحوا لماذا $BC = EK$؟

ت. اشرحوا لماذا يتحقّق: $\Delta ABC \cong \Delta DEK$؟



نظرية: إذا كان مثلّثان قائما الزاوية متساويين في طول أحد القائمين وفي طول الوتر فإنّ المثلثين متطابقان.

4. في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون فعّاليّة "مثلّث قائم الزاوية حسب قائم ووتر" "**משולש ישר-זווית לפי ניצב ויתר**". ستبنون، في هذه الفعّاليّة، مثلّثًا قائم الزاوية يساوي بطول قائم وبطول الوتر مثلّث قائم زاوية معطى، وستفحصون هل المثلّثان متطابقان؟ نفّذوا الفعّاليّة حسب التعليمات.

فعّاليّة بديلة
في الحاسوب

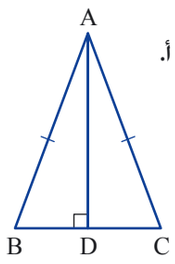
5. قالت **نعيمة**: أنا أستطيع أن أرسم مثلّثًا قائم الزاوية فيه طول أحد القائمين 5 سم وطول الوتر 6.5 سم دون أن أحسب طول القائم الثاني.

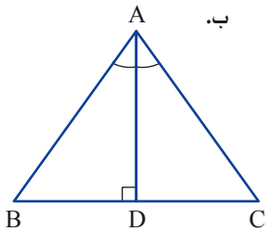
ارسموا أو صفوا مراحل رسم **نعيمة**.

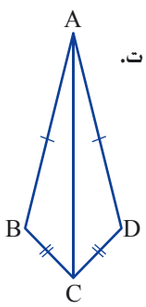
6. أشرنا في كلّ رسمة إلى معطيات.

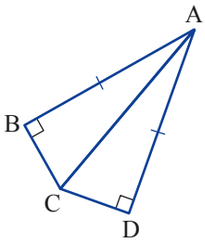
سجّلوا ثلاثة مكوِّنات متساوية حسبها يمكن أن نستنتج أنّ المثلثات، في الرسمة، متطابقة.

سجّلوا التطابق ونظرية التطابق الملائمة.

أ.


ب.


ت.


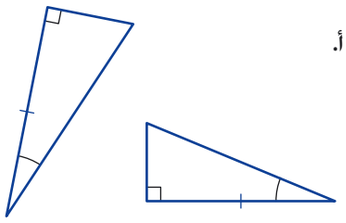
ث.


مجموعة مهامّ

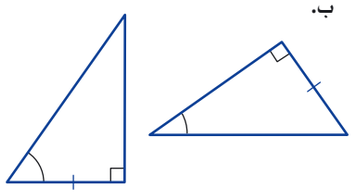
في موقع "الرياضيّات المدمجة"، في قسم "فعّاليّات بواسطة الحاسوب"، ستجدون مهمّة بديلة لمهمّة 8 في مجموعة المهام.
أشرنا إلى هذه المهمّة هنا بـ *، وسجّلنا تحتها اسم المهمّة البديلة في الموقع..

1. حدّدوا، في كلّ بند، هل يمكن أن نستنتج حسب المعطيات أنّ المثلثين المرسومين متطابقان؟ إذا كانت الإجابة نعم فاذكروا النظرية التي اعتمدتم عليها. إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.

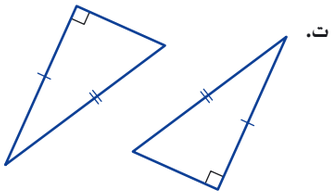
أ.



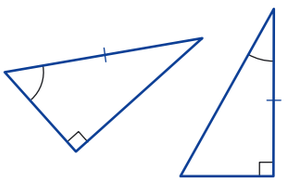
ب.



ت.



ث.



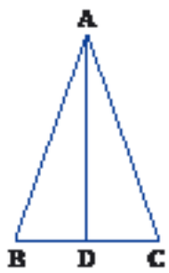
2. أ. معطى: $AB = AC$

$AD \perp BC$

هل يمكن الاستنتاج أنّ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$؟

إذا كانت الإجابة نعم فاذكروا النظرية التي اعتمدتم عليها.

إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.



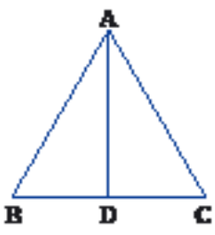
ب. معطى: $BC = AB$

$AD \perp BC$

هل يمكن الاستنتاج أنّ $\Delta ADB \cong \Delta ADC$؟

إذا كانت الإجابة نعم فاذكروا النظرية التي اعتمدتم عليها.

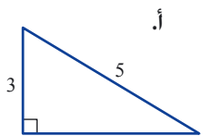
إذا كانت الإجابة لا فارسموا مثالًا مضادًّا.



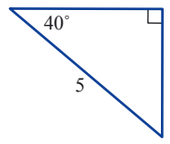
أُعِدَّت الرسومات في المهمتين 3 وَ 4 للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

3. جدوا مثلّثات متطابقة حسب المعطيات المسجّلة في الرسومات. اشرحوا.

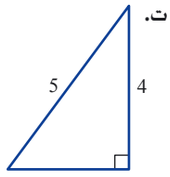
أ.



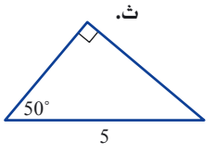
ب.



ت.

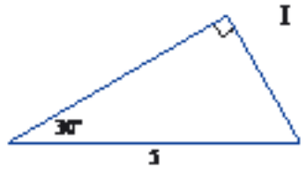


ث.

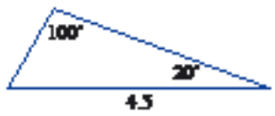


4. أ. جدوا، في كلّ مثلث، مقدارًا إضافيًّا يمكن أن نحسبه بمساعدة المعطيات.

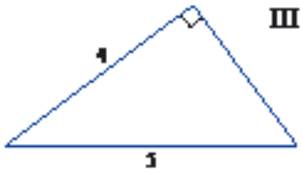
I



II



III



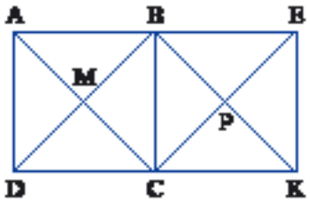
ب. اعتمدوا على المقدار الإضافيّ الذي حسبتموه، ثم ارسموا، بواسطة مسطرة ومثلّث قائم الزاوية، لكلّ مثلّث مثلّثًا يتطابق معه.

5. أمامكم مربّعان متجاوران وأقطارهما.

أ. اشرحوا لماذا المربّعان متطابقان؟

ب. جدوا، في الرسمة، زوجين من المثلّثات القائمة الزاوية المتطابقة؟ وسجِّلوهما.

ب. جدوا، في الرسمة، ثلاثة أزواج من المثلّثات القائمة الزاوية غير المتطابقة؟ وسجِّلوها.



6. تطرّقوا إلى الرسمة والمعطيات في المهمّة 5، وسجِّلوا ثلاثة شروط تبرهن أنّ $\Delta BAD \cong \Delta BEK$.

7. تطرقوا إلى الرسمة والمعطيات في المهمّة 5، وسجِّلوا ثلاثة شروط تبرهن أنّ $\Delta DBK \cong \Delta ACE$.

8*. ابنوا، في كلّ بند، مثلّثًا قائم الزاوية حسب المعطيات. استعينوا بمسطرة، بمقياس الزاوية وبالفرجار.

أ. طولا القائمان 4 سم وَ 5 سم.

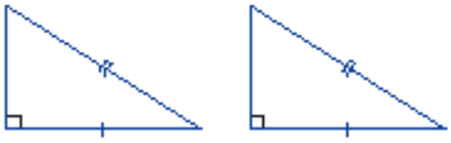
ب. طول أحد القائمين 3 سم، ومقدار الزاوية الحادّة المجاورة له 60°.

ت. طول الوتر 5 سم، ومقدار الزاوية الحادّة المجاورة له 35°.

ث. طول أحد القائمين 4 سم، وطول الوتر 6 سم.

اسم المهمة البديلة في الموقع: "بناء مثلّثات قائمة الزاوية " *"בניית משולשים ישרי-זווית".*

9. أمامكم مثلّثان قائما الزاوية متساويان بقائم واحد وبالوتر.



أ. كم مثلّثًا غير متطابق يمكن أن نبني عندما نضع ضلعين متساويين للمثلّثين بشكل متجاور؟ ارسموها.

ب. كم شكلًا رباعيًّا غير متطابق يمكن أن نبني عندما نضع ضلعين متساويين للمثلّثين بشكل متجاور؟ ارسموها.

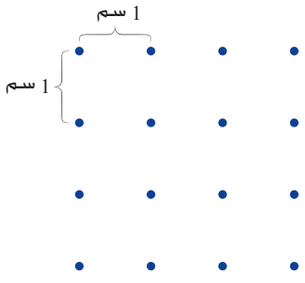
10. معطى مثلّثان قائما الزاوية متساويان بقائم واحد وبالوتر.

أ. عندما نضع وتر أحد المثلّثين بجانب وتر المثلّث الآخر بشكل متجاور فيمكن أن نحصل على شكلين رباعيّين. ما اسميهما؟

ب. في أحد الشكلين الرباعيّين، ينصف الوتر المشترك زاويتين في الشكل الرباعيّ؟ في أيّ شكل رباعيّ؟ اشرحوا.

ت. برهنوا أن الشكل الرباعيّ الثاني الناتج هو مستطيل.

11. انسخوا الشبكة التي أمامكم عدّة مرّات (يوجد في الشبكة 4 x 4نقاط).



أ. ارسموا مربّعات مختلفة بحيث تكون رؤوسها على نقاط الشبكة.
كم مربّعًا مختلفًا وجدتم؟

ب. جدوا مساحة كلّ مربّع بالسنتمترات المربّعة.
(يجب الاستعانة بنظرية فيثاغوروس في قسم من المربّعات)

نحافظ على لياقة رياضيّة

مسائل كلاميّة بمتغيِّر واحد

1. اخترت عددًا. ضربته في 4. حصلت على 60.

أ. اكتبوا معادلة مناسبة.

ب. هل يمكن أن يكون العدد الذي اخترته: 30؟ 40 ؟ 15؟ اشرحوا.

2. اخترت عددًا. أضفت له 3. ضربت المجموع في 2. حصلت على 20.

أ. اكتبوا معادلة مناسبة.

ب. هل يمكن أن يكون العدد الذي اخترته: 7– ؟ 0؟ 7؟ 14؟

3. اخترت عددًا وضربته في 3. أضفت 5 إلى حاصل الضرب.
طرحت العدد الذي اخترته مرتين من المجموع. حصلت على 5.

أ. اكتبوا معادلة مناسبة.

ب. اكتبوا معادلة أبسط من السابقة وجدوا العدد الذي اخترته.

4. معطاة معادلة $2x - 5 - x = 0$
قصوا "قصة" مناسبة للمعادلة وجدوا العدد الذي اخترته.

5. اخترت عددًا. ضربته في 2. طرحت العدد الأصغر بـ 10 مرتين من العدد الذي اخترته. حصلت على عدد يساوي 5 أضعاف العدد الذي اخترته.
ما هو العدد الذي اخترته؟ اشرحوا.

6. عدد التلاميذ الذين تسجّلوا لدورة الشطرنج ضعفا عدد التلاميذ الذين تسجّلوا لدورة التمثيل.
انتقل، بعد اللقاء الأول، 8 تلاميذ من دورة الشطرنج إلى دورة التمثيل، وعندئذٍ أصبح عدد التلاميذ في دورة التمثيل 1.5 أضعاف عدد التلاميذ في دورة الشطرنج.
كم تلميذًا تسجَّل في البداية لكلّ دورة؟

7. استأجر السيد مروان بيتًا. تخبط هل يركّب، في البيت، سخانًا شمسيًّا لتسخين الماء أم سخانًا كهربائيًّا؟
يكلّف تركيب السخان الشمسيّ 2,100 شاقل، ويكلّف تركيب السخان الكهربائيّ 575 شاقلا.
تكاليف تشغيل السخان الكهربائيّ 50 شاقلًا في الشهر.
قرر السيد مروان أن يركّب سخانًا شمسيًّا.
كم شهرًا يجب أن يسكن السيد مروان في البيت المستأجر كي يصبح قراره الأرخص؟