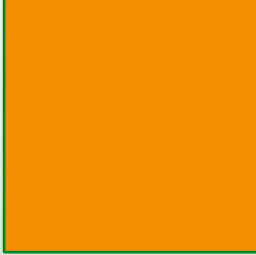




الوحدة الثانية عشرة: مساحات مضلعات متشابهة

الدرس الأول: أشكال تبني ذاتها



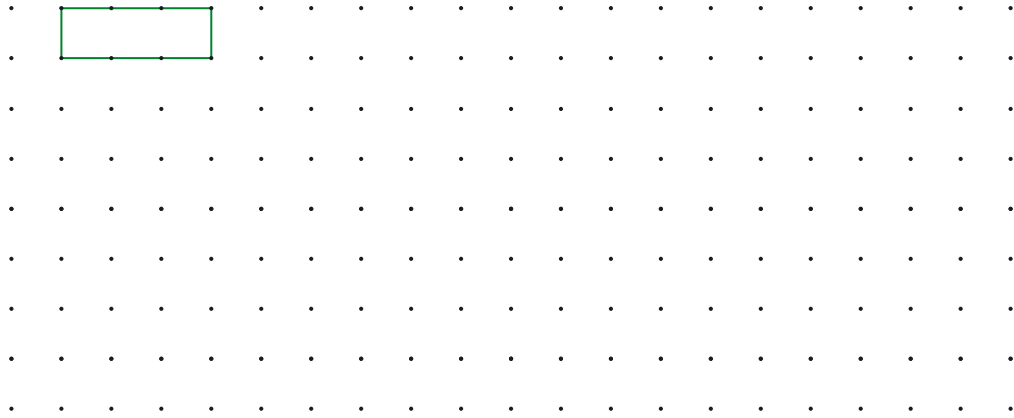
نبني مربّعات كبيرة من مربّعات صغيرة متطابقة.

كم مربّعاً صغيراً نحتاج لبناء مربّع كبير؟
كم مربّعاً صغيراً نحتاج لبناء مربّع أكبر من المربّع السابق؟

نقول: "المربّع" يبني ذاته، لأنّه يمكن بناء مربّع كبير من مربّعات صغيرة متطابقة.

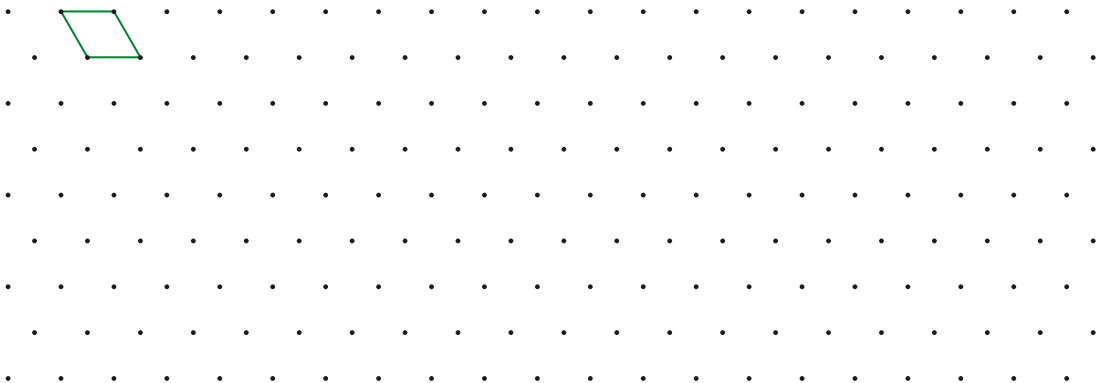
سنتعلم عن أشكال تبني ذاتها.

1. أ. ارسموا مستطيلين، على ورقة النقاط، بحيث يكونان تكبيراً للمستطيل المعطى.



ب. سجّلوا كم مستطيلاً استعملتم كمستطيل المعطى كي ترسموا كلّ مستطيل رسمتموه في بند أ؟
هل كلّ مستطيل رسمتموه في بند أ **يتشابه** مع المستطيل المعطى؟

2. أ. ارسموا مُعيّنين، على ورقة النقاط، بحيث يكونا تكبيراً للمعين المعطى.



ب. سجّلوا كم معيّنًا استعملتم كالمعيّن المعطى كي ترسموا كلّ معيّن رسمتموه في بند أ؟
هل كلّ معيّن رسمتموه في بند أ **يتشابه** مع المعيّن المعطى؟



3. قال **أيوب**: إذا حصلت على 16 مربّعًا متطابقًا فسأنجح في بناء مربّع كبير يشبه المربّع الصغير.
قال **ضياء**: إذا حصلت على 20 مربّعًا متطابقًا فسأنجح في بناء مربّع كبير يشبه المربّع الصغير.
قال **جواد**: إذا حصلت على 25 مربّعًا متطابقًا فسأنجح في بناء مربّع كبير يشبه المربّع الصغير..
أ. من منهم قوله صحيح؟ اشرحوا.

ب. أعطوا مثالًا لعدد آخر من المربّعات بحيث نستطيع أن نبني منها مربّعًا كبيرًا يشبه المربّع الصغير.

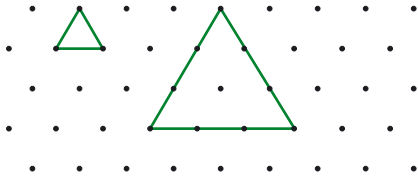


بنينا في المهام السابقة، من الأشكال الرباعيّة الصغيرة المتطابقة، شكلًا رباعيًّا كبيرًا **يشبه** الشكل الرباعيّ الصغير.
رأينا أنه يمكن أن نبني شكلًا رباعيًّا كبيرًا، يشبه الشكل الرباعيّ الصغير، من 4 أشكال رباعيّة صغيرة متطابقة.
يمكن أن نبني شكلًا رباعيًّا كبيرًا أيضًا من 9 أشكال رباعيّة صغيرة متطابقة، من 16 ومن 25 أيضًا.
الشكل الذي "يبنى ذاته" من عدة نُسخ متماثلة لشكل معطى، يُنتج تكبيرًا لشكل يشبه الشكل المعطى.

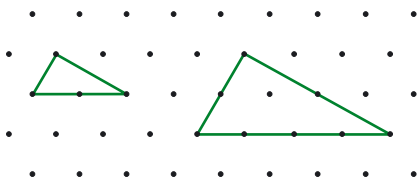
للتذكير

الأعداد 1, 4, 9, 16, 25, ... نحصل عليها كالتالي: $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ (أعداد مربّعة)

4. أ. قسّموا المثلث الكبير إلى مثلثات صغيرة تتطابق مع المثلث المعطى.
كم مثلثًا صغيرًا يبني المثلث الكبير؟



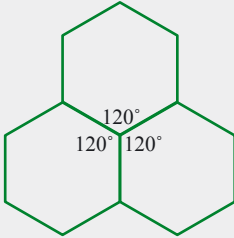
ب. خمّنوا كم مثلثًا صغيرًا يبني المثلث الذي يظهر في الرسمة؟
قسّموا المثلث الكبير إلى مثلثات صغيرة تتطابق مع المثلث المعطى.
وافحصوا تخمينكم.





تظهر في صورة غلاف الكتاب (وفيما بعد أيضًا) **قبة جيوديسية (قبة علم قياس الأرض) للكرة البيئية**، هذه القبة موجودة في الحديقة العلمية على اسم كلور، في معهد وايزمن للعلوم.

- **الكرة البيئية** هي دفيئة تحافظ على ظروف مناخية (درجات الحرارة والرطوبة) تخضع للمراقبة والتحكم بها. يُتيح هذا المناخ تنمية نباتات متنوعة. بالإضافة إلى ذلك يمكن أن نقارن تأثير فروق المناخ على النباتات التي تنمو خارج الكرة البيئية.
- **القبة الجيوديسية (قبة علم قياس الأرض)** هي قبة تشبه كرة مبنية من مثلثات. مبدأ القباب الجيوديسية هو الطموح في الوصول إلى شكل قبة كروية، من خلال استعمال سطوح مستوية. تتحقق النجاعة والمتانة القصوى بواسطة سطوح شكلها مثلث. كما هو الأمر في البقع التي تُنتج غلاف كرة القدم (أنظروا الصورة)، تُنتج المثلثات في القبة الجيوديسية أشكال مسدّسات ومخمّسات.



انتضح أنّه دون المخمّسات لا يمكن بناء القبة. لا يمكن بناء قبة جيوديسية من مسدّسات فقط؛ لأن مقدار كلّ زاوية في الشكل السداسي المنتظم هو 120° . إذا التقت ثلاثة مسدّسات حول كلّ رأس في القبة، فإنّ مقدار الزاوية الكلية في الرأس يكون $360^\circ = 3 \cdot 120^\circ$ ، وهذا يعني أنّه حول الرأس يُنتج سطح مستوٍ وليس شكلًا محدّبًا (أنظروا الرّسمة).

للحصول على جسم محدّب؛ فإنّ على مجموع الزوايا في قسم من الرؤوس أن يكون أقلّ من 360° . في القبة الجيوديسية، مجموع الزوايا في الالتقاء بين مسدّسين وشكل خماسي منتظم هو

$$120^\circ \cdot 2 + 108^\circ = 348^\circ$$

جدوا أشكالًا خماسية وسداسية في صورة قبة الكرة البيئية. هل، حسب رأيكم، جميع المثلثات التي تبني القبة الجيوديسية هي مثلثات متساوية الأضلاع (هذا يعني أنّها منتظمة)؟

من مهمّة البحث التي قدّمها يائير هاركاوي للبحرّوت في موضوع الرياضيات،

http://stwww.weizmann.ac.il/manor/CONFERENCES/iyun-geo/geo_arch_97/geo_arch_97-content.htm



1. أ. ارسموا، على ورقة النقاط، متوازي أضلاع أكبر بحيث يكون تكبيراً لمتوازي الأضلاع الذي يظهر في الرسم.
ب. ارسموا، على ورقة النقاط، متوازي أضلاع آخر بحيث يكون تكبيراً لمتوازي الأضلاع الذي يظهر في الرسم.



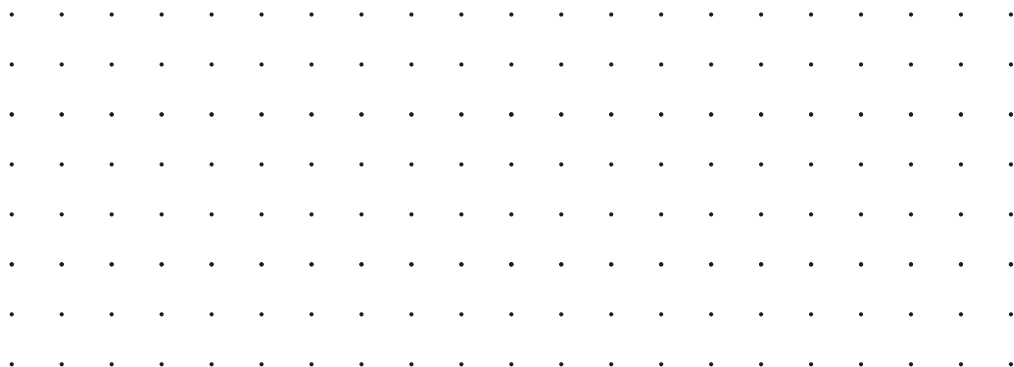
2. أ. هل يمكن أن نبني مربعاً كبيراً من 16 مربعاً صغيراً متطابقاً؟ اشرحوا.
ب. هل يمكن أن نبني مربعاً كبيراً من 10 مربعات صغيرة متطابقة؟ اشرحوا.



3. أ. هل يمكن أن نبني مستطيلاً كبيراً من 16 مستطيلاً صغيراً متطابقاً؟
هل هنالك تشابه بين المستطيل الكبير والمستطيل الصغير؟ اشرحوا.
ب. هل يمكن أن نبني مستطيلاً كبيراً من 10 مستطيلات صغيرة؟
هل هنالك تشابه بين المستطيل الكبير والمستطيل الصغير؟ اشرحوا.



4. ارسموا، على لوحة النقاط، شكلين أحدهما يبني الآخر.

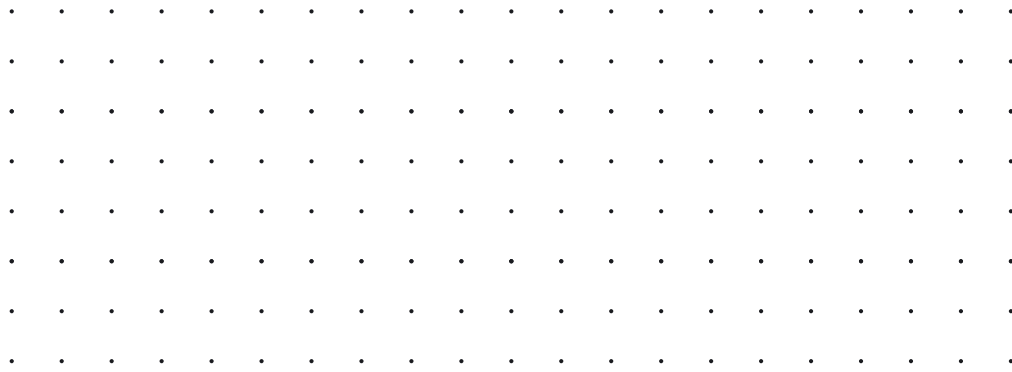




5. أ. ارسموا مثلثًا كبيرًا على ورقة النقاط.

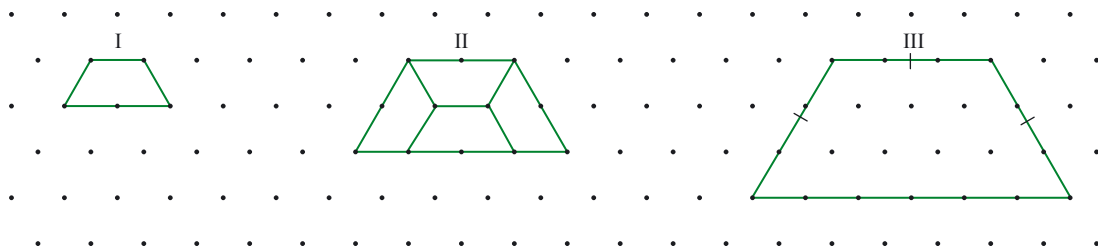
بيّنوا أنّ المثلث الذي بنيتموه "يبنّي ذاته" (يمكن تقسيمه إلى مثلثات صغيرة متطابقة).

ب. كم مثلثًا يبنّي المثلث الذي رسمتموه في بند أ؟



6. شبه المنحرف II مبني من أربع نسخ من شبه المنحرف I.

كم نسخة من شبه المنحرف I تبني شبه المنحرف III؟

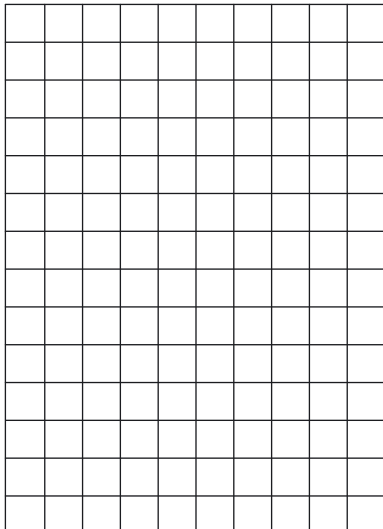


7. قالت المعلمة: هذا الشكل يبنّي ذاته..

(هذا يعني أنّ عدة نسخ من الشكل الصغير تُنتج شكلًا كبيرًا شبيهًا بهذا الشكل).

أ. قُصّوا 4 أشكال كهذه، وحاولوا أن تبنيوا شكلًا شبيهًا.

ب. بيّنوا، بواسطة الرسم على ورقة مقسّمة إلى تربيّعات، كيف يبنّي الشكل ذاته؟





الدرس الثاني: مساحات أشكال تبني ذاتها



يمكن أن نبني مستطيلاً من 4 مستطيلات متطابقة كما يظهر في الرسمة.
المستطيل الكبير يشبه المستطيلات الصغيرة.

كم ضعفاً يكبر طول ضلع المستطيل الجديد مقارنة بطول ضلع المستطيل الصغير؟

بكم ضعف تكبر مساحة المستطيل الجديد مقارنة بمساحة المستطيل الصغير؟

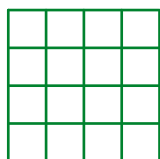
سنتعلم عن العلاقة بين التغيير في طول ضلع الشكل والتغيير في مساحة الشكل الذي "يبني ذاته".

1. معطى مربع. 

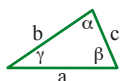
ابنوا مربعاً من 16 مربعاً كهذا.

أ. كم ضعفاً طول ضلع المربع الكبير أكبر من طول ضلع المربع المعطى؟

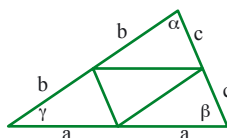
ب. كم ضعفاً مساحة المربع الكبير أكبر من مساحة المربع المعطى؟



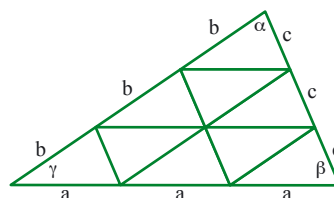
2. معطاة متوالية مثلثات.



مثلث أصلي



مثلث متوسط



مثلث كبير

أ. هل المثلثات متشابهة. اشرحوا.

ب. أكملوا.

مثلثات	النسبة بين أطوال أضلاع المثلثات	النسبة بين مساحة المثلثات
الأصلي مقارنة بالمتوسط		
الأصلي مقارنة بالكبير		



3. ما هي العلاقة بين نسبة تشابه المضلعات المتشابهة ونسب مساحاتها؟



رأينا أن مساحات **المضلعَات المتشابهة** تتناسب حسب **مربع (تربيع) نسبة التشابه**.

مثال: في المهمة 2،

نسبة التشابه بين المثلث الأصلي والمثلث الكبير هي 1:3
نسبة المساحة بين المثلث الأصلي والمثلث الكبير هي 1:9
يمكن أن نبني شكلاً "يبنى ذاته" من مربع عدد الشكل المعطى.

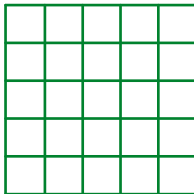
4. أ. كُبرت أضلاع مثلث 5 أضعاف ونَتَجَ مثلث شبيه. كم ضعفاً كبرت المساحة؟
ب. كُبرت أضلاع مستطيل 3 أضعاف ونَتَجَ مستطيل شبيه. كم ضعفاً كبرت المساحة؟
ت. صُغِّرَت أضلاع مربع 8 أضعاف ونَتَجَ مربع شبيه. كم ضعفاً صغرت المساحة؟



5. يوجد في دكان سجادة مربعة الشكل، طول ضلعها متر واحد، سعر السجادة 300 شاقل.
أرادت **دعاء** أن تشتري سجادة مربعة الشكل طول ضلعها متران.
فكرت **دعاء** أن تدفع 600 شاقل مقابل السجادة.
طلبت صاحبة الدكان مبلغ 1,000 شاقل وادّعت أن هذا السعر جاء بعد تخفيض.
هل ادّعاؤها صحيح؟ اشرحوا.



مجموعة مهام



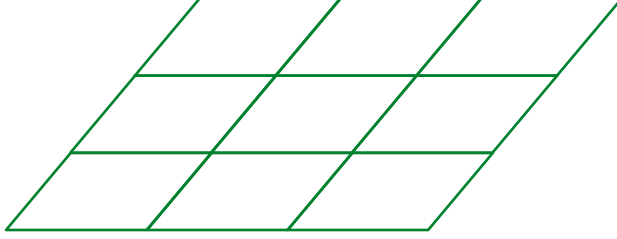
1. معطى مربع صغير. ☐ ابنوا مربعاً كبيراً من 25 مربعاً صغيراً متطابقاً.
أ. كم ضعفاً طول ضلع المربع الكبير أكبر من طول ضلع المربع الصغير؟
ب. كم ضعفاً مساحة المربع الكبير أكبر من مساحة المربع الصغير؟



2. ابنوا مربعاً كبيراً من 100 مربع متطابق.
أ. كم ضعفاً طول ضلع المربع الكبير أكبر من طول ضلع المربع الصغير؟
ب. كم ضعفاً مساحة المربع الكبير أكبر من مساحة المربع الصغير؟



3. معطى متوازي أضلاع.



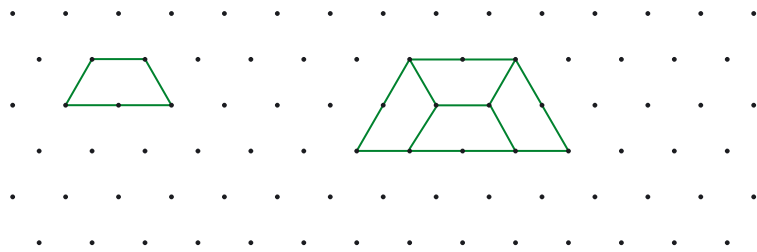
- ابنوا متوازي أضلاع كبيراً بحيث يكون مبنياً من 9 متوازيات أضلاع كهذا.
- أ. كم ضعفاً طول ضلع متوازي الأضلاع الكبير أكبر من طول ضلع متوازي الأضلاع المعطى؟
- ب. كم ضعفاً مساحة متوازي الأضلاع الكبير أكبر من مساحة متوازي الأضلاع المعطى؟



4. أ. ارسموا متوازي أضلاع، على لوحة النقاط، بحيث يكون مبنياً من 4 متوازيات أضلاع كمتوازي الأضلاع المعطى. هل هنالك تشابه بين متوازي الأضلاع الكبير ومتوازي الأضلاع المعطى؟
- ب. ارسموا متوازي أضلاع آخر، على لوحة النقاط، بحيث يكون مبنياً من 4 متوازيات أضلاع كمتوازي الأضلاع المعطى. هل هنالك تشابه بين متوازي الأضلاع الكبير ومتوازي الأضلاع المعطى؟
- ت. كم ضعفاً مساحة متوازي الأضلاع الذي رسمتموه أكبر من مساحة متوازي الأضلاع المعطى؟



5. ابنوا شبه منحرف كبيراً من أربعة أشباه منحرفة صغيرة (كما يظهر في الرسمة).
- أ. كم ضعفاً طول ضلع شبه المنحرف الكبير أكبر من طول الضلع الذي يناظره في شبه المنحرف الأصلي؟
- ب. كم ضعفاً مساحة شبه المنحرف الكبير أكبر من مساحة شبه المنحرف الأصلي؟





6. معطى شبهاً منحرف متشابهان.

طول أضلاع أحدهما 5 أضعاف طول الأضلاع التي تناظرها في شبه المنحرف الآخر.
كم ضعفاً مساحة شبه المنحرف الكبير أكبر من مساحة شبه المنحرف الأصلي؟



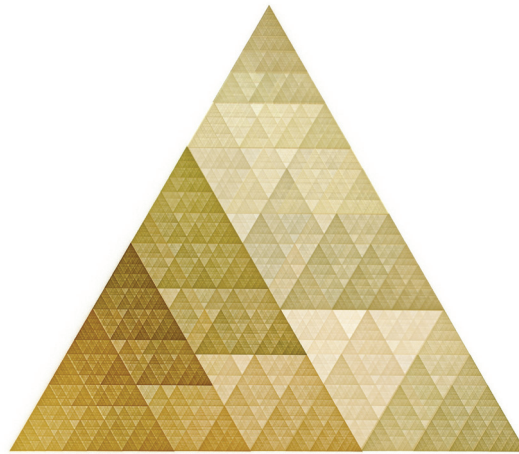
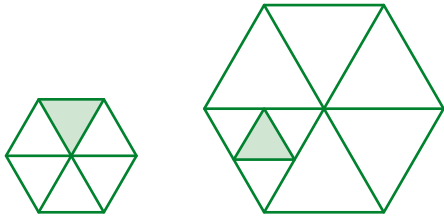
7. أ. كُبرت أطوال أضلاع مثلث 6 أضعاف ونتج مثلث شبيه، كم ضعفاً كُبرت المساحة؟
ب. كُبرت أطوال أضلاع مستطيل 11 ضعفاً ونتج مستطيل شبيه، كم ضعفاً كُبرت المساحة؟
ت. صُغرت أطوال أضلاع مربع 4 أضعاف ونتج مربع شبيه، كم ضعفاً صُغرت المساحة؟
ث. النسبة بين أطوال أضلاع مثلثين متشابهين هي 1:3، ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟



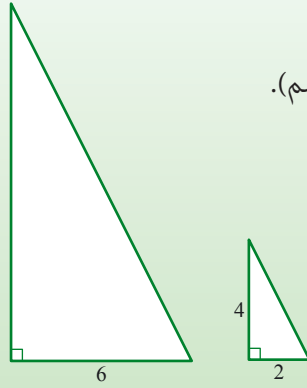
8. أمامكم مسدّسان منتظمان.

أ. ما هي نسبة التشابه بين المسدّسين؟

ب. كم ضعفاً مساحة المسدّس الكبير أكبر من مساحة المسدّس الصغير؟



الدرس الثالث: حساب مساحات مضلعات متشابهة



أمامكم مثلثان قائما الزاوية متشابهان.
(أعدت الرسومات للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم).

ما هي نسبة التشابه؟
ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟
جدوا مساحة المثلث الكبير.

نحسب مساحات مثلثات متشابهة.

أعدت الرسومات في مهام افتتاحية الدرس وفي مجموعة المهام للتوضيح، وقياسات الطول معطاة بالسم.

1. أمامكم مستطيلان.

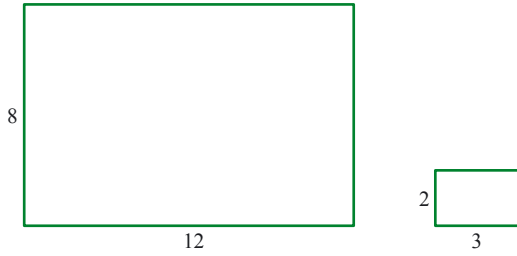
أ. هل المستطيلان متشابهان؟

إذا كانت الإجابة نعم فجدوا نسبة التشابه بين المستطيلين.

ب. ما هي النسبة بين مساحتي المستطيلين؟

ت. احسبوا مساحة كل مستطيل، وافحصوا

إجاباتكم عن بند ب.



2. $\triangle BEN$ و $\triangle DAR$ هما مثلثان متشابهان.

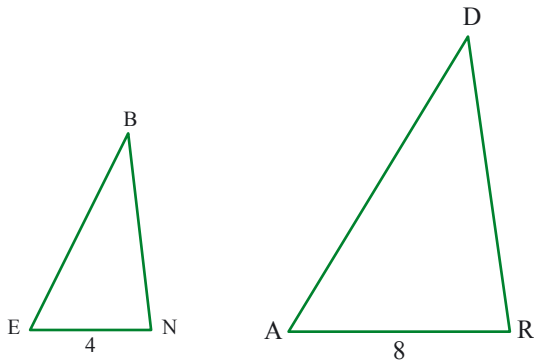
أ. أشيروا إلى الزوايا المتناظرة بنفس اللون.

ب. ما هي نسبة التشابه؟ (اكتبوا نسبة مختزلة).

ت. ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟

ث. مساحة المثلث $\triangle BEN$ هي 10 سنتمترات مربعة.

ما هي مساحة المثلث $\triangle DAR$ ؟



3. أمامكم مثلثان. أشرنا إلى الزوايا المتساوية بنفس الإشارة.

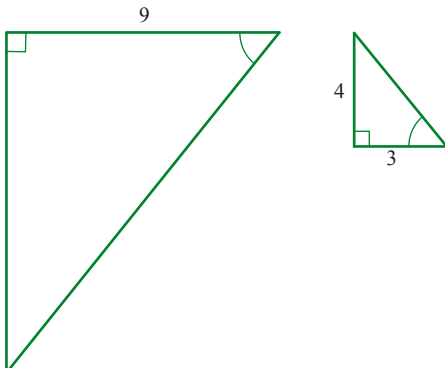
(قياسات الطول معطاة بالسم، الرسومات مصغرة).

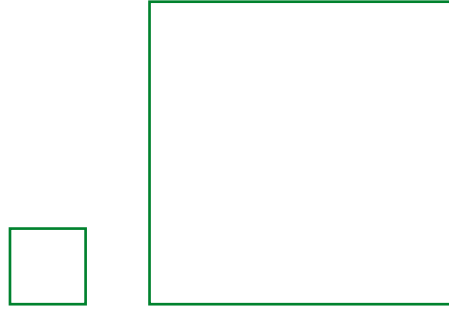
أ. هل المثلثان متشابهان؟ اشرحوا.

ب. ما هي نسبة التشابه؟ (اكتبوا نسبة مختزلة).

ت. اكتبوا مساحة كل مثلث داخله.

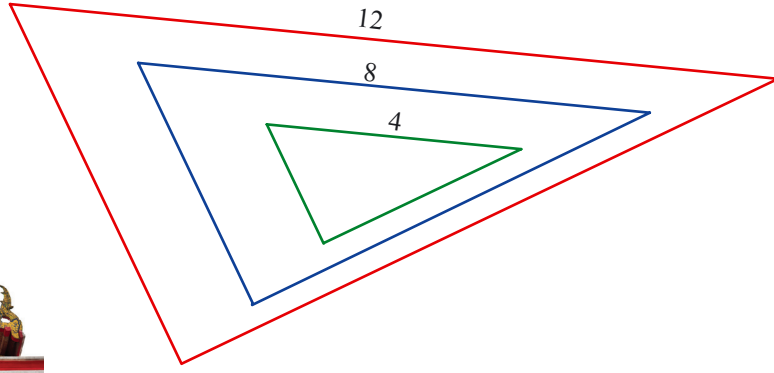
ث. ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟



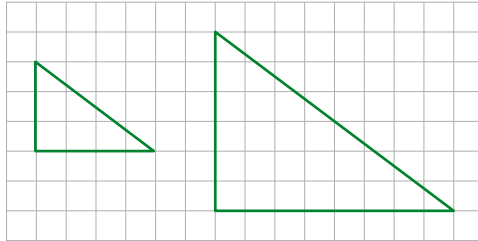


4. أمامكم مربعان.
النسبة بين أطوال أضلاع المربعين هي 1:4.
مساحة المربع الصغير هي 9 سنتمترات مربعة.
احسبوا مساحة المربع الكبير.

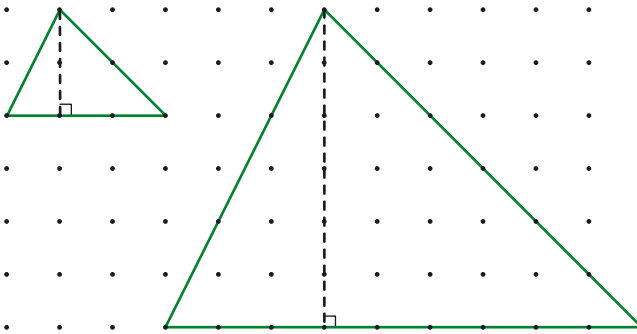
5. أمامكم ثلاثة مثلثات متشابهة.
مساحة المثلث الأخضر (الصغير) 6 سنتمترات مربعة.
جدوا مساحة المثلثات الأخرى.



مجموعة مهام



1. أمامكم مثلثان قائما الزاوية متشابهان.
أ. ما هي نسبة التشابه؟
ب. اكتبوا مساحة كل مثلث داخله.
ت. ما هي النسبة بين المساحتين؟



2. أمامكم مثلثان متشابهان.
أ. ما هي نسبة التشابه؟
ب. اكتبوا مساحة كل مثلث داخله.
ت. ما هي النسبة بين المساحتين؟

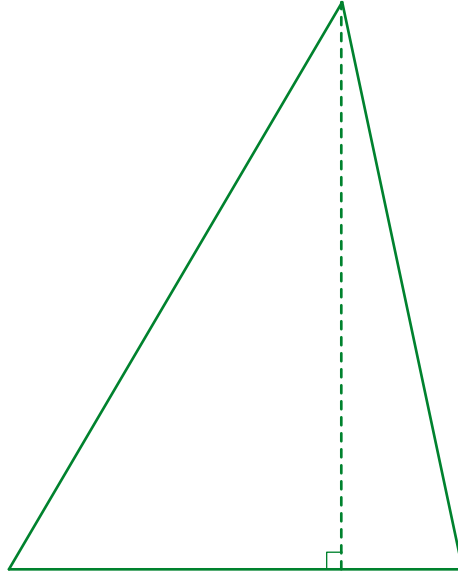
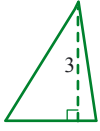


3. أمامكم مثلثان متشابهان.

نسبة التشابه بين المثلثين هي 1:5.

مساحة المثلث الصغير 3 سنتمترات مربعة.

احسبوا مساحة المثلث الكبير.



4. أمامكم مستطيلان متشابهان.

أ. ما هي نسبة التشابه بين المستطيلين؟

ب. احسبوا مساحة كل مستطيل.

ت. ما هي النسبة بين مساحتي المستطيلين؟



15



5. نسبة التشابه بين مستطيلين متشابهين هي 1:10.

مساحة المستطيل الصغير 8 سنتمترات مربعة.

احسبوا مساحة المستطيل الكبير.



6. أمامكم مثلثان متشابهان $\triangle ABC \sim \triangle DEG$.

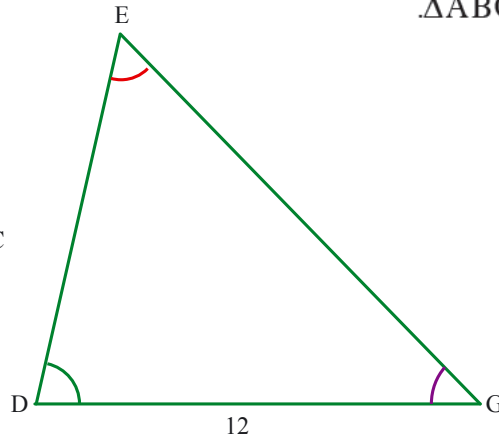
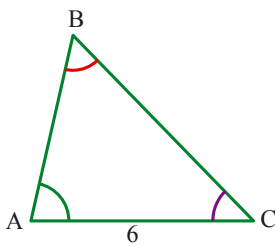
أ. ما هي نسبة التشابه؟

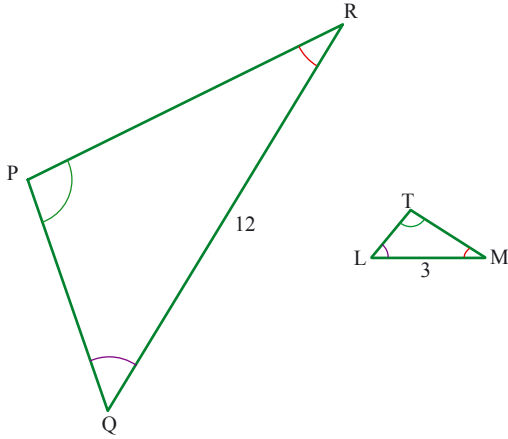
ب. ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟

ث. مساحة المثلث $\triangle ABC$ هي 15

سنتمترًا مربعًا.

ما هي مساحة المثلث $\triangle DEG$ ؟





7. أمامكم مثلثان متشابهان $\Delta TLM \sim \Delta PQR$.
(قياسات الطول معطاة بالسّم، الرسومات مصغّرة).

أ. ما هي نسبة التشابه؟

ب. ما هي النسبة بين مساحتي المثلثين؟

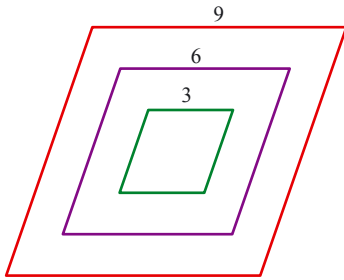
ث. مساحة المثلث ΔPQR هي 48 سنتمترًا مربعًا.

ما هي مساحة المثلث ΔTLM ؟

8. معطاة بيتسا مربّعة الشكل، طول ضلعها 15 سم وسعرها 5 شواقل.

أ. ما هو سعر بيتسا مربّعة الشكل طول ضلعها 30 سم؟

ب. ما هو سعر بيتسا مربّعة الشكل طول ضلعها 45 سم؟



9. أمامكم ثلاثة معيّنات متشابهة.

مساحة المعين الأخضر (الصغير) 8 سنتمترات مربّعة.

احسبوا مساحات المعينات الأخرى.

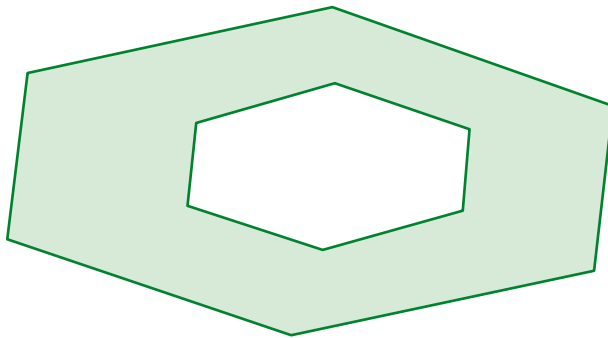
10. أمامكم مسدّسان متشابهان.

كلّ ضلع من أضلاع المسدّس الداخليّ أقصر بضعفين من الضلع الذي يناظره في المسدّس الخارجيّ.

مساحة المسدّس الداخليّ 9 سنتمترات مربّعة.

أ. احسبوا مساحة المسدّس الخارجيّ.

ب. احسبوا المساحة الملوّنة.



11. قاعة أفراح مستطيلة الشكل ملائمة لاستضافة 250 ضيفًا.

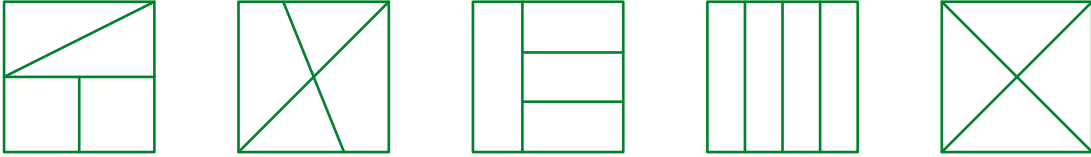
أراد صاحب القاعة أن يبني قاعة مناسبة لـ 1,000 ضيف.

كم ضعفًا يجب عليه أن يكبّر قياسات طول جدران القاعة؟

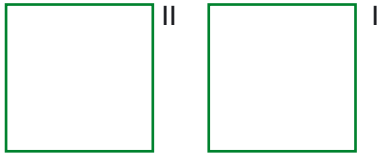


الجزء من الصحيح

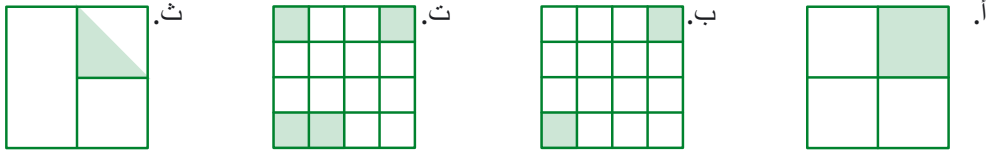
1. أ. أشيروا إلى المربعات المقسمة إلى أربعة أقسام متساوية بالمساحة.



ب. قسّموا المربع I إلى أربعة أقسام متساوية بالمساحة بطريقة أخرى.
قسّموا المربع II إلى قسمين متساويين بالمساحة ولوّنوا قسماً واحداً.
أي قسم من المربع لَوْنْتُمُوهُ؟



2. حدّدوا، في كلّ بند، القسم الملون بالأخضر في كلّ مربع. أي قسم غير ملون؟



3. رتّبوا الكسور، في كلّ بند، من الأصغر إلى الأكبر.

أ. $\frac{3}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{3}{6}$. ب. $\frac{10}{9}$ ، $\frac{13}{9}$ ، $\frac{5}{9}$

4. حدّدوا، في كلّ بند، هل الكسور متساوية؟

أ. $\frac{2}{7}$ ، $\frac{4}{14}$ ، $\frac{6}{21}$. ت. $\frac{3}{5}$ ، $\frac{4}{6}$ ، $\frac{6}{10}$
ب. $\frac{1}{2}$ ، $\frac{5}{20}$ ، $\frac{2}{4}$. ث. $\frac{2}{3}$ ، $\frac{6}{9}$ ، $\frac{10}{15}$

5. يوجد في امتحان 20 تمريناً. حلّ سالم $\frac{4}{5}$ التمارين. كم تمريناً حلّ سالم؟

6. خرج تلاميذ في رحلة لمدة 3 أيام.

قطع التلاميذ في اليوم الأول $\frac{2}{5}$ الطريق، وقطعوا في اليوم الثاني $\frac{1}{4}$ الطريق.

أ. أي قسم من الطريق قطعوا في اليومين الأولين؟

ب. أي قسم من الطريق قطعوا في اليوم الثالث؟

ت. قطعوا في اليوم الثالث 21 كم. ما هو طول الطريق؟