الوحدة عشرون: الإحصاء

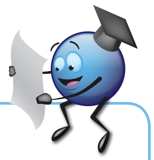
الدرس الأوّل: نزيه (متّزنة) أم غير نزيه.

خطّطت **رنا** و**جنى** أن تدرسا للامتحان معًا. أرادت كلّ واحدة منهما أن تكون الدراسة في بيتها. ولم تنجح كلٌّ منهما في إقناع الأخرى، لذلك قرّرتا رمي قطعتين نقديّتين من الشاقل.
إذا أظهرت القطعتان النقديتان نفس الجهة فيدرسن في بيت **رنا**.
إذا أظهرت القطعتان النقديّتان جهتين مختلفتين فيدرسن في بيت **جنى**.
هل اللعبة متّزنة (نزيهة)؟ إذا كان الجواب لا فأيٌّ منهما ستختارون اللعب مكانها؟
طلبت **شذى** الانضمام.
تمّ الاتّفاق على أنّه إذا أظهرت القطعتان النقديّتان جهة الشجرة  فسيدرسن في بيت **رنا**.
إذا أظهرت القطعتان النقديّتان جهة العدد واحد  فسيدرسن في بيت **شذى**.
إذا أظهرت القطعتان النقديّتان جهتين مختلفتين فسيدرسن في بيت **جنى** .
هل اللعبة متّزنة؟
نتعلّم كيفية تحديد ما إذا كانت اللعبة متزنة أو غير متزنة.

.1 تلعب **شيراز** و**راما** بمكعّب زهر عاديّ.
تفوز **شيراز** إذا أظهر المكعّب 1, 3 أو 5.
تفوز **راما** إذا أظهر المكعّب 2, 4 أو 6.
هل اللعبة متّزنة؟

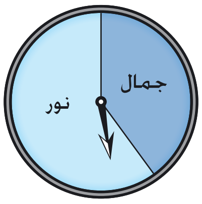
.2 يلعب **سامي** و**رامي** بمكعّب زهر عاديّ.
يفوز **سامي** إذا ظهر عدد من مضاعفات العدد 3.
يفوز **رامي** إذا ظهر عدد ليس من مضاعفات العدد 3.
أ. هل اللعبة متّزنة؟ إذا كان الجواب لا فمن منهما كنتم ستختارون اللعب مكانه؟
ب. يرمي كلّ طالب من طلاّب الصفّ المكعّب 20 مرة.
اِجمعوا النتائج من الصفّ وسجّلوها في الجدول.
ت. هل النتائج ملائمة لإجاباتكم في بند أ؟

يفوز سامي (عدد من مضاعفات العدد 3)	يفوز رامي (عدد ليس من مضاعفات العدد 3)



- **الاحتمال** هو مجال رياضيّ يتناول حسابات أو تحليل احتمالات نتائج.
لا يمكن أن نتوقع نتيجة تجربة واحدة أو نتيجة لعبة واحدة مسبقًا.
إذا أجرينا عددًا كبيرًا من التجارب فمن الممكن أن نتوقع النتائج باحتمال كبير .
- **اللعبة المتّزنة (النزيهة)** هي اللعبة التي احتمالات الفوز فيها متساوية لدى كلّ واحد من المشتركين.
مثال: وُصفت، في المهمّة 1، لعبة متّزنة.

.3 ندير عقرب الساعة الّذي في الرسمة.
جمال هو الفائز- إذا توقّف العقرب في مساحته.
نور هو الفائز- إذا توقّف العقرب في مساحته.

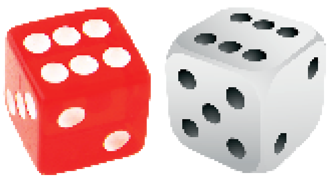


أ. هل اللعبة متّزنة (نزيهة)؟ إذا لم تكن متّزنة فلمن سيكون احتمال الفوز أكبر؟

ب.ندير عقرب الساعة مرّة واحدة.
هل يمكن أن نخمّن من البداية من الفائز في هذه الجولة؟؟

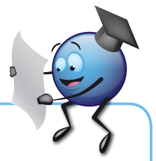
ت.ندير عقرب الساعة 1,000 مرة.
هل يمكن أن نخمّن من البداية من الذي يفوز أكثر؟
كم مرّة يمكن أن نخمّن عدد مرّات وقوف العقرب في مساحة نور: أكثر من 500 مرّة أم أقلّ من 500؟ اشرحوا.

.4 ترمي **مايا وملاك** مكعّب زهر وتجمعان النقاط. في كلّ مرّة يحدِّدْنَ قوانين مختلفة.
تملك **مايا** مكعّب زهر أبيض. تملك **ملاك** مكعّب زهر أحمر. كلاهما ترمي المكعّب في نفس الوقت.



أ. قوانين اللّعبة الأولى :
تحصل **مايا** على نقطة - إذا توقّف المكعّب الأبيض على رقم 5.
تحصل **ملاك** على نقطة - إذا توقّف المكعّب الأحمر على رقم 5.
هل اللّعبة متّزنة؟ اشرحوا.

ب. قوانين اللّعبة الثانية:
تحصل **مايا** على نقطة - إذا توقّف المكعّب الأبيض على رقم 3.
تحصل **ملاك** على نقطة - إذا توقّف المكعّب الأحمر على رقم 4.
هل اللّعبة متّزنة؟ اشرحوا.



مجموعة نتائج التجربة تسمّى **"حدث"**.
يسمّى الحدث الذي تكون فيه نتيجة واحدة **"حدث بسيط"**.

مثال: عند رمي المكعّب نحصل على نتيجة من ستّة نتائج : 1, 2, 3, 4, 5 أو 6.
مجموعة النتائج "الحصول على عدد أكبر من 2": 3, 4, 5 أو 6 هي **حدث**.
النتيجة: "الحصول على العدد 2 "هي **حدث بسيط**.

.5 نتطرق إلى المهمة 4.

أ. قوانين اللّعبة الثالثة:
تحصل **مايا** على نقطة - إذا كان مجموع الأعداد على وجهي المكعبين مساويًا لـ 6.
تحصل **ملاك** على نقطة - إذا كان مجموع الأعداد على وجهِي المكعبين مساويًا لـ 5.
هل اللّعبة متّزنة؟ اشرحوا.
إذا كان الجواب لا فاقترحوا تغييرًا لكي تصبح اللّعبة متّزنة.

ب. كم من الأحداث البسيطة يمكن أن تحصلوا عليها عند رمي مكعّبين ؟ اِشرحوا.

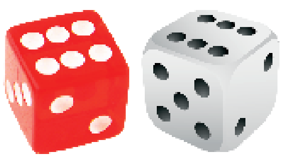
عند رمي دبوس يمكن أن نحصل على "الرأس" أو " الجانب"
كلّما كان طول قطر "الرأس" أكبر من طول "الإبرة" ، فإنّ احتمال سقوط الدبّوس على رأسه أكبر.
احتمالات الحصول على "رأس" أو "إبرة" غير متساوية.
يمكن أن تخمّنوا ما هو احتمال الحصول على "رأس"، وما هو احتمال الحصول على "جانب" من خلال رمي كلّ الدبابيس الموجودة في العلبة وفحص ما يلي: كم دبّوسًا سقط على "رأسه" وكم دبّوسًا سقط على "جانبه"؟

مجموعة مهامّ

1. نرمي مكعّب زهر عاديًّا.
يحصل **عماد** على نقطة - إذا حصل على عدد زوجيّ عند رمي المكعّب.
يحصل **عديّ** على نقطة - إذا حصل على عدد فرديّ عند رمي المكعّب.
هل اللّعبة متّزنة؟ إذا لم تكن كذلك، من كنتم ستختارون اللّعب مكانه؟

2. ترمي **ليلى وهدى** مكعّب زهر عاديًّا.
تحصل **ليلى** على نقطة - إذا حصلت على عدد أقلّ من 4 عند رمي المكعّب.
تحصل **هدى** على نقطة - إذا حصلت على عدد أكبر من 3 عند رمي المكعّب.
هل اللّعبة متّزنة؟ اشرحوا لماذا.

3. نرمي مكعّبيْ زهر.
يفوز اللّاعب **الأوّل** إذا حصل على نفس العدد عند رمي المكعّبين.
يفوز اللّاعب **الثاني** إذا حصل على عددين مختلفين عند رمي المكعّبين.
هل اللّعبة متّزنة؟ إذا لم تكن كذلك، من كنتم ستختارون اللعب مكانه؟ اشرحوا.



4. نرمي مكعبيْ زهر.
يفوز اللّاعب **الأوّل** إذا كان مجموع العددين عند رمي المكعّبين مساويًا لـ 8.

يفوز اللّاعب **الثاني** إذا كان مجموع العددين عند رمي المكعّبين مساويًا لـ 7.
هل اللّعبة متّزنة؟ إذا لم تكن كذلك، اقترحوا تعديلات على اللّعبة كي تصبح متّزنة.

.5 تلعب **رنا ونهى** لعبة يستخدمن فيها البلبيل (الخذروف).
تفوز **رنا** في اللّعبة إذا حصلت على **"ف"** أو **"ج"** أو **"هـ"**.
تفوز **نهى** في اللّعبة إذا حصلت على **"ن"**.
هل اللّعبة متزنة؟ إذا لم تكن كذلك، اِقترحوا تعديلات على اللّعبة كي تصبح متّزنة.

.6 نرمي القطعة النقديّة "شيقل" 200 مرّة.
كم مرّة يمكن أن نحصل على **شجرة**؟

.7 رمى **مسعود** الشيقل مرّات كثيرة.
منها: 496 مرّة حصل على العدد 1.
كم مرّة، بالتقريب، قام **مسعود** برمي القطعة النقديّة؟

.8 يلعب **يوسف ورامي** بالساعات (انظروا الرسمة)
نختار ساعة وندير العقرب.
اللّاعب الذي يتوقّف العقرب في مساحته هو الفائز.

ساعة I ساعة II ساعة III

أ. أيّ ساعة يجدر أن يختارها المتسابقون للّعب؟ اِشرحوا.
ب. هل اللعبة متّزنة في أيّ ساعة من الساعات المعطاة؟ إذا كان كذلك، فأيّ ساعة متّزنة؟
ت. ندير العقرب 600 مرّة في كلّ جولة.
خمّنوا: كم مرّة يمكن أن يفوز فيها رامي إذا لعب بالساعة I؟ بالساعة II؟ بالساعة III؟
ث. يخطّط يوسف ورامي للّعب مرّة واحدة في الساعة I.
هل يمكن أن نخمّن مسبقًا من الفائز؟ لماذا؟

.9 يعمل رامي في دكّان، ويحصل على 50 شاقلًا في اليوم مقابل عمله.
اِقترح صاحب الدكّان على رامي أن يقوم برمي مكعّب زهر بدلًا من إعطائه 50 شاقلًا في اليوم.
- إذا حصل على النتيجة $\boxed{\bullet}$ يحصل على 200 شاقل.
- إذا حصل على عدد آخر (يختلف عن 1) يحصل على 10 شواقل.

هل من الأفضل **لرامي** أن يوافق على هذا الاقتراح؟ عللوا.

الدرس الثاني: ما هو الاحتمال؟

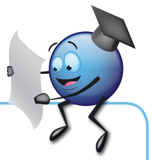
يرمي **مالك** مكعّب زهر عاديًّا ويخطّط كالتالي:
إذا حصلت على العدد 6، سأذهب للعب كرة القدم.
إذا حصلت على عدد أقلّ من 6، سأذهب للسينما.
إذا حصلت على عدد أكبر من 6، سأذهب لتحضير واجباتي المدرسيّة.
حدّدوا لكلّ واحد من الأحداث، هل يمكن أن يحدث، يجب أن يحدث، من غير الممكن حدوثه؟

- يحضّر **مالك** واجباته المدرسيّة
- يذهب **مالك** للعب كرة القدم
- يذهب **مالك** للسينما
- يخرج **مالك** من البيت

نبحث احتمالات حدوث أحداث مختلفة.

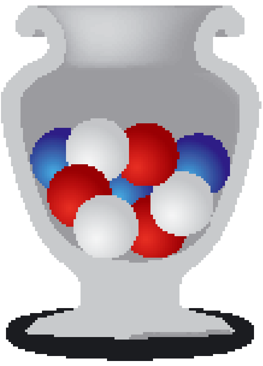
1. نرمي مكعّب زهر عاديًّا.
اكتبوا بجانب كلّ حدث: هل هو ممكن (يمكن حدوثه) ، مؤكد (يجب أن يحدث)، من غير الممكن حدوثه (مستحيل).

أ. الحصول على العدد 5.
ب. الحصول على عدد فرديّ.
ت. الحصول على العدد 7.
ث. الحصول على عدد أصغر من 7.

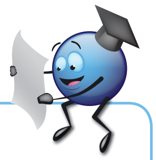


الحدث الممكن هو حدث يمكن حصوله.
مثال: الحدث "الحصول على العدد 2 عند رمي مكعب زهر"، **هو حدث ممكن**.
حدث مؤكد هو الحدث الواجب حصوله.
مثال:" الحصول على عدد طبيعيّ عند رمي مكعّب زهر"، هو **حدث مؤكّد**.
الحدث غير الممكن (المستحيل) هو حدث لا يمكن حصوله.
مثال: الحدث " الحصول على العدد 8 عند رمي مكعّب زهر"، هو **حدث غير ممكن (مستحيل)**.

2. يوجد في جرّة 3 كرات حمراء، وَ 3 كرات بيضاء وَ 3 كرات زرقاء.
نُخرج من الجرّة 4 كرات من غير أن ننظر فيها.
سجّلوا في كلّ بند: هل الحدث ممكن، مؤكّد، غير ممكن.



أ. للكرات الأربع اللون نفسه.
ب. اثنتان من الكرات بيضاء واثنتان من الكرات حمراء.
ت. لكلّ واحدة من الكرات الأربع لون مختلف.
ث.من بين الكرات الأربع لا يوجد كرة بلون الأبيض.
ج. لاثنتين من الكرات الأربع اللون نفسه.
ح. لثلاثة من الكرات الأربع اللون نفسه.



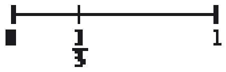
- العدد الذي يمثِّل احتمال الحصول على نتيجة معيّنة هو **احتمال** الحصول على نفس النتيجة.

مثال: إذا قمنا برمي مكعّب زهر عدّة مرّات نحصل على العدد 2 بقيمة مقدارها $\frac{1}{6}$ من الرميات.
لذا يمكن أن نقول: إن احتمال الحصول على العدد 2 هو $\frac{1}{6}$
احتمال الحصول على أيّ عدد أخر على المكعب هو $\frac{1}{6}$ أيضًا

- احتمال **الحدث غير الممكن** هو 0.

احتمال **الحدث المؤكّد** هو 1.
احتمال حدوث حدث في كل حالة أخرى هو عدد بين 0 إلى 1.
يمكن وصف الاحتمال بواسطة محور الأعداد كنقطة موجودة على القطعة التي طرفاها 0 وَ 1.

مثال: عند رمي مكعّب، يكون الحصول على عدد أصغر من 3 هو حدث ممكن، واحتماله $\frac{1}{3}$.



- في اللّعبة المتّزنة ، يوجد لجميع المشتركين نفس احتمال الفوز.

مثال: يوجد نفس الاحتمال عند رمي قطعة نقديّة للحدث " الحصول على عدد" وللحدث " الحصول على شجرة"،
لذا فاحتمال كل واحد منهما هو $\frac{1}{2}$ ، واللّعبة متّزنة (نزيهة).

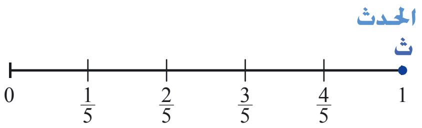
نفكّر بـ ...

3. يوجد في سلّة 3 كرات خضراء وَ 2 كرات زرقاء.
حدّدوا لكلٍّ من الأحداث: **ممكن، غير ممكن، مؤكّد**.

أ. أن نُخرج كرة خضراء.
ب. أن نُخرج كرة زرقاء.
ت. أن نُخرج كرة حمراء.
ث. أن نُخرج كرة غير حمراء.

جدوا احتمال كلّ حدث من الأحداث.
انسخوا وحدّدوا على مستقيم الأعداد حرف الحدث الملائم (انظروا المثال).

مثال:



4. نلعب بمكعّب زهر عاديّ.
أ. نرمي المكعّب 3,000 مرّة.
كم من المرّات يُتوقّع الحصول على أعداد زوجيّة؟ ما هو احتمال الحصول على أعداد زوجيّة؟ اشرحوا.
ب. نرمي المكعّب مرّتين.
هل سنحصل على عددين أحدهما زوجيّ والآخر فرديّ؟ اشرحوا.

بشكل عامّ، لا يمكن التخمين مسبقًا نتيجة تجربة واحدة أو نتائج تجارب متفرّقة.

يمكن مسبقًا تخمين نتيجة التجربة بشكل دقيق، وذلك عند إجراء عدد كبير من التجارب.

مثال: عند رمي مكعّب زهر مرّتين لا يمكن توقّع النتيجة. عند رمي مكعّب زهر عادي 1,200 مرّة، نحصل على عدد زوجيّ حوالي 600 مرّة، لأنّ نِصف الأعداد على المكعّب زوجيّة.

.5 ندير خذروفًا (بلبيلًا) 1,000 مرّة ونسجل كم مرّة نحصل على الحرف **ن**.

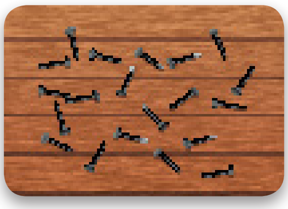
اختاروا، أيٌّ من الأعداد التالية ملائمة لعدد المرّات التي نحصل فيها على الحرف **ن**.

50   261   532   239   100   999   243

نفكّر بـ ...

.6 اقرأوا القطعة التالية.

نحاول تخيّل أرضيّة خشب مركّبة من ألواح خشب ضيّقة قريبة جدًّا من بعضها.
ننشر مسامير على الأرض بشكل عشوائي.
يتلامس قسمًا من المسامير مع الشق الموجود بين ألواح الخشب.
(8 من المسامير في الرسمة تتلامس مع الشق وَ 12 من المسامير لا تتلامس).
إعادة التجربة عدّة مرّات تمكّننا من تمييز ومعرفة التكرارية التي يتلامس فيها المسمار بشُق من شقوق الأرضيّة.



أ. اعتمادًا على الرسمة أعلاه، هل يمكن تحديد احتمال الحدث" يتلامس المسمار بالشُق"؟

ب. نشروا 1,200 مسمار على أرضيّة الخشب. 315 مسمارًا تلامس مع الشق والباقي لم يتلامس. ما هو احتمال سقوط مسمار بين شقين (بحيث لا يلمس الشق بين الألواح).

ت. قال جابر: الاحتمال هو $\frac{3}{4}$.
هل ما قاله جابر صحيح؟ اشرحوا.

في أعقاب...

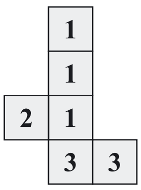
.7 أمامكم فرش لمكعّبين. نرمي المكعّبين.

أ. جدوا احتمال كلّ حدث من الاحداث التالية:

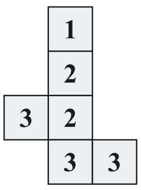
- الحصول على 4 في المكعّب **أ**.   - الحصول على 4 في المكعّب **ب**.
- الحصول على 2 في المكعّب **أ**.   - الحصول على 2 في المكعّب **ب**.

ب. جدوا عددًا بحيث يكون احتمال الحصول عليه في المكعّب **أ** أكبر.

ت. جدوا عددًا بحيث يكون احتمال الحصول عليه في المكعّب **ب** أكبر.



المكعّب أ



المكعّب ب

مجموعة مهامّ

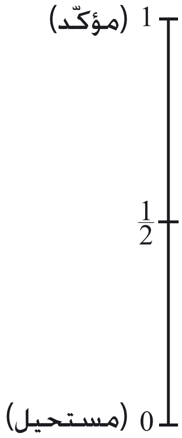
1. أ. نرمي مكعّب زهر عاديًّا، ما هو احتمال الحصول على النتيجة 6؟

ب. نرمي المكعّب 6,000 مرّة . كم مرّة يتوقّع الحصول على النتيجة 6؟

ت. رمت **دلال** المكعّب ثلاث مرّات، وفي كلّ الرميات حصلت على العدد 6.

تخطّط **دلال** لرمي المكعّب مرّة أخرى. ما هو احتمال حصول **دلال** على 6 في هذه المرّة أيضًا؟ لماذا؟

؟



2. اتّفق عدّة طلّاب بأن يقيموا حفلة فجائيّة لصاحبهم.

اقترح **زياد** تاريخًا للمقابلة.

قال **عماد**: هنالك احتمال كبير أن أصل.

قال **داود**: احتمال وصولي صعب.

قال **زياد**: سوف أصل مائة بالمائة.

قال **نور**: سأكون خارج البلاد في نفس اليوم.

انسخوا المحور، وحدّدوا بالتقريب مكان الاحتمال الملائم لاشتراك كلّ طالب في الحفلة.

.

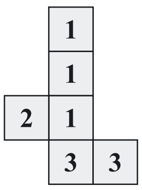
3. أمامكم فرش لمكعّبين مميّزين

أ. نرمي المكعّب **أ**. أيٌّ من الأعداد يكون احتمال الحصول عليه هو الأصغر؟

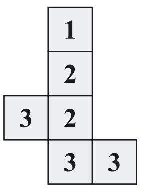
ب. نرمي المكعّب **ب**. أيٌّ من الأعداد يكون احتمال الحصول عليه هو الأصغر؟

ت. في أيٍّ من المكعّبين يكون احتمال الحصول على العدد 3 هو الأكبر؟

ث. جدوا عددين لهما نفس الاحتمال بحيث يكون كلّ واحد منهما مسجلاً على مكعّب مختلف.



المكعّب أ



المكعّب ب

4. نرمي مكعّب زهر عاديًّا.

سجّلوا مثالاً لحدث:

أ. غير ممكن (احتمال 0)   ب. مؤكّد (احتمال 1)   ت. الاحتمال $\frac{1}{2}$

5. نرمي مكعّب زهر عاديًّا.

سجّلوا، في كلّ بند، حدثين ملائمين للاحتمالات المعطاة.

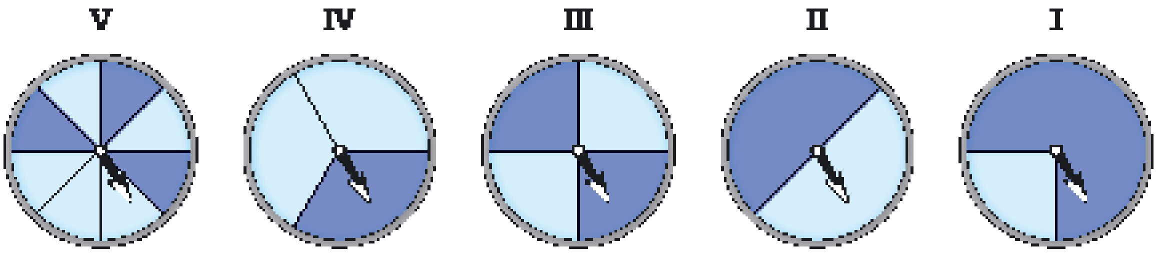
أ. الاحتمال $\frac{1}{2}$ ب. الاحتمال $\frac{1}{3}$ ت. الاحتمال 1   ث. الاحتمال 0

.6 نرمي مكعّب زهر مرّتين، ونكتب، من الأعداد الناتجة، عددًا مكوّنًا من منزلتين.
العدد الناتج من الرمية الأولى هو منزلة العشرات، والعدد الثاني هو منزلة الآحاد.
أ.سجّلوا حدثين مؤكّدين.
ب. سجّلوا حدثين ممكنين.
ت. سجّلوا حدثين غير ممكنين.

.7 نرمي مكعّب زهر عاديًّا.
حدّدوا في كلّ حدث نوعه (ممكن، مؤكّد، غير ممكن) وسجّلوا احتماله.

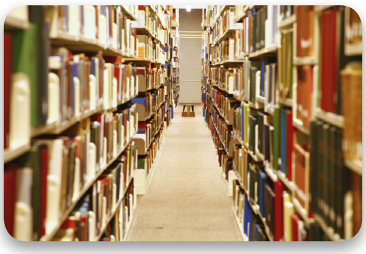
أ. الحصول على العدد 10.
ب. الحصول على عدد يقسم على 5.
ت. الحصول على عدد أصغر من 3 .
ث. الحصول على عدد أوّليّ، (تذكّروا، العدد 1 ليس أوّليا).
ج. الحصول على عدد يختلف عن 4.
ح. الحصول على عدد أصغر من 10.
خ. الحصول على عدد ذي منزلتين.
د. الحصول على عدد زوجيّ أكبر من 4.
ذ. الحصول على عدد سالب.
ر. الحصول على عدد زوجيّ.

.8 ندير العقرب في كلّ ساعة من الساعات.



حدّدوا أيٌّ من الادّعاءات التالية صحيح في كلّ ساعة؟ اشرحوا.
أ. احتمال وقوف العقرب في المساحة الملونة بالأزرق الغامق هو الأكبر.
ب. احتمال وقوف العقرب في المساحة الملونة بالأزرق الفاتح هو الأكبر.
ت. الاحتمالان أ وَ ب متساويان.

.9 يوجد على رفّ المكتبة 90 كتابًا.
$\frac{2}{3}$ من الكتب باللّغة العبرية، وباقي الكتب باللّغة الانجليزيّة.
أ. نختار عشوائيًّا كتابًا من الرّفّ. ما هو احتمال كونه كتابًا باللّغة الإنجليزيّة؟
ب. سجّلوا مثالًا لحدث مؤكّد، مثالًا لحدث ممكن ومثالًا لحدث غير ممكن.



الدرس الثالث: تخمينات وتوقّعات

يعرض الجدول تكراريّة رواتب العاملين في مصنع **"الأمل"**.

الراتب الشهريّ (بالشواقل)	4,500	4,700	5,100	5,500	6,200	9,500	11,000	17,500
عدد العاملين (التكراريّة)	2	4	2	8	5	1	2	1

كم عاملاً في المصنع؟

نختار عاملاً على نحو عشوائيّ، ما هو احتمال أن يكون راتبه 5,500 شاقل؟

نتعلّم عن العلاقة بين الاحتمال والتكراريّة النسبيّة.

نتطرّق في المهمتين 1 وَ 2 إلى المعطيات التي وردت في مهمة الافتتاحية.

1. أ. كم عاملًا يتقاضى راتب شهريّ 6,000 شاقل فما فوق؟

ب. احسبوا معدّل الراتب الشهريّ في مصنع " الأمل".

ت. نختار عاملا على نحو عشوائيّ، احسبوا الاحتمالات:

- راتبه الشهريّ 6,200 شاقل.
- راتبه الشهرّ أكثر من 2,000 شاقل.
- راتبه الشهريّ أقلّ من معدّل الراتب الشهريّ لعمّال المصنع.
- راتبه الشهرّ أقل من 20,000 شاقل.

ث. سجّلوا مثالًا لحدث مؤكّد، مثالًا لحدث ممكن ومثالًا لحدث غير ممكن.

ج. سجّلوا مثالًا لحدثين مختلفين لهما نفس الاحتمال.

نفكّر بـ ...

2. 8 من بين العاملين في مصنع **" الأسلاك"** راتبهم الشهريّ 5,500 شاقل لكلّ واحد.

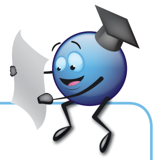
أ. نختار عشوائيًّا عاملًا من مصنع " الأمل" وعاملًا من مصنع " الأسلاك".

هل يمكن أن نحدّد أن احتمال حصول العامل على راتب شهريّ بمبلغ 5,500 شاقل هو احتمال متشابه في المصنعين؟

بماذا تتعلّق الاجابة؟

ت. عدد العمّال في مصنع "أسلاك" أكبر بمرّتين من عدد العمّال في مصنع " الأمل".

ما هو احتمال مقابلة عامل يعمل في مصنع **" الأسلاك"** ويتقاضى5,500 شاقل؟



للتذكير

تعلّمنا في الماضي أنّ **التكراريّة النسبيّة** لمعطى معيّن هي قسم من المعطى من بين كلّ المعطيات. نتناول، في موضوع الاحتمال، التكراريّة النسبيّة للأحداث.

التكراريّة النسبيّة لحدث هي النسبة بين تكراريّة الحدث وبين مجموع التكراريّات.

لتحديد الاحتمال لا يكفي أن نعرف تكراريّة الحدث، بل من الضروريّ معرفة التكراريّة النسبيّة.

هذا يعني أنّه من المهمّ الاهتمام بالنسبة:

$$\textbf{التكراريّة النسبيّة} = \frac{\text{تكراريّة الحدث}}{\text{مجموع التكراريّات}}$$

3. في مدينة " النور" أقاموا انتخابات لرئاسة المدينة.
المرشّح الحاصل على أكثر من 50% من الأصوات (أي: إذا اختاره أكثر من نِصف المشتركين في الانتخابات). يكون هو الرئيس.

في المدينة أ- حصل السيّد لؤيّ على 40,000 من أصوات المنتخبين لرئاسة المدينة.

في المدينة **ب**- حصل السيّد حامد على 30,000 من أصوات المنتخبين لرئاسة المدينة.

أ. هل من الممكن معرفة أيّ من المرشحين تمّ اختياره لرئاسة البلديّة؟ اِشرحوا.

ب. هل يمكن أن يكون السيّد حامد هو من تمّ اختياره؟
إذا كان الجواب نعم فأعطوا مثالاً، وإذا كان الجواب لا فاشرحوا.

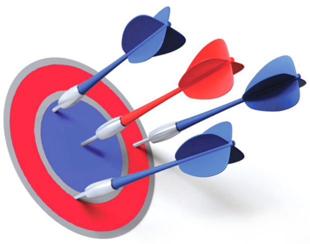
ت. أيّ من المعطيات مطلوب أن نعرفها كي نجيب على بند أ ؟ اشرحوا.

مجموعة مهامّ

1. أ. في الصفّ الثامن أ نجح في الامتحان 12 طالبًا من بين 20.
في الصفّ الثامن ب نجح في نفس الامتحان 18 طالبًا من بين 20.
في أيّ صف سيكون احتمال المقابلة (بشكل عشوائيّ) لطالب نجح في الامتحان هو الأكبر؟ اشرحوا.

ب. في الصفّ الثامن ت نجح في الامتحان 12 طالبًا من بين 20.
في الصفّ الثامن ث نجح في الامتحان 18 طالبًا من بين 40.
في أيّ صف سيكون احتمال المقابلة (بشكل عشوائيّ) لطالب نجح في الامتحان هو الأكبر؟ اشرحوا.

2. يرمي **أحمد وأيوب** أسهماً نحو لوحة الهدف.
احتمال إصابة لوحة الهدف عند **أحمد** هو 0.2.
احتمال إصابة لوحة الهدف عند **أيوب** هو 0.5.



أ. في يوم من الأيام رمى كلٌّ منهما 100 مرّة.
كم مرّة تقريبًا أصاب كلٌّ منهما لوحة الهدف.

ب. في يوم آخر أصاب كلٌّ منهما لوحة الهدف 40 مرة.
كم مرّة بالتقريب رمى كلٌّ منهما؟

3. توجد على الرفّ أنواع مختلفة من الدفاتر. (انظروا الجدول).

النوع	عربي	حساب	رسم	مختبر	يوميات
الكمّيّة	10	12	7	3	8

أ. كم دفترًا يوجد على الرفّ؟

ب. نُخرج دفترًا من الرفّ بشكل عشوائيّ، ما هو احتمال أن يكون دفتر يوميّات؟

ت. نُخرج دفترًا من الرفّ بشكل عشوائيّ، ما هو احتمال أن يكون دفترٌ عربي؟

ث. أيّ نوع من الدفاتر احتمال إخراجه من الرفّ بشكل عشوائيّ هو $\frac{3}{10}$ ؟

4. فحصوا في الصفّ الثامن أ علامة الرياضيّات للطلّاب في الشهادات، وكانت النتائج كالتالي:

العلامة	4	5	6	7	8	9	10
عدد الطلّاب	1	2	4	10	7	4	2

أ. كم طالبًا في الصفّ؟

ب. كم طالبًا حصل على العلامة 6؟

ما هي التكراريّة النسبيّة للطلّاب الذين حصلوا على العلامة 6؟

ت. كم طالبًا حصل على علامة فوق 8؟

ما هي التكراريّة النسبيّة للطلّاب الذين حصلوا على العلامة فوق 8؟

ت. ما هو احتمال أن نُخرج طالبًا (بطريقة عشوائيّة) حصل على العلامة 7؟

ث. ما هو احتمال أن نُخرج طالبًا (بطريقة عشوائيّة) حصل على علامة "نجاح" (6 فما فوق)؟

5. تمّ في قرية ما عدّ أبناء كلّ أسرة، وقد قام المشرفون بتنظيم النتائج في جدول التكراريّة التالي..

عدد الأبناء في الأسرة	1	2	3	4	5
عدد العائلات (التكراريّة)	5	20	40	25	10

أ. كم أسرة توجد في القرية؟

ب. احسبوا معدّل عدد الأبناء للأسرة.

ت. نختار أسرة عشوائيًا.

جدوا الاحتمالات التالية:

- يكون لديهم 3 أبناء
- عدد الأبناء أقلّ من المعدل
- يكونون أقلّ من 3 أبناء
- أن يكون بالضبط 6 أبناء

ث. اكتبوا مثالًا لحدث ممكن، مثالًا لحدث مؤكد ومثالًا لحدث غير ممكن.

1

الدرس الرابع: نحسب احتمالات

توجد 10 بطاقات لكلّ زوج من الطلّاب

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

نُخرج بطاقة حسب الدور، ننظر إلى العدد الذي سُجّل عليها ونعيدها إلى العلبة. نلعب لعبتين مختلفتين.

اللّعبة الأولى

يفوز أ بنقطة - إذا كان العدد على البطاقة أقلّ من 6.

يفوز ب بنقطة - إذا كان العدد على البطاقة يقسم على 5.

هل اللّعبة متّزنة؟

اللّعبة الثانية

يفوز أ بنقطة - إذا كان العدد على البطاقة يقسم على 3 أو عدد يقسم على 5.

يفوز ب بنقطة - إذا كان العدد على البطاقة ذا منزلتين أو عددًا أقلّ من 6.

هل اللّعبة متّزنة؟

نحسب احتمالات الأحداث المختلفة.

نتطرّق في المهام 1 - 3 إلى المعطيات التي وردت في مهمّة الافتتاحيّة.

.1 حدّدوا، في كلّ بند، نوع الحدث (ممكن، مؤكد، غير ممكن) وجدوا احتمالاته.

أ. العدد ذو منزلة.

ب. العدد ذو منزلتين.

ت. العدد ذو ثلاثة منازل.

ث. يقسم العدد على 4.

ج. العدد أصغر من 8.

ح. العدد أصغر من 15.

.2 سجّلوا في كلّ بند "صحيح" أو "غير صحيح".

أ. احتمال إخراج عدد ذي منزلة يقسم على 5 مساوٍ لاحتمال إخراج عدد ذي منزلتين يقسم على 5.

ب. احتمال إخراج عدد أصغر من 9 مساوٍ لاحتمال إخراج عدد أكبر من 9.

ت. احتمال إخراج عدد أوليّ هو $\frac{3}{10}$.

ث. احتمال إخراج عدد فرديّ هو $\frac{1}{2}$

ج. احتمال إخراج عدد أكبر من 2 هو 1.

ح. احتمال إخراج العدد 13 هو 1.

خ. احتمال إخراج عدد أوليّ أصغر من 10 هو أكبر من احتمال إخراج عدد أوليّ أكبر من 10.

.3 سجّلوا، في كلّ بند، حدثًا ملائمًا للاحتمال.

أ. $\frac{2}{5}$ ب. $\frac{1}{2}$ ت. $\frac{1}{5}$ ث. 1   ج. 0

نفكّر بـ ...

4. تمّ تسجيل الأعداد 1, 2, 3 فقط على 60 بطاقة.

هل يمكن عند إخراج بطاقة:

أن يكون احتمال الحصول على 1 هو $\frac{1}{2}$، احتمال الحصول على 2 هو $\frac{1}{4}$، احتمال على 3 هو $\frac{1}{3}$؟ اشرحوا.

5. نسجّل على كلّ بطاقة عددًا ثلاثيّ المنزلة مكوّنًا من الأعداد 1 , 2 , 5 (كلّ عدد مرّة واحدة). نضع البطاقات في العلبة.

أ. سجّلوا جميع الأعداد الممكنة. كم عددًا حصلتم عليه؟

ب. ما هو احتمال إخراج العدد 125؟

ت. كم عددًا من بين الأعداد المسجّلة يقسم على 5؟
ما هو احتمال إخراج عدد يقسم على 5؟

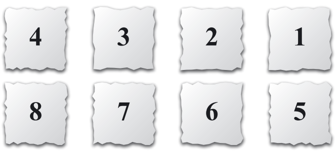
ث. ما هو احتمال إخراج عدد مجموع أرقامه 8؟

ج. ما هو احتمال إخراج عدد زوجيّ؟ إخراج عدد فرديّ؟

ح. سجّلوا حدثًا احتماله 0، حدثًا احتماله 1، حدثًا احتماله $\frac{1}{2}$.

مجموعة مهامّ

1. سُجّلت الأعداد من 1 حتى 8 على ثمانية بطاقات.
نطوي البطاقات جيّدًا، ثمّ نضعها في علبة ونُخرج بطاقة بدون أن ننظر فيها.
حدّدوا، في كلّ بند، إذا كان هناك احتمال متساوٍ للحدثين، وإذا كان ليس كذلك. حدّدوا لأيّ حدث يوجد احتمال أكبر.



أ. إخراج بطاقة سُجّل عليها عدد زوجيّ، **أو** إخراج بطاقة سُجّل عليها عدد فرديّ.

ب. إخراج بطاقة سُجِّل عليها العدد 1 **أو** إخراج بطاقة لم يسجَّل عليها العدد 1.

ت. إخراج بطاقة سُجِّل عليها عدد زوجي **أو** إخراج بطاقة سُجِّل عليها عدد يقسم على 3.

ث. إخراج بطاقة سُجِّل عليها عدد أصغر من 9 **أو** إخراج بطاقة سُجِّل عليها عدد أكبر من 1.

ج. إخراج بطاقة سُجِّل عليها عدد أكبر من 1. **أو** إخراج بطاقة سٌجِّل عليها عدد أصغر من 8.

2. تمّ تسجيل الأعداد من 1 حتى 50 (يشمل 50) على بطاقات. وتمّ وضع البطاقات في علبة. نُخرج بطاقة بدون أن ننظر في العلبة. لكلّ عدد توجد بطاقة واحدة.

أ . احسبوا احتمال حدوث كلّ من الأحداث التالية:

- إخراج عدد زوجيّ
- إخراج عدد فرديّ
- إخراج عدد رقم آحاده 7
- إخراج عدد ذي منزلة واحدة
- إخراج عدد ذي منزلتين
- إخراج العدد 110

ب. سجّلوا حدثًا احتماله 0.

ت. سجّلوا حدثًا احتماله 1.

3. توجد في علبة بطاقات سُجِّلت عليها الأعداد من 1 حتى 40 (يشمل العدد 40). لكلّ عدد توجد بطاقة واحدة. نُخرج بطاقة بدون أن ننظر في العلبة.

أ. احسبوا احتمال حدوث كلٍّ من الأحداث التالية:

- إخراج العدد 4
- إخراج عدد يقسم على 5
- إخراج عدد زوجيّ
- إخراج عدد فرديّ
- إخراج عدد أصغر من 17
- إخراج عدد ذي منزلتين
- إخراج عدد ذي ثلاثة منازل
- إخراج عدد يقسم على 10

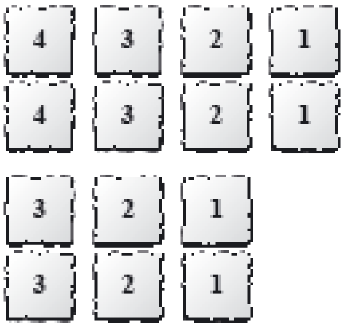
ب. سجّلوا حدثًا احتماله 0 وحدثًا احتماله 1.

4. توجد في علبة بطاقات، سُجِّلت عليها الأعداد من 1 حتى 80 (يشمل العدد 80). لكلّ عدد توجد بطاقة واحدة. نُخرج بطاقة بدون أن ننظر في العلبة.

أ. احسبوا احتمال حدوث كلٍّ من الأحداث التالية:

- إخراج عدد أكبر من 20
- إخراج عدد أصغر من 21
- إخراج عدد يقسم على 8
- إخراج عدد أصغر من 100
- إخراج عدد زوجيّ أصغر من 61
- إخراج عدد أكبر من 20 ويقسم على 3
- إخراج عدد يقسم على 2 وعلى 3 أيضًا
- إخراج عدد يقسم على 67

ب. سجّلوا حدثًا احتماله 0، حدثًا احتماله 1 وحدثًا احتماله $\frac{1}{2}$.



5. سُجِّلت الأعداد 1 , 2 , 3 , 4 على ثمانية بطاقات (كلّ عدد مرّتين).
نطوي البطاقات ونضعها في علبة، نُخرج بطاقتين بدون أن ننظر فيها.

أ. حدّدوا لأيّ حدث يوجد احتمال أكبر.
- الأعداد على البطاقتين متساوية أو الأعداد على البطاقتين غير متساوية.
- حاصل ضرب الأعداد هو زوجيّ أو فرديّ.
- حاصل ضرب الأعداد أكبر من 15 أو حاصل ضرب الأعداد أصغر من 1.

ب إذا كانت في العلبة 6 بطاقات فقط، هل ستختلف إجابتكم للبند أ. كما يظهر في الرسمة؟ اِشرحوا.

نحافظ على لياقة رياضيّة

تعابير متشابهة

1. حدّدوا، في كلّ بند، ما إذا كان التعبيران الجبريّان متساويين.

أ. $5(a + 3)$ $\quad$ $5a + 3$

ب. $\frac{4 - a}{2}$ $\quad$ $2 \cdot a$

ت. $(5 + 3)a$ $\quad$ $5a + 3a$

ث. $3a$ $\quad$ $2a + a$

ج. $(3 + a)$ $\quad$ $3 + (a + 5)$

ح. $a \cdot 8$ $\quad$ $8a$

2. معطى تعبيران جبريّان $\frac{4}{x^2}$ $\quad$ $5 - x^2$ $\quad$ $(x \neq 0)$

أ. عوّضوا الأعداد التالية في التعبيرين: $2 \,,\; 1 \,,\; -2 \,,\; -1$

ب. هل التعبيران الجبريّان متشابهان؟ اشرحوا.

3. أضيفوا أقواسًا، في كلّ بند، كي نحصل على تعبيرين جبريّين متساويين.

أ. $x \cdot 2 + 5$ $\quad$ $7x$

ب. $3 - 2x$ $\quad$ x

ت. $2x + 1$ $\quad$ $4 - 2x + 1$

ث. $3 - 2 + x$ $\quad$ $1 - x$

ج. $-1 + 5x$ $\quad$ $-1 - 5x$

ح. $2 - 2x$ $\quad$ $4 - 2x + 1$

4. بسِّطوا.

أ. $5(a - 2) + 13$ $\quad$ ب. $5 - a \cdot (7 - a) + 2a$ $\quad$ ت. $7a - 2(a + 3) \cdot 5$ $\quad$ ث. $5a(a - 3) - 8a$

5. اختاروا تعابير جبريّة بحيث تمثّل محيط المستطيل الذي في الرسمة.

(الرسمة كمثال، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$.)

$x \cdot 5$ $\quad$ $2x + 10$ $\quad$ $2 \cdot 5x$ $\quad$ $5x$ $\quad$ $x + 5$

$2(x + 5)$ $\quad$ $x + 5 + x + 5$ $\quad$ $2x + 5$

6. أ. اكتبوا ثلاثة تعابير جبريّة تمثّل محيط شبه المنحرف في الرسمة.

(الرسمة كمثال، وقياسات الطول معطاة بالسم، $x > 0$.)

ب. هل جميع التعابير التي سجّلتموها متساوية؟ اشرحوا.