יחידה 24: מפונקציה ריבועית למשוואה ריבועית

שיעור 1. נוסחה לפתרון משוואה ריבועית

המורה ביקש מ**יוסי** למצוא את נקודות האפס של הפונקציות הריבועיות:

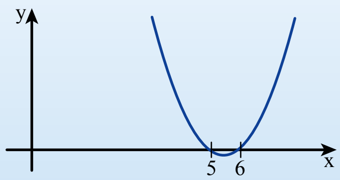
$y = x^2 - 11x + 30$ $y = 2x^2 + 9x - 5$ ולשרטט סקיצות מתאימות.

יוסי פירק את $y = x^2 - 11x + 30$ לגורמים כך: $y = (x - 5)(x + 6)$

הוא רשם את המשוואה:

$(x - 5)\ (x - 6) = 0$, פתר $x_1 = 5$ $x_2 = 6$

ושרטט את הסקיצה



- האם **יוסי** צודק?
- האם תוכלו להיעזר בדרך של **יוסי** כדי למצוא את נקודות האפס של הפונקציה $y = 2x^2 + 9x - 5$ ולשרטט סקיצה מתאימה?

נלמד לפתור משוואות ריבועיות.

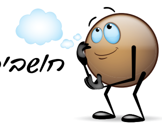
1. בכל סעיף נסו למצוא את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.
אם לא הצלחתם סַמנו X.

א. $y = x^2 + 9x + 18$ ג. $y = x^2 - 5x + 6$

ב. $y = 5x^2 + 3x + 8$ ד. $y = 2x^2 - 5x - 3$

תזכורת

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר x נקראות **נקודות אפס** של הפונקציה.
אפשר למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה בעזרת פתרונות המשוואה $f(x) = 0$.



חושבים על...

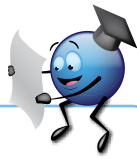
2. לפניכם **נוסחת השורשים** שבעזרתה נמצא את שיעורי נקודות האפס של פונקציות ריבועיות
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בהמשך היחידה נוכיח את נכונות הנוסחה.

א. היעזרו בנוסחה ופִתרו את המשוואה $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

ב. נחזור למשימת הפתיחה. מהן נקודות האפס של הפונקציה $y = 2x^2 + 9x - 5$?



כדי למצוא את נקודות האפס של הפונקציה פותרים **משוואה ריבועית**.

משוואה ריבועית אפשר להציג בייצוג הסטנדרטי $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$.

פתרונות המשוואה נקראים **שורשי המשוואה**.

אפשר למצוא את שורשי המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ בעזרת **נוסחת השורשים**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

בהמשך היחידה מופיע הסבר על הדרך שבה מגיעים לנוסחה זו.

דוגמה: נתונה הפונקציה $f(x) = -3x^2 + 13x - 4$ $a = -3 \quad b = 13 \quad c = -4$

למציאת נקודות האפס של הפונקציה, נפתור את המשוואה הריבועית $-3x^2 + 13x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 48}}{-6} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-13 + 11}{-6} = \frac{1}{3} \quad , \quad x_2 = \frac{-13 - 11}{-6} = 4$$

שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $(4, 0)$ ו- $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

תזכורת

לכל מספר **חיובי** יש שני שורשים ריבועיים, האחד **חיובי** והאחר **שלילי**.

את **השורש הריבועי החיובי** מסמנים כך: $\sqrt{}$

את **השורש הריבועי השלילי** מסמנים כך: $-\sqrt{}$

דוגמה: השורש הריבועי החיובי של 9 הוא $\sqrt{9} = 3$

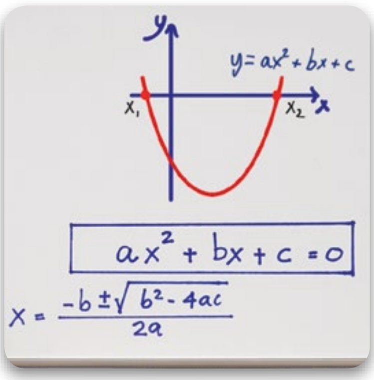
השורש הריבועי השלילי של 9 הוא $-\sqrt{9} = -3$

שימו לב, כשאומרים או כותבים במילים "שורש ריבועי של...", מתכוונים לשני השורשים.

כשכותבים " $\sqrt{}$ " הכוונה לשורש הריבועי החיובי בלבד.

לכן כאשר כותבים ± לפני הסימן $\sqrt{}$ בנוסחת השורשים של משוואה ריבועית מתכוונים לשורש הריבועי החיובי ולשורש הריבועי השלילי.

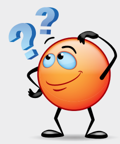
דוגמה: $\pm\sqrt{121} = \pm 11$ זו דרך מקוצרת לרשום $\sqrt{121}$ ו- $-\sqrt{121}$



3. בכל סעיף קִבעו מה ערכם של הפרמטרים a, b ו-c, ומִצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציה.

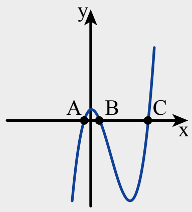
א. $y = 5x^2 + 3x - 14$ ג. $y = x^2 - 9x + 14$ ה. $y = -x^2 - 3x + 10$

ב. $y = 2x^2 - x - 15$ ד. $y = 3x^2 - 5x - 12$ ו. $y = -5x^2 - 4x + 1$

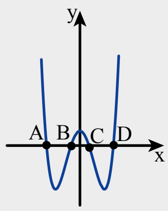


בשיעור זה הכרנו את הנוסחה למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות ממעלה שנייה – כלומר, נוסחה למציאת שורשי משוואות ריבועיות.

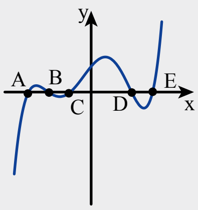
במשך שנים רבות ניסו מתמטיקאים לגלות נוסחאות דומות למציאת שיעורי נקודות אפס של פונקציות (או שורשי משוואות) ממעלה גבוהה יותר, כמו למשל:



$y = 0.1x^3 - 4x^2 - 4x + 100$



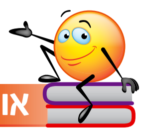
$y = 0.1x^4 - 4x^2 + 10$



$y = x^5 + x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 36x + 36$

התשובה לא הייתה פשוטה. הנוסחאות הכלליות למציאת השורשים של משוואה ממעלה שנייה, שלישית ורביעית (כלומר, ביטויים המבוססים על פעולות חשבוניות והוצאת שורש בין מקדמי המשוואה) פותחו רק לפני כ- 400 שנה.

מציאת נוסחאות דומות לשורשי משוואות מדרגה חמישית ומעלה הייתה אתגר למתמטיקאים במשך שנים רבות נוספות, עד אשר לפני כ- 200 שנה הוכיח המתמטיקאי גלואה את המשפט הטוען כי קיומן של נוסחאות לשורשי משוואות שדרגתן גבוהה מ- 4, הוא בלתי אפשרי. משפט זה אינו מתייחס לעצם קיומם של השורשים, אלא למציאתם באמצעות נוסחה המבוססת על פעולות חשבון בין מקדמי המשוואה ומתאימה לכל המשוואות מאותה מעלה.



אוסף משימות

1. בכל סעיף קִבעו אם לפונקציה יש נקודות אפס.
אם כן, מִצאו את שיעורי הנקודות.

א. $y = x^2 - 4x - 21$ ה. $y = -8x^2 + 7x - 3$

ב. $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 5$ ו. $y = -3x^2 - 6x + 9$

ג. $y = x^2 - 9x + 18$ ז. $y = 9x^2 - 6x + 1$

ד. $y = x^2 - 5x - 14$ ח. $y = 2x^2 - 3x + 20$

2. פִּתרו את המשוואות ובִדקו את הפתרונות.

א. $2x^2 - 7x + 5 = 0$

ב. $-2x^2 + 5x + 3 = 0$

ג. $x^2 - 9x + 14 = 0$

ד. $x^2 - 19x - 150 = 0$

ה. $-3x^2 - 5x - 12 = 0$

ו. $-6x^2 + 36x - 54 = 0$

ז. $3x^2 - 8x + 9 = 0$

ח. $-2x^2 + x + 15 = 0$

ט. $7x^2 + 15x - 100 = 0$

י. $-5x^2 + 14x - 8 = 0$

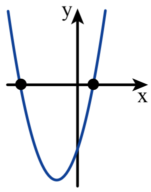
יא. $-\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6 = 0$

יב. $5x^2 + 3x - 14 = 0$

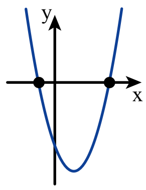
3. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 3x - 10$

איזה מהגרפים הבאים יכול להיות גרף הפונקציה? הַסבירו.

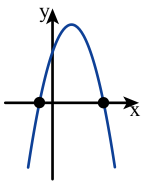
א.



ב.



ג.



4. פִּתרו את המשוואות הרשומות בטבלה, הַעתיקו את הטבלה ורִשמו את הפתרונות בעמודות המתאימות בטבלה.

הפונקציה	הפתרון הגדול יותר	הפתרון הקטן יותר
$x^2 - 18x = 0$	ב	א
$x^2 + 8x + 12 = 0$	ד	ג
$x^2 - 14x + 40 = 0$	ו	ה
$x^2 - 4x - 140 = 0$	ז	ח
$x^2 - 16x + 64 = 0$	ט	ט

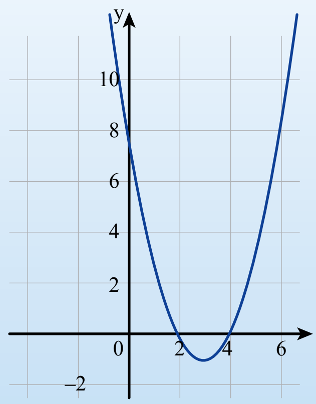
ריבוע הקסם:
רִשמו את הפתרונות בהתאם לאותיות בריבוע הקסם.
אם פתרתם נכון, סכום המספרים בכל שורה, בכל עמודה ובכל אלכסון - שווה.

ג	ב	א
ו	ה	ד
ט	ח	ז

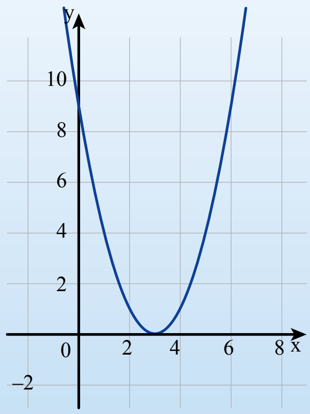
שיעור 2. כמה פתרונות למשוואה?

כמה נקודות אפס לכל פונקציה?

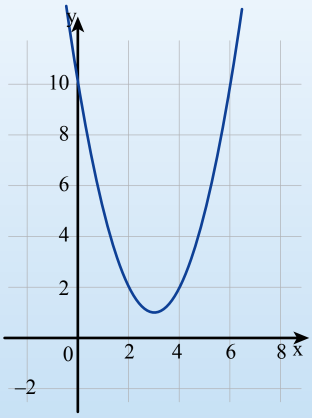
$f(x) = x^2 - 6x + 8$



$g(x) = x^2 - 6x + 9$



$h(x) = x^2 - 6x + 10$



האם תוכלו לענות על השאלה בלי להיעזר בגרף?

נחקור את מספר הפתרונות של משוואה ריבועית.

1. מְצאו את שיעורי נקודות האפס של הפונקציות שבמשימת הפתיחה.
כמה נקודות אפס מצאתם לכל פונקציה?
בִּדקו את הפתרונות בעזרת הצבה ולפי הגרף.

2. פִּתרו את המשוואות. אם למשוואות אין פתרון, הַסבירו.

א. $x^2 + 2x - 15 = 0$

ב. $-2x^2 - 3x + 20 = 0$

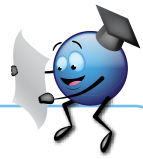
ג. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

ד. $-3x^2 + 10x - 9 = 0$

ה. $2x^2 + 4x + 3 = 0$

ו. $-x^2 + 8x - 16 = 0$

3. המורה שאלה: כמה פתרונות למשוואה הריבועית $x^2 - 4x + 8 = 0$?
שחר אמרה: כדי לדעת כמה פתרונות למשוואה אני בודקת את ערך הביטוי $b^2 - 4ac$ המופיע בתוך סימן השורש בנוסחת השורשים.
הַסבירו את ההצעה של **שחר**. התייחסו למקרים הבאים:
$b^2 - 4ac > 0$
$b^2 - 4ac = 0$
$b^2 - 4ac < 0$
תוכלו להיעזר בדוגמאות.



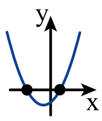
הנוסחה למציאת השורשים של משוואה ריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

היא $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

דוגמאות

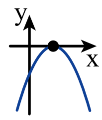
- אם $b^2 - 4ac > 0$,
למשוואה **שני פתרונות שונים**.
גרף הפונקציה
$(a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c$
חותך את הפונקציה **בשתי נקודות**.

המשוואה $2x^2 + 3x - 5 = 0$
$b^2 - 4ac = 49 > 0$
לכן למשוואה שני שורשים.
לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 3x - 5$
שתי נקודות אפס $(-2.5, 0)$ ו-$(1, 0)$



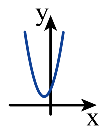
- אם $b^2 - 4ac = 0$,
למשוואה **פתרון יחיד** (שני שורשים זהים).
גרף הפונקציה
$(a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c$
נוגע בציר x בנקודה אחת, כלומר,
משיק לציר x **בנקודה יחידה**.

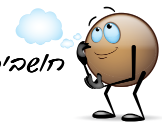
המשוואה $-x^2 + 8x - 16 = 0$
$b^2 - 4ac = 0$
לכן למשוואה פתרון אחד (שני שורשים זהים),
לגרף הפונקציה $y = -x^2 + 8x - 16$
נקודת אפס אחת $(4, 0)$



- אם $b^2 - 4ac < 0$,
למשוואה **אין פתרון**.
לגרף הפונקציה
$(a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c$
אין נקודות אפס. כלומר, לכל ערך של x הגרף נמצא מעל או מתחת לציר x.

המשוואה $2x^2 + 4x + 3 = 0$
$b^2 - 4ac = -8 < 0$
לכן למשוואה אין פתרון,
לגרף הפונקציה $y = 2x^2 + 4x + 3$
אין נקודות אפס.
במקרה זה הגרף נמצא מעל לציר x





חושבים על...

4. כמה פתרונות למשוואה $4x^2 - 12x + 9 = 0$?
יעל אמרה: $4x^2 - 12x + 9 = (2x - 3)^2$ לכן למשוואה פתרון יחיד $x = 1\frac{1}{2}$.
מיכל אמרה: $b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9 = 0$ לכן למשוואה פתרון יחיד $x = 1\frac{1}{2}$.
האם שתיהן צודקות?
אם כן, איזו דרך פתרון נראית לכם עדיפה?

5. נתונה משפחת המשוואות $x^2 + bx + 16 = 0$.
א. תְּנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה יהיה פתרון יחיד. כמה אפשרויות יש?
ב. תְּנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה אין פתרון. כמה אפשרויות יש?
ג. תְּנו דוגמה לערך של b כך שלמשוואה יהיו שני פתרונות שונים. כמה אפשרויות יש?

חושבים על...

6. כמה פתרונות למשוואה $x^2 - 8x + 10 = 0$?

רועי אמר: למשוואה שני פתרונות, כי ערך הביטוי $b^2 - 4ac$ הוא מספר חיובי, 24.

איתי אמר: למשוואה אין פתרון, כי השורש של 24 אינו מספר שלם.

מי צודק? הַסבירו.

שִרטטו סקיצה של גרף הפונקציה $y = x^2 - 8x + 10$.

אוסף משימות

1. פִּתרו.

א. $x^2 + 4x + 5 = 0$ ב. $x^2 + 4x + 4 = 0$ ג. $x^2 + 4x + 3 = 0$

2. מַיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור.)

א. $5x^2 + 3x - 14 = 0$ ג. $x^2 + 8x + 25 = 0$ ה. $x^2 - 10x + 25 = 0$

ב. $2x^2 - x - 15 = 0$ ד. $x^2 - 8x + 16 = 0$ ו. $4x - x^2 = 0$

3. א. פִּתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 25 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 25$ עם ציר x?
שִרטטו סקיצה של הפונקציה.

ב. פִּתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 24 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 24$ עם ציר x?
שִרטטו סקיצה של הפונקציה.

ג. פִּתרו את המשוואה $4x^2 - 20x + 26 = 0$. כמה פתרונות מצאתם?
כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה $y = 4x^2 - 20x + 26$ עם ציר x?
שִרטטו סקיצה של הפונקציה.

4. בכל סעיף קִבעו אם הטענה נכונה. הַסבירו.

א. למשוואה $x^2 - 12x + 36 = 0$ יש שני פתרונות.

ב. למשוואה $2x^2 + 50 = 0$ אין פתרון.

ג. למשוואה $x^2 + 8x + 16 = 0$ יש פתרון אחד.

ד. לפונקציה $y = -x^2 - 6x + 16$ יש שתי נקודות אפס.

ה. לפונקציה $y = -x^2 + 7$ אין נקודות חיתוך עם ציר x.

5. נתונה משפחת הפונקציות הריבועיות $y = ax^2 + 2x + 1 \quad (a \neq 0)$

עבור אילו ערכים של a, לפונקציה מהמשפחה יש:

א. שתי נקודות אפס   ב. נקודת אפס אחת   ג. ערכים חיוביים בלבד

6. נתונה המשוואה $x^2 - 8x + 16 = 0$

א. כמה פתרונות למשוואה?

ב. שַׁנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה עם שני פתרונות. כמה אפשרויות יש?

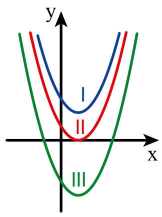
ג. שַׁנו מספר אחד במשוואה הנתונה, כך שתתקבל משוואה שאין לה פתרון. כמה אפשרויות יש?

7. א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

$g(x) = x^2 - 2x - 3$

$h(x) = x^2 - 2x + 1$



ב. פִּתרו את המשוואות.

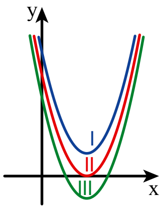
$x^2 - 2x + 3 = 0$ $x^2 - 2x - 3 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

8. א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = 4x^2 - 12x + 8$

$g(x) = 4x^2 - 12x + 11$

$h(x) = 4x^2 - 12x + 9$



ב. פִּתרו את המשוואות.

$4x^2 - 12x + 8 = 0$ $4x^2 - 12x + 11 = 0$ $4x^2 - 12x + 9 = 0$

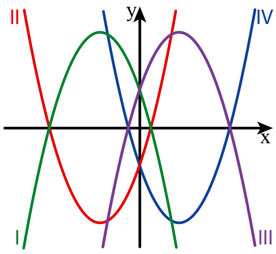
9. א. הַתאימו גרף לכל פונקציה.

$f(x) = 2x^2 - 7x - 4$

$g(x) = 2x^2 + 7x - 4$

$h(x) = -2x^2 - 7x + 4$

$m(x) = -2x^2 + 7x + 4$



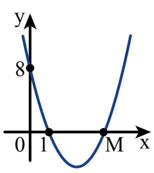
ב. פִּתרו את המשוואות.

$2x^2 - 7x - 4 = 0$ $-2x^2 - 7x + 4 = 0$

$2x^2 + 7x - 4 = 0$ $-2x^2 + 7x + 4 = 0$

10. בשִׂרטוט גרף הפונקציה $y = ax^2 - 10x + c \quad (a \neq 0)$

א. מהו c?   ב. מהו a?   ג. מהם שיעורי הנקודה M?



שיעור 3. מפשטים ופותרים

מהם שיעורי נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = -2(x-4)^2 + 18$?

נפשט ונפתור משוואות ריבועיות.

1. מהן נקודות האפס של הפונקציה $f(x) = -2(x-4)^2 + 18$?

א. שַרטטו (בלי חישובים) סקיצה של גרף הפונקציה.

ענו לפי הגרף: כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ב. **שני** התחילה לפתור כך:

$$-2(x-4)^2 + 18 = 0$$

$$-2(x-4)^2 = -18 \quad / : (-2)$$

הַמשיכו את פתרון המשוואה בדרך של **שני**. כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ג. **בתיה** התחילה לפתור כך:

$$-2(x-4)^2 + 18 = 0$$

$$-2(x^2 - 8x + 16) + 18 = 0$$

הַמשיכו את פתרון המשוואה בדרך של **בתיה**. כמה נקודות אפס לפונקציה? מה שיעוריהן?

ד. דונו בדרכי הפתרון השונות. איזו דרך נוחה יותר לדעתכם?

2. מִצאו את נקודות האפס של הפונקציה $y = (x+4)^2 - 4$.

במשימה 1 ראינו כי כדי למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה ריבועית המוצגת בייצוג קדקודי, $y = a(x-p)^2 + k$, $(a \neq 0)$

פותרים את המשוואה כך:

$$a(x-p)^2 + k = 0$$

$$a(x-p)^2 = -k$$

$$(x-p)^2 = -\frac{k}{a}$$

$$x - p = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

לכן שיעורי נקודות האפס הם $\left(p - \sqrt{-\frac{k}{a}}, 0\right)$ ו- $\left(p + \sqrt{-\frac{k}{a}}, 0\right)$.

בהמשך ניעזר בנוסחה זו למציאת נקודות אפס של פונקציה ריבועית בייצוג סטנדרטי, כדי להוכיח את **נוסחת השורשים**.

3. בכל סעיף פַּשטו, רִשמו בצורה $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ ופִתרו.

דוגמה:

$x(3x - 1) = 4(3 + x)$

מפשטים: $3x^2 - x = 12 + 4x \quad / \quad -12 - 4x$

$3x^2 - 5x - 12 = 0$

פותרים: $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-12)}}{2 \cdot 3}$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{169}}{6}$

מקבלים: $x_1 = \dfrac{5+13}{6} = 3 \quad , \quad x_2 = \dfrac{5-13}{6} = -\dfrac{4}{3}$

פתרונות המשוואה הם: $x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -\dfrac{4}{3}$

א. $x^2 - 2x = x + 4$

ב. $x(x - 4) = 21$

ג. $(x - 3)(x + 1) = 22 - 2x$

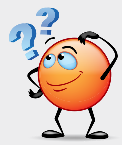
ד. $2(x + 4) = 3 - 3x^2$

ה. $2(8 - x) = (x - 4)^2$

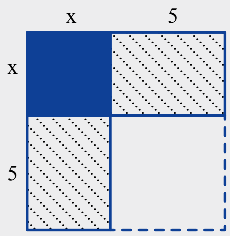
ו. $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 = x + 2$

ז. $\dfrac{(x-4)^2}{7} = 1 - 2x$

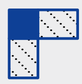
ח. $\dfrac{2x^2 + 3x}{5} = \dfrac{x(x-9)}{4}$



אלחואריזמי היה מתמטיקאי ערבי, שחי במאה התשיעית לספירה. הוא ידוע כאחד התורמים לבניית יסודות האלגברה. בספרו **אלג׳בר ואלמוקאבלה** מתאר דרך מעניינת לפתרון משוואה ריבועית. המילה "אלג׳בר" שימשה את אלחואריזמי לתיאור הפעולה של העברת איברים מאגף לאגף במשוואה, והמילה "אלמוקאבלה" שימשה אותו לתיאור פעולת כינוס האיברים הדומים. השם אלגברה שבו אנו מכנים עד היום את כל הענף במתמטיקה שעוסק בין היתר בפתרון משוואות, נגזר מן המילה "אלג׳בר". נציג כאן כדוגמה את הפתרון של המשוואה $x^2 + 10x = 39$ לפי השיטה של אלחואריזמי:



- שִׂרטטו ריבוע שאורך צלעו x (הריבוע המלא).
- הוסיפו אל הריבוע שני מלבנים משני צידיו (המלבנים המקווקוים), שאורך אחת הצלעות של כל אחד מהם היא 5 יחידות.
- הַשלימו את השרטוט לריבוע, בעזרת תוספת ריבוע (הריבוע הריק).

שטח הצורה  מיוצג על-ידי הביטוי $x^2 + 10x$, ולפי תנאי המשוואה הוא שווה ל-39 יחידות.

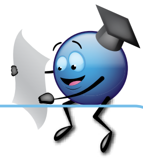
שטח הריבוע הגדול מיוצג על-ידי הביטוי $(x + 5)^2$, ולפי השרטוט הוא שווה ל- 64 יחידות.

כלומר בכתיב של ימינו $(x + 5)^2 = 64$

מכאן נוכל להסיק כי $x + 5 = 8$ ופתרון המשוואה הוא $x = 3$

הערות:

- הפתרון של אלחואריזמי הוא גאומטרי, ואינו לוקח בחשבון פתרונות שליליים (במקרה שלנו $(x = -13)$
- הפתרון המקורי הוצג באופן מילולי, כי השימוש באותיות ובמשתנים לא היה מוכר בתקופתו של אלחואריזמי (כלומר, לפני כ-1,200 שנה).



כדי למצוא את שיעורי נקודות האפס של פונקציה ריבועית המוצגת בייצוג הסטנדרטי,
$y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, פותרים את המשוואה $ax^2 + bx + c = 0$
נשתמש בשורשי המשוואה בייצוג הקדקודי כדי להוכיח את **נוסחת השורשים**.
מוצאים את הקשר בין הייצוג הסטנדרטי לייצוג הקדקודי של הפונקציה על-ידי פישוט.

$$f(x) = a(x-p)^2 + k$$

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + k$$

משווים לייצוג הסטנדרטי ומקבלים:

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$f(x) = \boxed{a}x^2 - \boxed{2ap}x + \boxed{ap^2 + k}$$

מסיקים שני שוויונות:

א. $-2ap = b$

ומכאן: $\boxed{p = -\dfrac{b}{2a}}$

ב. $c = ap^2 + k$

$$k = c - ap^2 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = c - \frac{b^2}{4a}$$

ומכאן: $\boxed{k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}}$

ראינו כי פתרונות המשוואה **בייצוג הקדקודי** הם:

$$x_{1,2} = p \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

על-סמך השלבים הקודמים מציבים ומקבלים:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) : a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הנוסחה לחישוב שיעורי x של נקודות האפס של הפונקציה הריבועית (כלומר השורשים של המשוואה) היא:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

חושבים על...

4. מתוך הקשרים בין הייצוג הסטנדרטי לייצוג הקדקודי של הפונקציה הריבועית ראינו כי $p = -\frac{b}{2a}$.

א. **נבו** אמר: נוכל להסיק כי שיעור x של נקודת הקדקוד של הפונקציה $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ הוא $x = -\frac{b}{2a}$

הסבירו.

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקדקוד של הפונקציות הבאות:

$y = 2x^2 - 16x - 6$ $\qquad$ $y\ -2x^2 + 16x - 14$

5. פתרו כל משוואה בשתי דרכים: בעזרת נוסחת השורשים ובדרך נוספת.

א. $x^2 - 169 = 0$ $\qquad$ ב. $3x^2 - 15x = 0$ $\qquad$ ג. $x^2 - 10x + 24 = 0$

אוסף משימות

1. פתרו.

א. $x(x + 5) - 6 = 0$ $\qquad$ ד. $x(6x - 13) + 2(5x - 1) = 1$

ב. $2x(x + 1) + 3.5 = 5$ $\qquad$ ה. $x(3x - 5) = 2(3x - 5)$

ג. $2(2x - 5) = x(x - 7)$ $\qquad$ ו. $x + \frac{x^2 - x}{2} = 0$

2. פתרו.

א. $(x + 3)(x + 4) = 72$ $\qquad$ ד. $(3x + 4)(x - 1) = 2x^2 + 2$

ב. $(x + 3)^2 = 4$ $\qquad$ ה. $(2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 9$

ג. $(x - 3)^2 = x + 3$ $\qquad$ ו. $4 + \frac{2x - 2x^2}{3} = 0$

3. פתרו.

א. $(2x - 1)(x - 1) = 13 - 5x$ $\qquad$ ד. $x - (x + 4)^2 = x - 1$

ב. $3x^2 - 2x + 9 = 2x(x - 4)$ $\qquad$ ה. $(2x + 1)^2 - (x + 7)^2 = 0$

ג. $\frac{(x - 3)^2}{2} = \frac{x + 5}{5}$ $\qquad$ ו. $\frac{x(x - 5)}{2} - 2x + 4 = 0$

4. מַיינו את המשוואות לפי מספר הפתרונות. (אין צורך לפתור.)

א. $3x^2 - 5x - 12 = 0$

ב. $9x^2 - 30x + 25 = 0$

ג. $8(x - 1) - x(5x - 6) = 0$

ד. $8(1 - x^2) = (2x - 3)^2$

ה. $(x - 4)^2 = -1$

ו. $x - \frac{(3+x)^2}{2} = 0$

5. פִּתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 4x + 3 = 0$

ב. $2x^2 - 5x = 0$

ג. $-x^2 + 3x - 2 = 0$

ד. $(x - 5)(x + 2) = 0$

ה. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

ו. $(x - 2)^2 = x(x - 3)$

6. פִּתרו את המשוואות.

א. $x^2 - 2x - 4 = x + 6$

ב. $x(x - 4) = 21$

ג. $x^2 + 5(8 - x) = 46$

ד. $(x + 2)^2 = x^2 + 20$

ה. $2x^2 - 2x = (x + 3)(x - 1)$

ו. $(x - 4)^2 = x(8 + x)$

7. פִּתרו את המשוואות.

א. $x(x + 4) = 3x + 12$

ב. $(x + 5)(x + 2) = -2$

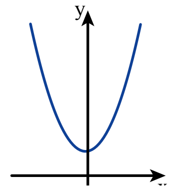
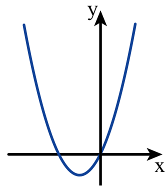
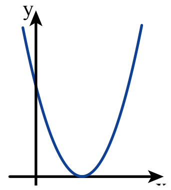
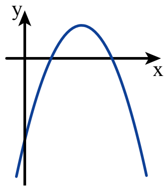
ג. $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2 + 9$

ד. $x(2x + 3) = 2x + 10$

ה. $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 4x - 5$

ו. $(x + 3)^2 = (x + 2)(x - 2) + 31$

8. בשִרטוט סקיצות של פרבולות. מִצאו את נקודות האפס (אם יש), והַתאימו פרבולה לפונקציה.

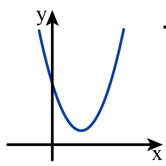
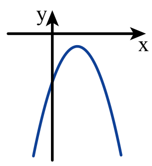
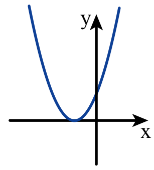
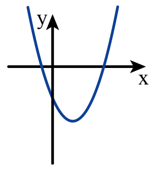
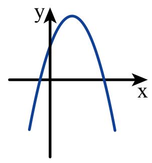
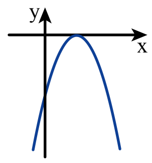
א.

ב.

ג.

ד.


$k(x) = x^2 - 8x + 16$ $\quad$ $h(x) = x^2 + 2x$ $\quad$ $g(x) = -x^2 + 3x - 2$ $\quad$ $f(x) = x^2 + 3$

9. לכל פונקציה, הַתאימו סקיצה של פרבולה. הַסבירו.

$f(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad$ $p(x) = x^2 - x + 1$ $\quad$ $m(x) = -x^2 + 3x + 4$

$h(x) = -x^2 + 2x - 1$ $\quad$ $k(x) = -x^2 + x - 1$ $\quad$ $g(x) = x^2 - 3x - 4$

א.

ב.

ג.

ד.

ה.

ו.


10. הַעתיקו והַשלימו **תעודות זהות** לפונקציות.

ייצוג אלגברי של הפונקציה	$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$	$g(x) = x^2 - 6x + 10$
תחום	כל המספרים	כל המספרים
סקיצה		
ציר הסימטריה		
שיעורי נקודת הקדקוד		
סוג הקדקוד		
שיעורי נקודות החיתוך עם ציר x (נקודות אפס, $y = 0$)		
שיעורי נקודת החיתוך עם ציר y $(x = 0)$		
תחום עלייה של הפונקציה		
תחום ירידה של הפונקציה		
התחום שבו הפונקציה חיובית $(y > 0)$		
התחום שבו הפונקציה שלילית $(y < 0)$		

שיעור 4. בעיות מילוליות ומשוואות

יובל בחר מספר שלם.
הוא הוסיף 5 למספר שבחר,
כפל את הסכום שהתקבל במספר שבחר וקיבל 6.
בני אמר: המספר שבחרת הוא 1.
יובל אמר: טעית, בחרתי מספר אחר.
הייתכן? הַסבירו.

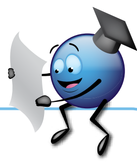
נפתור בעיות מילוליות בעזרת משוואות ריבועיות.

1. מחוט שאורכו 24 ס"מ יוצרים מלבנים שונים.
א. הציעו מידות אפשריות למלבנים ומִצאו את שטחיהם.
ב. השטח של אחד המלבנים שנוצרו מאותו חוט הוא 27 סמ"ר.
מִצאו את אורכי צלעות המלבן. הַסבירו.

2. מקיפים בגדר מגרש מלבני ששטחו 45 מ"ר. צלע אחת של המלבן ארוכה ב- 12 מ' מהצלע השנייה.
א. סַמנו ב- x אורך (בס"מ) של אחת מצלעות המלבן.
רִשמו ביטוי אלגברי לאורך הצלע השנייה של המלבן.
ב. אילו ערכים מתאימים ל-x לפי תנאי הבעיה? הַסבירו.
ג. מה אורכי צלעות המלבן?

3. בסיום שנת הלימודים החליטו תלמידי כיתה ט להחליף ביניהם תמונות למזכרת.
בסך-הכול הוחלפו 870 תמונות.
א. אילו מספרים יכולים להתאים למספר התלמידים בכיתה?
ב. כמה תלמידים בכיתה? הַסבירו.

4. נתונים שני מספרים עוקבים. סכום ריבועיהם 1301.
א. אילו מספרים יכולים להתאים?
ב. מהם הפתרונות של המשוואה המתאימה?
ג. מהם המספרים? הַסבירו.



תזכורת
כך נוהגים בפתרון בעיות:
- קובעים תחילה את התנאים המגבילים של הבעיה, כלומר מסיקים אילו ערכים מתאימים לנתונים.
- מוצאים את התשובה לבעיה בעזרת שיקולים, בעזרת חישובים, בעזרת גרף או בעזרת משוואה.
- בודקים אם הפתרונות שהתקבלו מתאימים לתנאי הבעיה.

5. פִּתרו את המשוואות.

א. $5x(4x - 10) = 0$

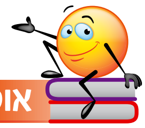
ב. $-2x^2 + (3x + 2)^2 + 2(x - 2) = 0$

ג. $(2x - 3)(2x + 3) = 0$

ד. $-x(5x - 6) - 8(1 - x) = 0$

ה. $-1 -(x - 4)^2 = 0$

ו. $2x - (3 + x)^2 = 0$



אוסף משימות

1. צלע אחת של מלבן ארוכה ב- 2 ס"מ מהצלע השנייה. שטח המלבן 24 ס"מ.

א. אילו ערכים יכולים להתאים לאורכי צלעות המלבן?

ב. מְצאו את אורכי צלעות המלבן.

ג. מְצאו את היקף המלבן.

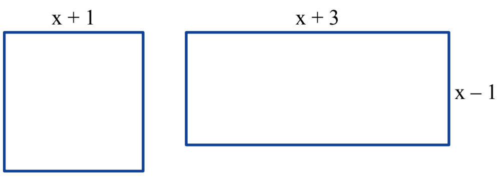
2. היקפו של מלבן 32 ס"מ.

סַמנו ב- x את אורך אחת הצלעות של המלבן (x בס"מ).

א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי הבעיה? הַסבירו.

ב. שטח המלבן 48 סמ"ר. מְצאו את אורכי צלעות המלבן.

3. בשרטוט ריבוע ומלבן (אורכי הצלעות נתונים בס"מ).



א. אילו ערכים מתאימים ל- x לפי תנאי השאלה? הַסבירו.

ב. סכום השטחים של הריבוע ושל המלבן 94 סמ"ר.
מְצאו את אורכי הצלעות של הריבוע ושל המלבן.

ג. מְצאו את סכום ההיקפים של הריבוע ושל המלבן.

4. בטורניר של שחמט שיחק כל שחקן משחק אחד
נגד כל אחד מן השחקנים האחרים.
בטורניר היו 36 משחקים.
כמה שחקנים השתתפו בטורניר?

5. א. מִצאו מספר שריבועו שווה למכפלתו ב- 6.

ב. מִצאו מספר שריבועו גדול ממנו ב- 2.

6. **דני** מבוגר מ**יואל** ב- 10 שנים. מכפלת הגילים שלהם היא 39.

בן כמה **דני**? בן כמה **יואל**?

7. מכפלת זוג מספרים עוקבים היא 2. מִצאו את המספרים.

כמה זוגות מספרים מצאתם?

8. מִצאו מספר שאם נכפול את המספר הקודם לו במספר העוקב לו, נקבל 24.

9. מִצאו זוג מספרים עוקבים שסכומם שווה לסכום ריבועיהם.

10. פִּתרו את המשוואות.

א. $(x-1)(3x+1)=x^2+11$

ב. $(2x-1)(x+3)=15$

ג. $(x-4)^2+(x+4)^2=82$

ד. $(x-2)(x+4)=(2x-7)(x+2)$

ה. $(x+5)^2=(x-1)(5x-11)$

ו. $(x-5)^2+(x+3)^2=16x-8$

11. פִּתרו את המשוואות.

א. $8(1+x)=x(6+x)$

ב. $(x-4)(x+4)=(2x-1)(2x+1)$

ג. $(3x-2)^2=8(x^2-3)+1$

ד. $x(x+2)+(x-5)^2=89$

ה. $(2x-1)(x+2)=x(x+1)+1$

ו. $(2x-3)(2x+3)=5x+(x+1)(x-1)$

12. פִּתרו את המשוואות.

א. $7(2-x)+x(x-3)=5$

ב. $3(x-1)^2=2(x+3)^2-96$

ג. $(3x+2)^2+2(3x-2)=0$

ד. $(x-3)(x+2)+(x-5)^2=10$

ה. $(2x-3)(2x+3)=3x(x+1)-19$

ו. $(2x-3)^2-4(x+1)^2=10-15x$