

יחידה 18: טרפז

שיעור 1. תכונות הטרפז



גזרו בקווים ישרים רצועת נייר מלבנית.
אילו צורות קיבלתם? מה משותף לכל הצורות?

נכיר סוגי טרפזים ונלמד על תכונותיהם.



במשימות 1 ו-2 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

1. א. האם אפשר לגזור רצועת נייר כמו בשרטוט, למעלה, ולקבל: מלבן? מעוין? ריבוע? מקבילית? צורות נוספות?
ב. מה משותף לכל הצורות שקיבלתם?



הגדרה: מרובע בעל זוג אחד בלבד של צלעות מקבילות, נקרא **טרפז**.



הצלעות המקבילות נקראות **בסיסי הטרפז**.
הצלעות שאינן מקבילות נקראות **שוקי הטרפז**.

2. א. האם כל הצורות שגזרתם הם טרפזים? הסבירו.
ב. האם בין הטרפזים שגזרתם יש טרפזים מיוחדים?



תזכורת

נתונים שני ישרים וישר שלישי החותך אותם.

- אם הישרים **מקבילים**, אז הזוויות **המתאימות** שוות בגודלן.

זנ"ח: בשרטוט הישרים a ו-b מקבילים זה לזה, ולכן α ו- β שוות בגודלן.

כלומר: אם $a \parallel b$

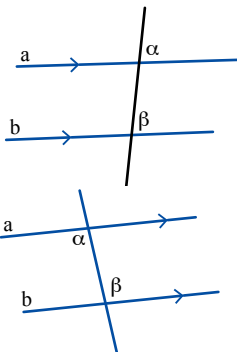
$$\alpha = \beta$$

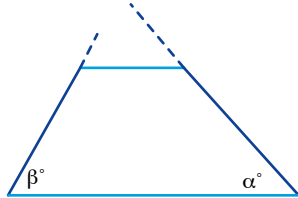
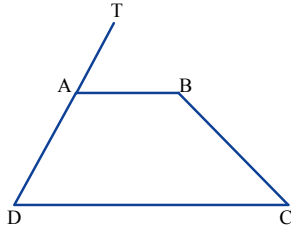
- אם הישרים **מקבילים**, אז הזוויות **המתחלפות** שוות בגודלן.

זנ"ח: בשרטוט הישרים a ו-b מקבילים זה לזה, ולכן α ו- β שוות בגודלן.

כלומר: אם $a \parallel b$

$$\alpha = \beta$$





3. נתון/ ABCD טרפז ($AB \parallel DC$)

בכל סעיף הנתונים של גדלי הזוויות $\angle B$ ו- $\angle D$ שונים.

א. נתון $\angle D = 80^\circ$ $\angle B = 115^\circ$

חשבו את הגדלים של הזוויות: $\angle TAB$, $\angle DAB$, $\angle C$

ב. נתון $\angle D = 70^\circ$ $\angle B = 120^\circ$

חשבו את הגדלים של הזוויות: $\angle TAB$, $\angle DAB$, $\angle C$

ג. בטאו את הגדלים של שתי הזוויות האחרות של הטרפז בעזרת α או β .
האם סכום הגדלים של כל זוג זוויות סמוכות בטרפז הוא 180° ?
נסחו את הכלל שמצאתם.



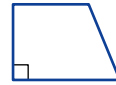
בטרפז, סכום הגדלים של זוג זוויות **ליד אותה שוק** שווה 180° .
סכום הגדלים של זוג זוויות **ליד אותו בסיס** אינו שווה 180° .

תזכורת

• טרפז בעל שוקיים שוות
נקרא **טרפז שווה-שוקיים**.



• טרפז בעל זווית ישרה
נקרא **טרפז ישר-זווית**.

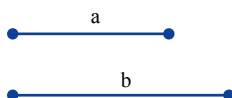


4. באתר "מתמטיקה משולבת" במדור "פעילויות באמצעות מחשב" תמצאו את הפעילות "בניית טרפז לפי בסיסיו". בצעו את הפעילות בהתאם להוראות.



5. נתונים הקטעים a ו- b.

בנו בעזרת סרגל ומחוגה טרפז שאורך הבסיסים האחד הוא a ואורך הבסיס האחר כאורך b.
תארו את הבנייה.



כמה טרפזים כאלה קיימים?

האם הטרפז יכול להיות טרפז שווה-שוקיים?

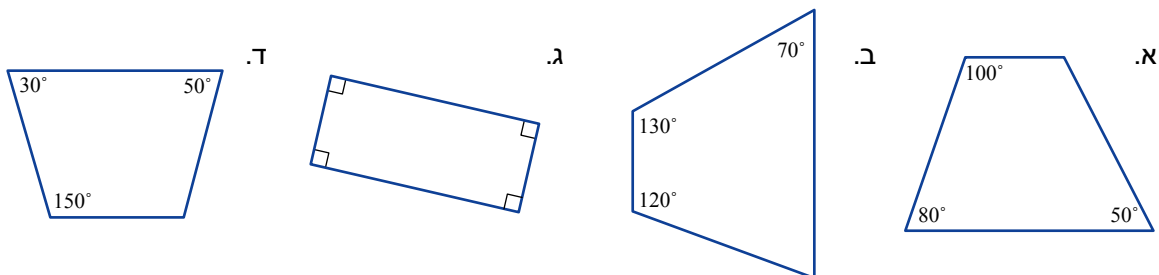
האם הטרפז יכול להיות טרפז ישר-זווית?



6. א. האם קיים טרפז קעור? אם כן, שרטטו. אם לא, הסבירו מדוע.
ב. האם טרפז יכול להיות דלתון? אם כן, שרטטו. אם לא, הסבירו מדוע.

7. א. כמה זוויות של 90° ישנן בטרפז ישר-זווית? הסבירו.
ב. האם מרובע שבו שתי זוויות ישרות הוא בהכרח טרפז ישר-זווית?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.

8. אילו מהמרובעים הבאים הם טרפזים? הסבירו.



המילה טרפז מורכבת מהמילים היווניות טטרה (ארבע) ו-פזה (רגל). המתמטיקאי היווני אוקלידס השתמש בשם טרפז (ביוונית trapézion) לכל צורה של לוח שולחן.



במדינות האזור המילה Trapeza בערבית משמשת כשם לשולחן קפה קטן. המקור של הכינוי הזה הוא יווני והוא הגיע לאזור באמצעות התורכים. טרפז הוא גם שמו של מכשיר התעמלות. הטרפז מורכב משני חבליים המשתלשלים מהתקרה וביניהם מתוח מוט. הלוליינים בקרקס מבצעים על הטרפז תרגילי אקרובטיקה. השם טרפז רומז למרובע הנוצר משני החבליים, מהמוט המחובר להם ומקטע התקרה התומך במכשיר.



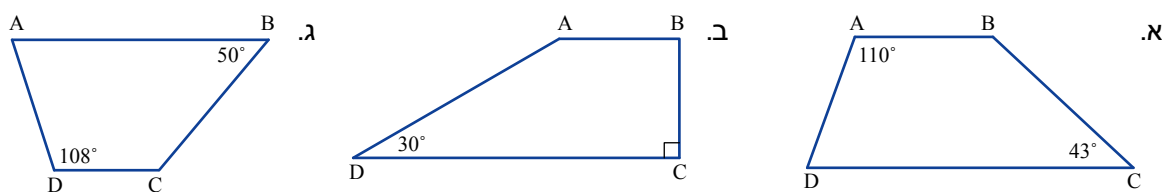
1. שרטטו על דף משובץ:
א. טרפז ישר-זווית שהקטע AB הוא הבסיס הגדול שלו.
ב. טרפז ישר-זווית שהקטע AB הוא שוק שלו.
ג. טרפז שווה-שוקיים שהקטע AB הוא הבסיס הגדול שלו.



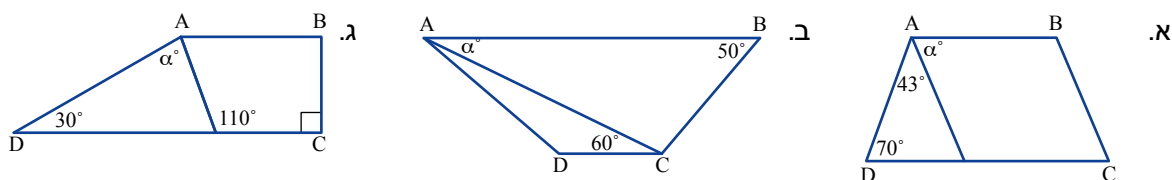
2. העתיקו על דף משובץ, השלימו כל שרטוט לטרפז כך שהקטע המשוורטט הוא:



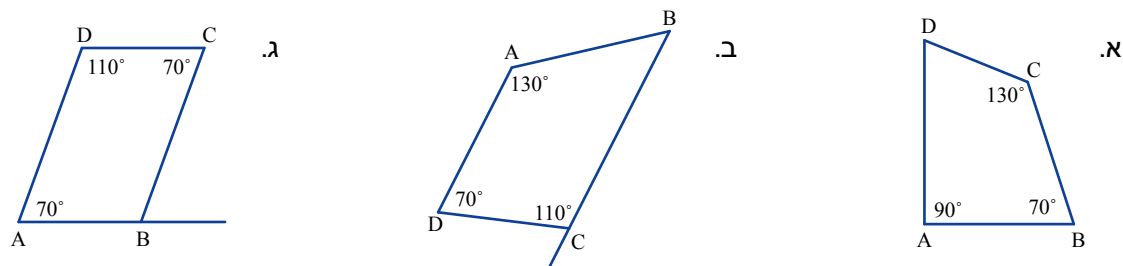
3. לפניכם טרפזים ($AB \parallel DC$). חשבו את הגדלים של הזוויות החסרות.



4. לפניכם טרפזים ($AB \parallel DC$). חשבו את הגודל של זווית a בכל טרפז.

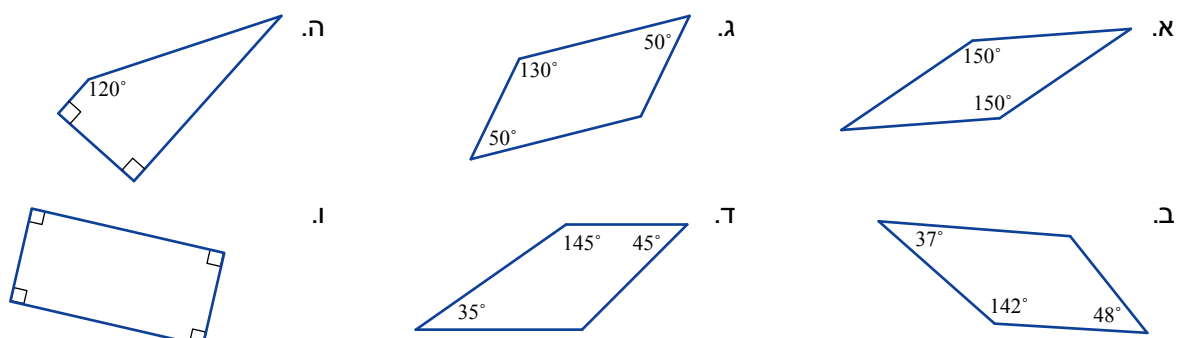


5. בכל סעיף קבעו אם המרובע הוא טרפז. הסבירו.



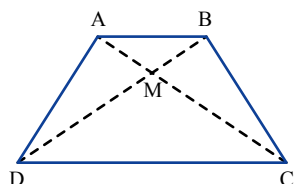


6. בכל סעיף קבעו אם המרובע הוא טרפז. הסבירו.



7. $\triangle ABM \sim \triangle CDM$

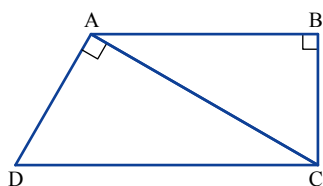
האם המרובע ABCD הוא טרפז? הסבירו.



8. $ABCD$ טרפז ישר-זווית ($AB \parallel DC$)

$AD \perp AC$

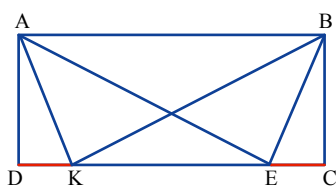
האם המשולשים $\triangle ACD$ ו- $\triangle ACB$ חופפים? הסבירו.
קשמו שלושה גדלים שווים בשני המשולשים.



9. $ABCD$ מלבן

$DK = CE$

האם המרובע ABEK הוא טרפז שווה-שוקיים?
אם כן, הוכיחו.
אם לא, הסבירו מדוע.



10. נתונים קטע a , קטע b וזווית α .

בנו בעזרת סרגל ומחוגה:

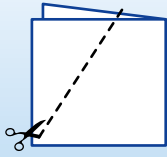
טרפז, שאורך אחד מבסיסיו a , אורך השוק b , והזווית שבין הבסיס a ובין השוק b היא α .
תארו את הבנייה.

כמה טרפזים כאלה יש? הסבירו.



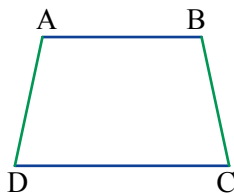


שיעור 2. טרפז שווה-שוקיים



קפלו דף נייר וגזרו מקצהו משולש ישר-זווית. (ראו איור).
איזה מרובע קיבלתם?
קפלו את המרובע שקיבלתם לפי קו הקיפול.
מהן תכונות המרובע שקיבלתם?

נבדוק תכונות של זוויות ושל אלכסונים בטרפז שווה-שוקיים.



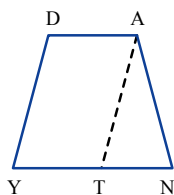
1. נתייחס למרובע שבמשימת הפתיחה.

- א. רשמו במילים את תכונות זוויות המרובע.
- ב. היעזרו בשרטוט ורשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי.
- ג. הוכיחו את המשפט.

- 2.** א. האם **מרובע** שבו שני זוגות של זוויות שוות בגודלן, הוא בהכרח טרפז שווה-שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.
- ב. האם **טרפז** שבו שני זוגות של זוויות שוות בגודלן, הוא בהכרח טרפז שווה-שוקיים?
אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



משפט: אם הטרפז שווה-שוקיים, אז הזוויות שליד אותו בסיס שוות בגודלן.
משפט הפוך: אם בטרפז, הזוויות שליד אותו בסיס שוות בגודלן, אז הטרפז הוא שווה-שוקיים.

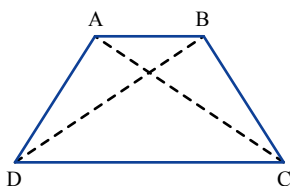


3. $DANY$ טרפז שווה-שוקיים ($DA \parallel YN$)

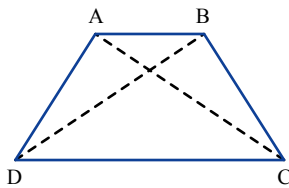
$AT \parallel DY$

מה סוג המשולש $\triangle ATN$? הוכיחו.

אלכסונים בטרפז שווה-שוקיים



- 4.** א. שערנו: מהי התכונה של האלכסונים בטרפז שווה-שוקיים?
- ב. האם המשולשים $\triangle ADC$ ו- $\triangle BCD$ הם **משולשים חופפים**?
אם כן, הוכיחו. אם לא, הסבירו.
- ג. מה אפשר להסיק מחפיפת המשולשים?
- ד. נסחו את המשפט שהוכחתם.

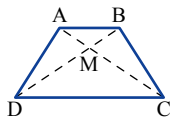


5. נתון: ABCD טרפז שווה-שוקיים ($AB \parallel DC$)
העתיקו את השרטוט וסמנו ב-M את נקודת המפגש של האלכסונים.
א. הוכיחו: המשולשים $\triangle ABM$ ו- $\triangle CDM$ הם משולשים דומים.
ב. האם בכל טרפז האלכסונים יוצרים משולשים דומים? הוכיחו.



משפט:

אם טרפז הוא שווה-שוקיים, אז האלכסונים שווים באורכם.
המשפט ההפוך: אם בטרפז האלכסונים שווים באורכם, אז הטרפז הוא שווה-שוקיים.
אפשר להוכיח את המשפט בדרכים שונות.
לפניכם הוכחה לקריאה עצמית.



נתון: ABCD טרפז ($AB \parallel DC$)

$$AC = BD$$

$$AD = BC \quad \text{נ"ן}$$

הוכחה

$$\triangle CDM \sim \triangle ABM \quad (\text{הוכחנו במשימה 5})$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{CM}{AM} = \frac{DM}{BM}$$

$$\frac{CM}{AM} + 1 = \frac{DM}{BM} + 1$$

$$\frac{CM + AM}{AM} = \frac{DM + BM}{BM}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{AC}{AM} = \frac{BD}{BM}$$

$$AC = BD \quad (\text{נתון})$$

$$\Downarrow$$

$$AM = BM$$

$$\Downarrow$$

$$CM = DM \quad (\text{הפרשים של קטעים שווים באורכם})$$

$$\Downarrow$$

$$\angle DMA = \angle CMB \quad (\text{זוויות קדקודיות שוות בגודלן})$$

$$\Downarrow$$

$$\triangle DMA \cong \triangle CMB \quad (\text{לפי צלע, זווית, צלע})$$

$$\Downarrow$$

$$AD = BC$$

6. $ABCD$ טרפז ($AB \parallel DC$) נ/נ/ן

$$AC = BD$$

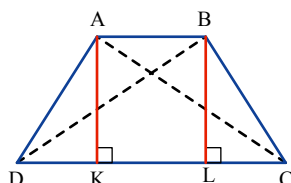
$$AD = BC \quad \text{נ/נ/ן}$$

אפרת הציעה לבנות **בניית-עזר** כך:

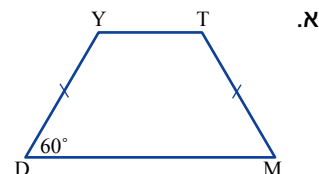
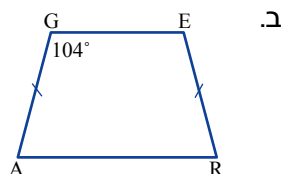
משרטטים את הגבהים של הטרפז AK ו- BL (ראו שרטוט).

$$\angle ACK = \angle BDL \iff \triangle AKC \cong \triangle BLD$$

המשיכו את ההוכחה של **אפרת** והראו כי $AD = BC$.



1. הטרפזים בשרטוט הם שוו-שוקיים. חשבו את הגדלים של זוויות הטרפז.



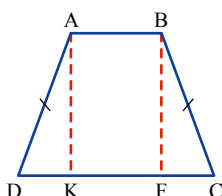
2. א. $ABCD$ טרפז שווה-שוקיים ($AD = BC, AB \parallel DC$) נ/נ/ן

AK ו- BF הם גבהים בטרפז

לאילו צורות מחולק הטרפז? האם המשולשים בשרטוט חופפים?

ב. $ABCD$ טרפז ישר-זווית ($\angle D = 90^\circ, AB \parallel DC$) נ/נ/ן

אם ישרטטו את הגובה של הטרפז, לאילו צורות יחולק הטרפז? שרטטו שרטוט מתאים.

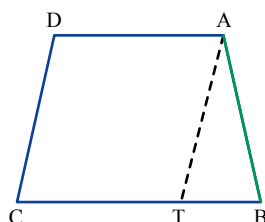


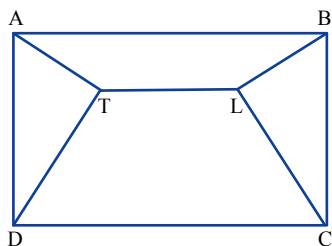
3. $ABCD$ טרפז נ/נ/ן

$$AT \parallel DC$$

$\triangle ATB$ שווה-שוקיים ($AT = AB$)

$ABCD$ טרפז שווה-שוקיים נ/נ/ן





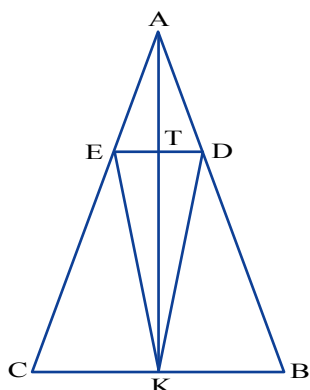
ABCD מלבן

4. נ/נ

TLCD טרפז שווה-שוקיים ($TL \parallel DC$)

ABL T טרפז שווה-שוקיים

3/3



$\triangle ABC$ שווה-שוקיים ($AB = AC$)

5. נ/נ

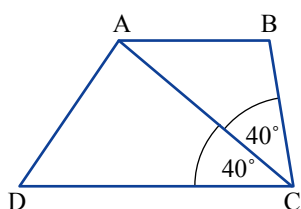
$\triangle AED$ שווה-שוקיים ($AE = AD$)

AK חוצה זווית CAB

א. מרובע ADKE הוא דלתון

3/3

ב. מרובע CBDE הוא טרפז שווה-שוקיים



6. בשרטוט טרפז שבו האלכסון AC חוצה את הזווית C

א. חשבו את הגדלים של זוויות משולש $\triangle ACB$.

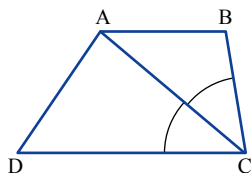
ב. מהו סוג המשולש $\triangle ACB$? הסבירו.



7. טענה: בטרפז, אם אלכסון חוצה את אחת הזוויות, אז מתקבל משולש שווה-שוקיים.

א. קתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. הוכיחו.



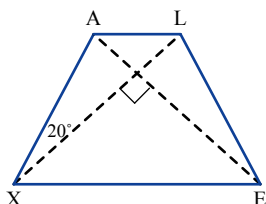
ALEX טרפז שווה-שוקיים ($AL \parallel XE$)

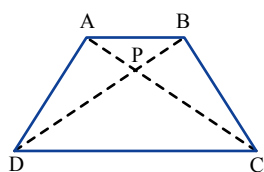
8. נ/נ

$\angle AXL = 20^\circ$

האלכסונים מאונכים זה לזה.

חשבו את הגדלים של זוויות הטרפז לפי הנתונים בשרטוט.



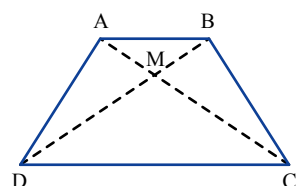


9. נתון: ABCD טרפז שווה-שוקיים ($AB \parallel DC$)

$$PD = PC$$

$$\angle DAC = 60^\circ, \angle ADB = 20^\circ$$

חשבו את הגדלים של כל זוויות הטרפז לפי הנתונים.
הסבירו את דרך החישוב.



10. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) האלכסונים נפגשים בנקודה M

יוצרים משולשים שווים-שוקיים: $\triangle AMB, \triangle CMD$.

הוכיחו: הטרפז הוא שווה-שוקיים.



11. נתון קטע a.

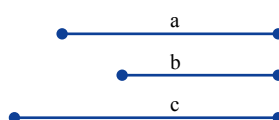


בנו בעזרת סרגל ומחוגה טרפז שווה-שוקיים שאורך אלכסונו a.
תארו את הבנייה.

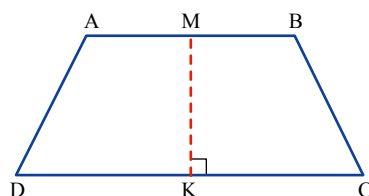
כמה טרפזים כאלה יש? הסבירו.



12. נתון קטע a. קטע b וקטע c.



בנו בעזרת סרגל ומחוגה טרפז שווה-שוקיים שאורך בסיסו a ו-b ואורך האלכסון שלו הוא c.
תארו את הבנייה.



13. נתון: ABCD טרפז

M אמצע הצלע AB

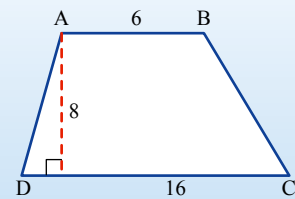
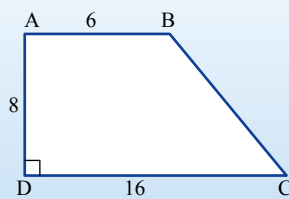
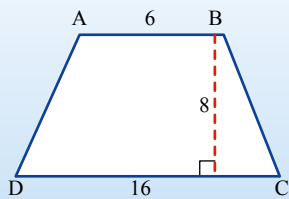
K אמצע הצלע DC

$$MK \perp DC$$

ABC טרפז שווה-שוקיים

שיעור 3. שטח והיקף של טרפז

בשרטוט שלושה טרפזים.



חשבו את השטח של כל טרפז.

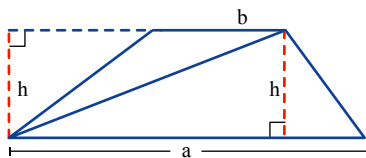
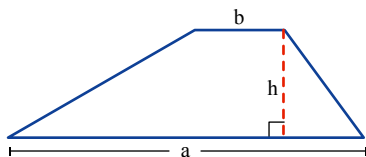
נחשב שטח והיקף של טרפז.

במשימות בשיעור ובאוסף המשימות השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.

1. בכיתה ז הראינו בעזרת דוגמאות כי שטח הטרפז שווה למחצית המכפלה של סכום הבסיסים בגובה.

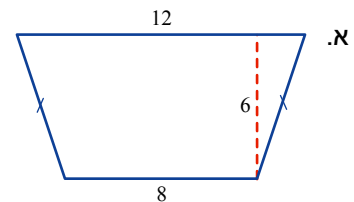
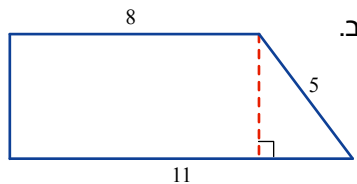
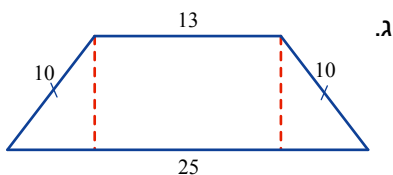
$$S = \frac{(a + b) \cdot h}{2}$$

אורך הבסיס הגדול a , אורך הבסיס הקטן b , אורך הגובה h .
($a > 0$, $b > 0$, $h > 0$, יחידות אורך).

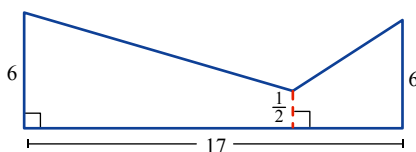


הוכיחו את הטענה, היעזרו בחישוב שטחי המשולשים בשרטוט.

2. בכל סעיף חשבו את השטח ואת ההיקף של הטרפז.

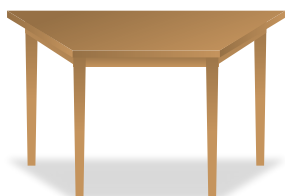


3. חשבו את שטח הצורה הבאה.





4. בציר שולחן שצורתו טרפז שווה-שוקיים, ובו אורך הבסיס הקטן שווה לאורך השוק, ואורך הבסיס הגדול הוא פי 2 מאורך הבסיס הקטן.



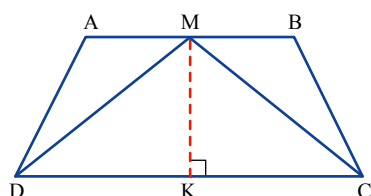
א. שרטטו את הטרפז.

ב. מהם הגדלים של זוויות הטרפז?

ג. מדוע, לדעתכם, מייצרים שולחנות שהם בעלי צורה זאת?

ד. נתון גם שאורך השוק 80 ס"מ.

מצאו את השטח ואת ההיקף של לוח השולחן.



5. נתון/ ABCD טרפז

M אמצע הבסיס הקטן, K אמצע הבסיס הגדול,

$MK \perp DC$

א. $DM = CM$

ב. נתון גם שטח $\triangle MKC$ הוא פי 2 משטח $\triangle MBC$.

פי כמה ארוך הבסיס הגדול מהבסיס הקטן?

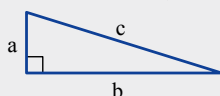
חשבו את שטח הטרפז אם ידוע כי שטח $\triangle MBC$ הוא 5 סמ"ר.

למשפט פיתגורס התפרסמו הוכחות רבות. ייתכן שזהו המשפט המתמטי בעל מספר ההוכחות הרב ביותר. באינטרנט תוכלו למצוא מאות הוכחות שונות למשפט פיתגורס.



נוכיח מחדש את משפט פיתגורס בעזרת שטח של טרפז ישר-זווית.

את ההוכחה הזו כתב הנשיא ה-20 של ארה"ב, ג'יימס גרפילד (Garfield).



א. נתון משולש ישר-זווית.

כתבו מה נתון ומה צריך להוכיח.

ב. מניחים שני משולשים ישרי זווית חופפים ומחברים את הקדקודים, כך:

איזה סוג של משולש נוצר בין שני המשולשים? הוכיחו.

איזה מרובע נוצר משלושת המשולשים? הוכיחו.

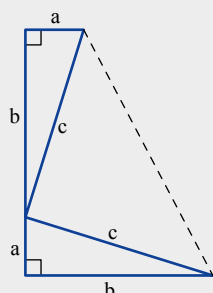
ג. חשבו את שטח הטרפז בשתי דרכים:

(1) לפי נוסחת שטח טרפז

(2) לפי סכום שטחי שלושת המשולשים המרכיבים את הטרפז

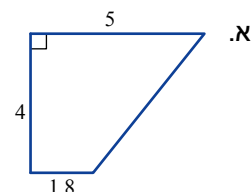
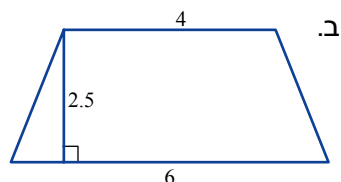
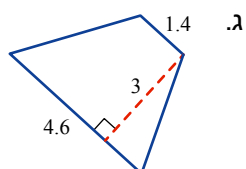
ד. השוו בין שני חישובי השטח שכתבתם. פשטו את המשוואה שקיבלתם.

האם הוכחתם את משפט פיתגורס?

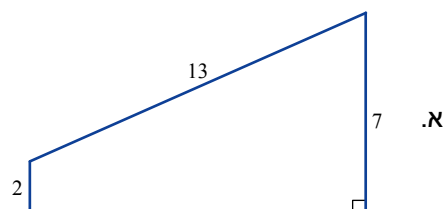
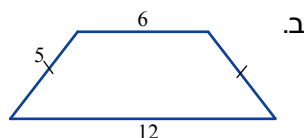




1. בכל סעיף חשבו את שטח הטרפז.



2. בכל סעיף חשבו את שטח הטרפז ואת היקף הטרפז.



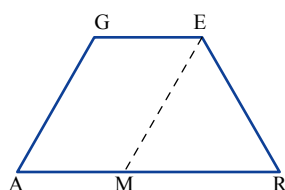
3. המרובע GERA הוא טרפז שווה-שוקיים ($GE \parallel AR$)

$\angle A = 60^\circ$, $GA \parallel EM$

א. חשבו את הגדלים של זוויות הטרפז ואת הגדלים של זוויות המשולש.

ב. נתון גם: $GA = 6$ ס"מ, $GE = 4$ ס"מ

חשבו את היקף הטרפז.



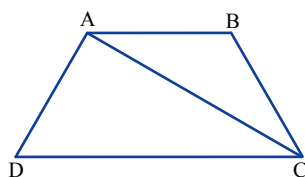
4. הטרפז ABCD שווה-שוקיים ($AB \parallel DC$, $BC = AD$)

AC חוצה זווית C

$DA = 10$ ס"מ, $DC = 22$ ס"מ

א. חשבו את היקף הטרפז.

ב. חשבו את שטח הטרפז.



5. הטרפז ABCD שווה-שוקיים ($AB \parallel DC$)

משולש BCE שווה-שוקיים שבו:

אורך הבסיס 6 ס"מ ואורך כל שוק 5 ס"מ

א. חשבו את שטח המשולש.

ב. חשבו את שטח הטרפז.

ג. פי כמה גדול שטח הטרפז משטח המשולש?

ד. האם אפשר להכניס לטרפז מספר שלם של משולשים כמו המשולש הנתון? הסבירו.

