



יחידה 12: הגדרות, משפטים והוכחות

שיעור 1. מושגים והגדרות

בעבר הגדרנו מושגים רבים:
זוויות צמודות, זוויות קדקודיות, חפיפה של מצולעים, דמיון של מצולעים ועוד.

נדון בשאלות מהי הגדרה, וכיצד מגדירים מושג במתמטיקה.

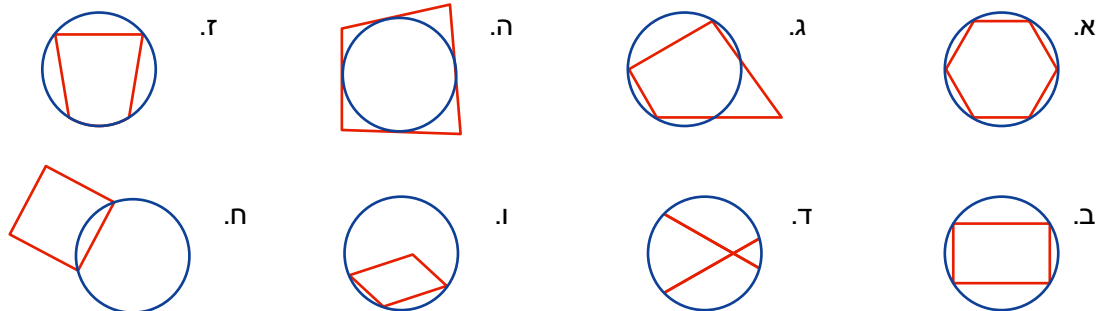
מהי הגדרה?

1. כדי להדגים מהי הגדרה, נמציא מושג שאינו מוכר במתמטיקה ונגדיר אותו.

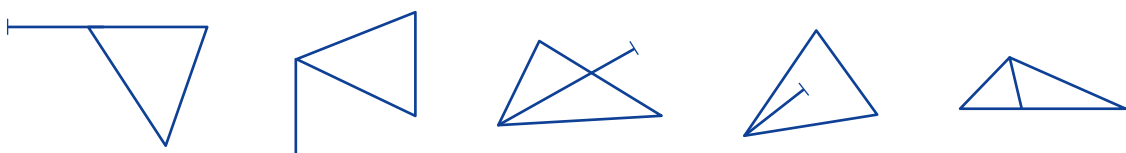
הגדרה: "חסומון" הוא מצולע שכל קדקודיו נמצאים על מעגל.

- על אילו מושגים מבוססת ההגדרה?

- קבעו לכל אחת מהצורות הבאות אם היא "חסומון".

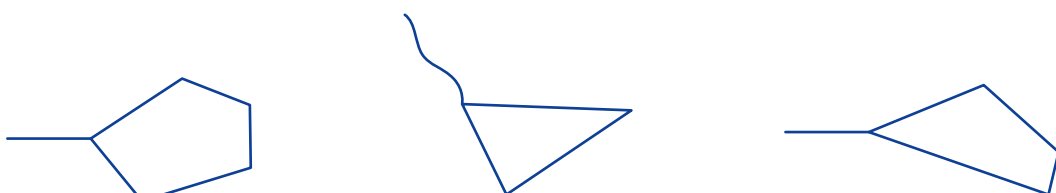


2. לפניכם שרטוטים של "זנב-שולשים".



א. נסו להגדיר "זנב-שולש".

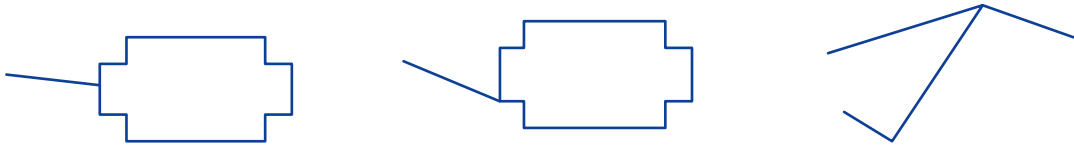
ב. לפניכם שרטוטים נוספים של "זנב-שולשים".



נסו לנסח הגדרה שתתאים גם לשרטוטים אלה.

3. נתייחס למושג "זנב-שולש" שהגדרתם במשימה 2.

א. לפניכם שרטוטים נוספים. אילו מהם מתאימים להגדרה שרשמתם?



ב. האם אפשר להגדיר "זנב-שולש" באמצעות שרטוטים? הסבירו.



הגדרה מתארת במילים **מושג חדש** על-סמך **מושגים קודמים**. מתמטיקאים מגדירים מושג חדש באמצעות מספר **קטן ככל האפשר** של מושגים קודמים שיכולים להגדיר את המושג. כשמגדירים על-סמך שרטוטים בלבד, מתקבלות הגדרות שונות. לכן אי-אפשר להגדיר מושגים על-סמך שרטוטים בלבד.

כיצד מגדירים?

4. הסבירו מדוע ההיגד הרשום אינו הגדרה של המושג.

א. זווית ישרה היא זווית צמודה לזווית ישרה.

ב. זווית קהה היא זווית שאינה זווית ישרה.

ג. ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.



5. א. בעבר תיארנו **זווית** כך: שתי **קרניים** היוצאות מ**נקודה** אחת יוצרות **זווית**.

על אילו מושגים מבוסס תיאור הזווית?

ב. אפשר להגדיר **קו** כך: חלק הישר המתחיל ב**נקודה** נקרא **קו**.

על אילו מושגים מבוססת הגדרת ה**קו**?

ג. **יעל** ניסתה להגדיר **ישר** כך: **ישר** הוא קו אינסופי. אין לו עובי והוא רצוף.

שרטטו קו המתאים לתיאור של **יעל** ואינו ישר.



מגדירים מושגים באמצעות מושגים שהוגדרו קודם.

השרשרת הזו צריכה להתחיל מ**מושגים ראשוניים** שאינם מבוססים על מושגים שהוגדרו קודם, ואותם מקבלים ללא הגדרה.

מחלקה: נקודה וישר הם **מושגים ראשוניים**.

יש הסוברים שהמילה **הגדרה** נגזרת מהמילה **גדר** כלומר, **ההגדרה** יוצרת גדר כדי לתחום מושג חדש באמצעות מושגים ידועים.

6. קבעו אם הרשום בכל אחד מהסעיפים יכול להגדיר **ריבוע**. הסבירו.



א. צורה הבנויה מארבעה קטעים שווים באורכם.

ב. מרובע שכל זוויותיו שוות בגודלן.

ג. מרובע שכל זוויותיו ישרות.

ד. מרובע שכל צלעותיו שוות באורכן וכל זוויותיו שוות בגודלן.

ה. מרובע שהאלכסון מחלק אותו לשני משולשים ישרי-זווית חופפים.



אוסף משימות



1. קשמו הגדרה לכל צורה.

א. משולש שווה-שוקיים.

ב. חוצה זווית.

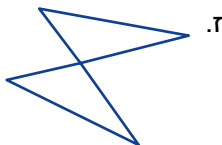
ג. גובה במשולש.

ד. זוויות מתחלפות בין שני ישרים וישר שלישי החותך אותם.



2. הגדירו מרובע.

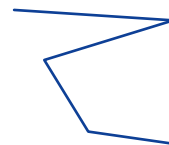
קבעו אילו מהצורות הבאות מתאימות להגדרה שרשמתם?



ז.



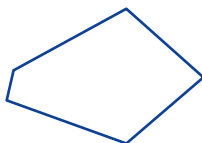
ה.



ג.



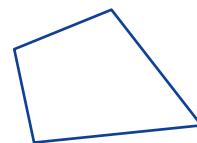
א.



ח.



ו.



ד.



ב.



3. סמנו טענות נכונות והסבירו.

א. הגדרה היא תיאור של מושג חדש בעזרת מושגים קודמים.

ב. בהגדרה אין להשתמש במושג עצמו.

ג. שרטוטים של דוגמאות יכולים לשמש כהגדרה של צורה.

ד. כשמגדירים קבוצה של צורות, אין להשתמש בצורות שמקיימות את ההגדרה ואינן שייכות לקבוצת הצורות.

ה. כשמגדירים קבוצה של צורות, אין להשתמש בצורות שאינן מקיימות את ההגדרה ושייכות לקבוצת הצורות.



4. קבעו אם הרשום בכל אחד מהסעיפים יכול להגדיר מלבן. הסבירו.
- מרובע ששלוש מזוויותיו ישרות.
 - מרובע ששלוש מזוויותיו שוות בגודלן.
 - מרובע שכל זוויותיו שוות בגודלן.
 - מרובע שצלעותיו הנגדיות מקבילות.
 - מרובע שהאלכסון מחלק אותו לשני משולשים ישרי זווית חופפים.



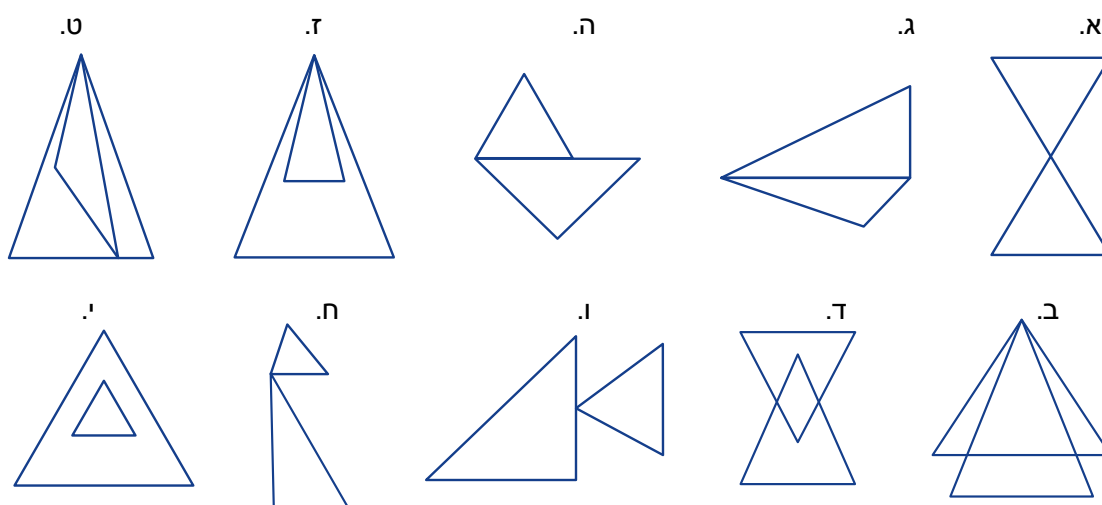
5. הסבירו מדוע הרשום בכל אחד מהסעיפים הבאים אינו הגדרה של המושג המודגש.
- זוויות צמודות הן זוויות שיש להן שוק משותפת.
 - זווית קדקודיות הן זוויות שיש להן קדקוד משותף.
 - זווית חיצונית למשולש היא זווית שאחת משוקיה היא צלע של המשולש.
 - תיכון במשולש הוא קטע החוצה אחת מצלעות המשולש.



6. תיקנו את הגדרות המושגים שבמשימה 5.



7. הגדרה: צורה הבנויה משני משולשים שיש להם רק נקודה אחת משותפת נקראת **דו-שלש**. אילו מהצורות הבאות הן דו-שלשים?





שיעור 2. מהו משפט במתמטיקה?

במהלך לימוד גאומטריה ניסחנו משפטים (משפטי חפיפה, משפט דמיון, ועוד), אך עדיין לא דנו בשאלה מהו **משפט במתמטיקה**.
 בכל סעיף בדקו אם אפשר לשאול "נכון" או "לא נכון".
 א. סכום הזוויות במרובע הוא 360° .
 ב. ספר גאומטריה לכיתה ט.
 ג. מספר האלכסונים במצולע שווה למספר הצלעות שלו.

נדון בשאלה מהו משפט במתמטיקה, ונבחין בין משפט במתמטיקה למשפט בשפה המדוברת.

מהו משפט?

- קבעו בכל סעיף אם אפשר לשאול לגבי הביטוי הרשום "נכון" או "לא נכון".
 א. כשירד גשם, יש עננים בשמים.
 ב. במשולש כל הזוויות שוות בגודלן.
 ג. במחומש יש 5 אלכסונים.
 ד. מתמטיקה משולבת כיתה ט חלק א.
 ה. מה סכום הזוויות במרובע?
 ו. משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.



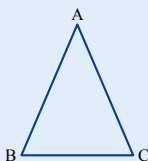
- טענה במתמטיקה בנויה **מנתונים ומסקנות**, לכן אפשר לשאול אם היא "נכונה" או "אינה נכונה", כלומר אם המסקנות נובעות מהנתונים או לא.
- כל טענה במתמטיקה ניתנת לניסוח באמצעות המילים "אם-אז" המפרידות בין הנתונים למסקנות.
- מל/ז**: אם המצולע הוא מחומש, אז מספר אלכסוניו שווה למספר צלעותיו.
- טענה נכונה נקראת **משפט**.

- נסחו בעזרת "אם-אז" את הטענות ממשימה 1 (שעבורן אפשר לשאול "נכון" או "לא נכון").

נתונים ומסקנות



- שרטטו ורשמו את הנתון והמסקנה בכתיב מתמטי.



מל/ז: אם המשולש שווה-שוקיים, אז זוויות הבסיס שוות בגודלן.

$$AB = AC \quad \text{נתון}$$

$$\angle B = \angle C \quad \text{מסקנה}$$

- אם במשולש ABC הזווית A קהה, אז שתי הזוויות האחרות חדות.
- אם במשולש שלוש הזוויות שוות בגודלן, אז המשולש שווה-צלעות.

4. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים והסבירו.

- | | | |
|------------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| א. $\angle$ דינה נמוכה מרחל. | ב. $\angle$ יוסי נמוך מדני. | ג. $\angle$ ישר a חותך את ישר b. |
| נסקנה | נסקנה | נסקנה |
| נועם נמוך מדינה. | רחל נמוכה מדני. | ישר b חותך את ישר c. |
| נסקנה | נסקנה | נסקנה |
| נועם נמוך מרחל. | רחל נמוכה מיוסי. | ישר c חותך את ישר a. |

5. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.

- אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה נגדית (דוגמה שבה המסקנה אינה מתקיימת אף כי הנתונים מתקיימים).
- א. אם מחלקים זווית חדה לשתי זוויות שוות בגודלן, אז כל אחת מהן קטנה מ- 45° .
- ב. אם שתי זוויות במשולש חדות, אז הזווית השלישית קהה.
- ג. זווית צמודה לזווית חדה היא זווית-קהה.

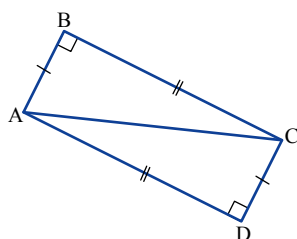


תזכורת

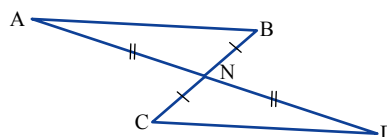
- **חפיפה על פי צלע-זווית-צלע:** אם שתי צלעות במשולש אחד שוות באורכן לשתי צלעות במשולש אחר, וגם הזוויות הכלואות בין הצלעות האלה שוות בגודלן, אז המשולשים חופפים. (צ.ז.צ.)
- **חפיפה על פי זווית-צלע-זווית:** אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בגודלן לשתי זוויות במשולש אחר, וגם הצלעות הנמצאות בין הזוויות האלה שוות באורכן, אז המשולשים חופפים. (ז.צ.ז.)
- **חפיפה על פי צלע-צלע-צלע:** אם שלוש צלעות במשולש אחד שוות באורכן לשלוש צלעות במשולש אחר, אז שני המשולשים חופפים. (צ.צ.צ.)
- **חפיפה לפי ניצב ויתר:** אם שני משולשים ישרי-זווית שווים באורכי אחד הניצבים והיתר, אז המשולשים חופפים.

6. בכל סעיף אפשר להסיק מהנתונים המסומנים כי המשולשים חופפים.

רשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי וציינו על-סמך איזה משפט אפשר להסיק את החפיפה.



ב.



א.

7. בכל סעיף שרטטו, נסחו את הטענה בעזרת "אם-אז", רשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי והסבירו מדוע הטענה נכונה.

- א. במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות בגודלן.
- ב. במשולש שווה-שוקיים התיכון לבסיס חוצה את זווית הראש.



1. נסחו את הטענות הבאות באמצעות "אם-אז".

- א. כשחם צריך לשתות הרבה.
- ב. אם אין כדור לא ניתן לשחק כדורגל.
- ג. בחורף יורד גשם.
- ד. כל הילדים מעל גיל 6 חייבים ללכת לבית הספר.
- ה. תלמיד שאינו מכין שיעורי בית במתמטיקה נכשל במבחן.
- ו. משולש שבו יש שתי זוויות חדות הוא משולש חד-זוויות.

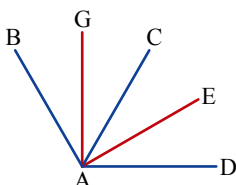
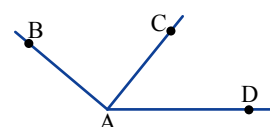
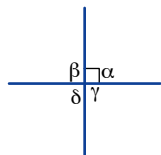


2. בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.

- אם כן, הסבירו. אם לא, תנו דוגמה נגדית (דוגמה המראה שהטענה אינה נכונה).
- א. אם סכום הגדלים של שתי זוויות הוא 180° , אז הן זוויות צמודות.
- ב. אם זוויות בעלות קדקוד משותף שוות בגודלן, אז הן זוויות קדקודיות.
- ג. אם מחלקים זווית קהה לשלוש זוויות שוות בגודלן, אז כל אחת מהן קטנה מ- 60° וגדולה מ- 30° .
- ד. אם זוויות בעלות קדקוד משותף שונות בגודלן, אז הן אינן זוויות קדקודיות.



3. בכל סעיף, רשמו את הנתונים והמסקנה בכתוב מתמטי והסבירו מדוע המשפט נכון.



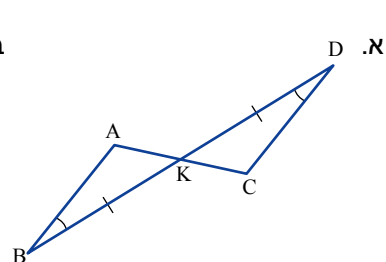
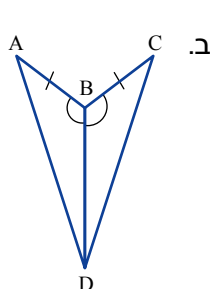
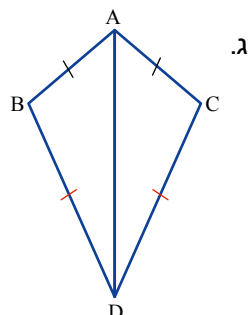
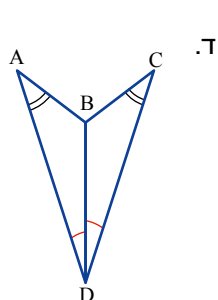
- א. אם אחת הזוויות בין שני ישרים נחתכים היא ישרה, אז גם שלוש הזוויות האחרות ישרות.
- ב. אם AC חוצה את הזווית הקהה $\angle BAD$, אז $\angle CAD$ גדולה מ- 45° .

- ג. אם AC חוצה את הזווית הקהה $\angle BAD$, ו- AG חוצה את $\angle BAC$, ו- AE חוצה את $\angle CAD$, אז $\angle GAE$ היא זווית חדה.



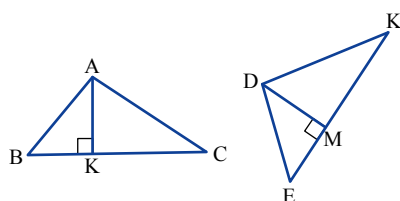
4. בכל סעיף אפשר להסיק מהנתונים המסומנים, כי יש זוג משולשים חופפים.

רשמו את הנתונים ואת המסקנה בכתוב מתמטי וציינו על-סמך איזה משפט אפשר להסיק את החפיפה.





5. קְשִׁמוּ אֶת הַנִּתּוּנִים וְהַמְסַקְנָה בְּכֵתִיב מִתְמַטִּי וְהִסְבִּירוּ מִדּוּעַ הַמִּשְׁפָּט נִכּוֹן.



א. אם שני משולשים חופפים, אז אורכי הגבהים לצלעות המתאימות שווים.

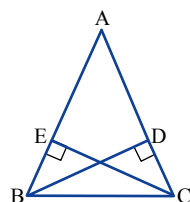
ב. אם שני משולשים חופפים, אז השטחים שלהם שווים.



6. בכל סעיף שרטטו, נסחו את הטענה בעזרת "אם-אז", קְשִׁמוּ אֶת הַנִּתּוּנִים וְהַמְסַקְנָה בְּכֵתִיב מִתְמַטִּי וְהִסְבִּירוּ מִדּוּעַ הַטִּעְנָה נִכּוֹנָה.

א. במשולש שווה-שוקיים הגובה לבסיס חוצה את זווית הראש.

ב. במשולש שווה-שוקיים, הגובה לבסיס הוא גם תיכון.



7. BD ו-CE הם גבהים לשוקיים במשולש שווה-שוקיים ABC.

א. קְשִׁמוּ אֶת הַנִּתּוּנִים וְהַמְסַקְנָה בְּכֵתִיב מִתְמַטִּי.

ב. הִסְבִּירוּ מִדּוּעַ $\triangle EBC \cong \triangle DCB$.

ג. הִסְבִּירוּ מִדּוּעַ $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.



8. נתון כי כל החתולים ששמן **שחורי** הם שחורים.

א. החתול של נחמה שחור. האם אפשר להסיק מהנתון ששמו **שחורי**?

ב. החתול של רוחמה איננו שחור. האם אפשר להסיק מהנתון ששמו איננו **שחורי**?



9. נתון כי כלב נובח אינו נושך. כמו כן, נתון כי כלב שבע אינו נובח.

איזו מהמסקנות הבאות נכונה?

א. כלב שבע אינו נושך.

ב. כלב שאינו נובח שבע.

ג. כלב נובח אינו שבע.

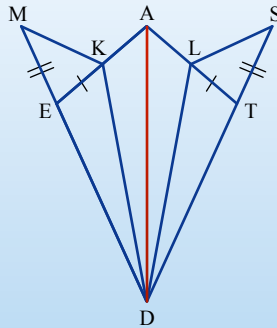
ד. כלב נושך אינו שבע.



שיעור 3. שרשרות של הוכחות



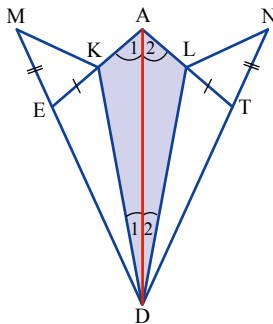
בשרטוט שלפניכם AD חוצה את הזווית A ואת הזווית KDL.
נתונים נוספים מסומנים בשרטוט. (קטעים שווים באורכם מסומנים באותו סימון).
כמה זוגות של משולשים חופפים בשרטוט?



זהה משולשים חופפים, נוכיח ונסיק מסקנות.

במשימות 1 - 4 נתייחס לשרטוט במשימת הפתיחה.

1. רשמו בכתב מתמטי את כל זוגות המשולשים החופפים שמצאתם: $\Delta \text{---} \cong \Delta \text{---}$.
הקפידו על רישום הקדקודים בהתאמה.



2. העתיקו את השרטוט.

AD חוצה את הזוויות A ו-D במרובע AKDL.
נוכיח כי משולש AKD חופף למשולש ALD.

א. העתיקו והשלימו מה נתון ומה צריך להוכיח.

$\angle A_1 = \angle \text{---}$ נתון

$\angle D_1 = \angle \text{---}$

$\Delta AKD \cong \Delta \text{---}$ צ"ל

ב. העתיקו, הוסיפו שני שוויונות, והשלימו את ההוכחה.

נימוק	תנאי
נתון	$\angle A_1 = \angle A_2$
_____	_____
_____	_____
	$\Downarrow$
_____	$\Delta AKD \cong \Delta \text{---}$ לפי משפט _____

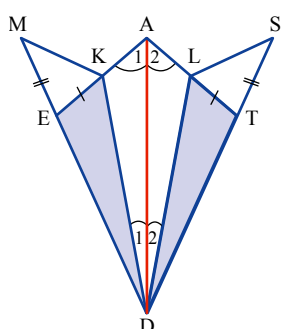
$KD = LD$ מסקנה ג.
 $AK = AL$ נמקו.

ד. האם מצאתם מסקנה נוספת מחפיפת המשולשים? אם כן, מהי?

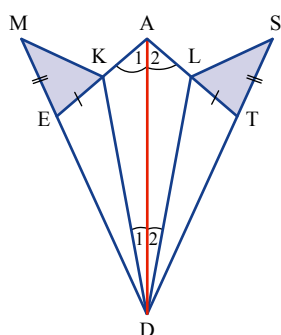


נוהגים לרשום הוכחה כך:

- רושמים נתונים.
- רושמים מה שצריך להוכיח (צ"ל).
- רושמים את שלבי ההוכחה ומציינים ליד כל שלב נימוקים המצדיקים אותו.
- רושמים את המסקנה ומנמקים.



3. א. רשמו שלושה תנאים המוכיחים כי $\triangle TLD \cong \triangle EKD$
(היעזרו במסקנה מהחפיפה במשימה 2.)

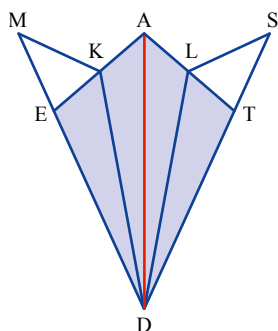


ב. הוכיחו: $\triangle SLT \cong \triangle MKE$

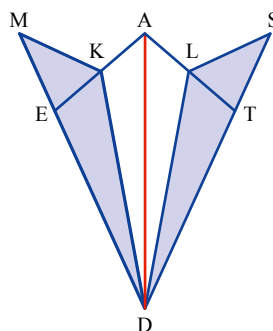


4. הוכיחו את החפיפה של זוגות משולשים נוספים.
(היעזרו במסקנות מהחפיפות שהוכחתם.)

ב. $\triangle ATD \cong \triangle AED$



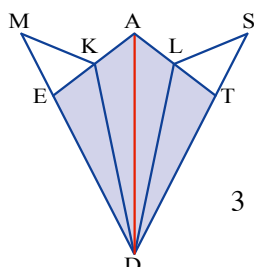
א. $\triangle SLD \cong \triangle MKD$





במשימות הקודמות יצרנו שרשרת של הוכחות שבה כל הוכחה, החל מההוכחה השנייה, מבוססת על מסקנות מההוכחות הקודמות.

מטלה: נוכיח את החפיפה של המשולשים ATD ו-AED ממשימה 4.



נימוק

נתון

צלע משותפת בשני המשולשים

נובע מחפיפת המשולשים במשימה 3

תנאי

$$\angle EAD = \angle TAD$$

$$AD = AD$$

$$\angle EDA = \angle TDA$$

$\Downarrow$

$$\triangle ATD \cong \triangle AKD \text{ לפי משפט ז.צ.ז.}$$

הנחות יסוד



בגאומטריה יוצרים שרשרות של משפטים שבהם מוכיחים כל משפט על-סמך משפטים ומסקנות קודמים. מתחילים את השרשרת מהנחות שעבורן אין משפטים קודמים. הנחות כאלה נקראות **הנחות יסוד** (אכסיומות). בעבר השתמשנו בהנחות כאלה כמובנות מאליהן בלי לציין במפורש.

מטלה: **הנחת יסוד:** בין כל שתי נקודות עובר קו ישר יחיד.



5. טענה: שלוש נקודות שאינן על ישר אחד הן קדקודים של משולש **יחיד**.

א. הוכיחו את הטענה על-סמך הנחת היסוד שבמסגרת.

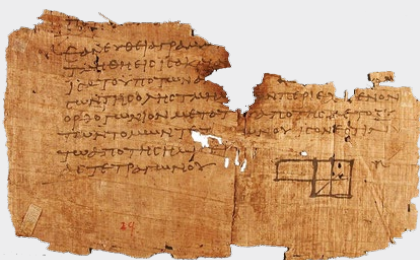
ב. העתיקו את ארבע הנקודות פעמיים, ושרטטו שני מרובעים **שונים** שקדקודיהם A, B, C, D.



ג. **סייון** אמרה: ארבע נקודות שאף שלוש מהן אינן על ישר אחד הן קדקודים של מרובע יחיד.

האם הטענה נכונה? הסבירו.

ד. כמה מרובעים שונים שקדקודיהם בארבע הנקודות המשרטטות בסעיף ב, אפשר לשרטט?



אוקלידס, המכונה "אבי הגאומטריה", היה מתמטיקאי יווני שחי לפני כ- 2,300 שנה וחיבר סדרה של 13 ספרים בשם "יסודות".



בספרים אלה אוקלידס סיכם, ערך וסידר את הידע המתמטי שנצבר עד לאותה תקופה בתחומים הקשורים לגאומטריה ולתכונות של מספרים.

תרומתו הגדולה של אוקלידס הייתה בביסוס **המבנה הדדוקטיבי** במתמטיקה.

המבנה הדדוקטיבי מבוסס על הוכחת טענות באמצעות טענות קודמות, אשר הוכחו על-ידי הטענות שקדמו להן, וכך עד להנחות היסוד.

הרחבת המבנה הדדוקטיבי מתבצעת על-ידי ניסוח משפטים שנכונותם נקבעת בהסתמך על המערכת הבסיסית ועל משפטים שהוכחו קודם.



אוסף משימות



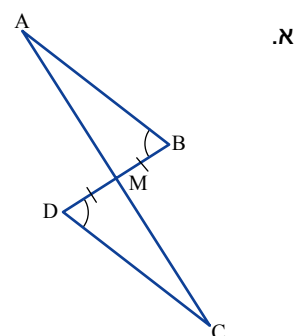
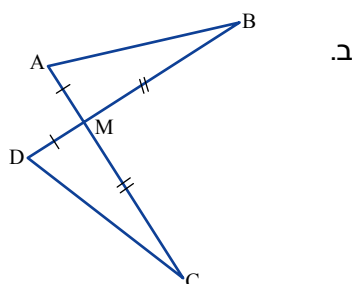
1. בכל שרטוט מסומנים נתונים.

העתיקו את השרטוט.

רשמו בכתב מתמטי את הנתונים ומה צריך להוכיח.

הוכיחו כי המשולשים חופפים.

ציינו על איזה משפט מבוססת המסקנה.



2. AC הוא אלכסון במרובע ABCD שכל צלעותיו שוות באורכן.

א. רשמו את הנתונים בכתב מתמטי.

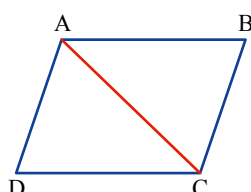
הוכיחו: $\triangle ADC \cong \triangle ABC$

נמקו את המסקנה: $\angle BAC = \angle DAC$

ב. שרטטו את האלכסון BD וסמנו את נקודת החיתוך של האלכסונים באת M.

הוכיחו: $\triangle AMB \cong \triangle AMD$ (היעזרו במה שהוכחתם בסעיף א.)

הוכיחו: $AM \perp BD$

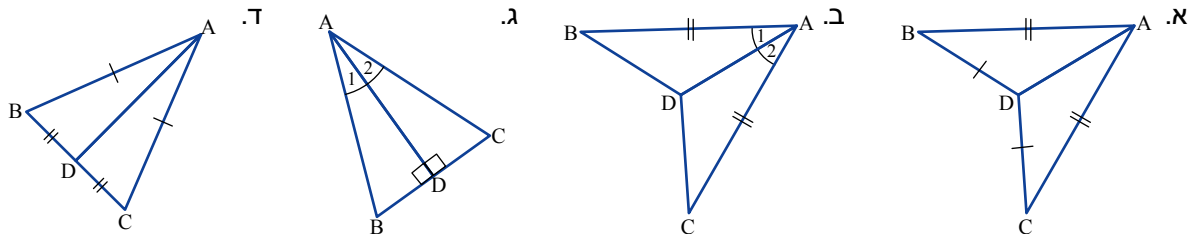




3. לפי הנתונים המסומנים בשרטוט המשולשים חופפים.

רשמו את הנתונים והמסקנה בכתיב מתמטי.

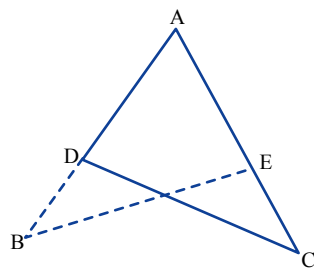
ציינו על איזה משפט חפיפה מבוססת המסקנה.



4. נתון $AB = AC$

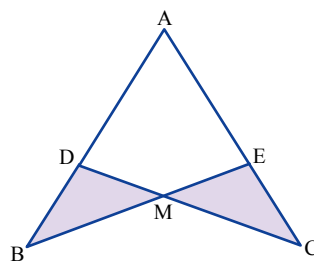
$\angle B = \angle C$

א. הוכיחו: $\triangle ABE \cong \triangle ACD$



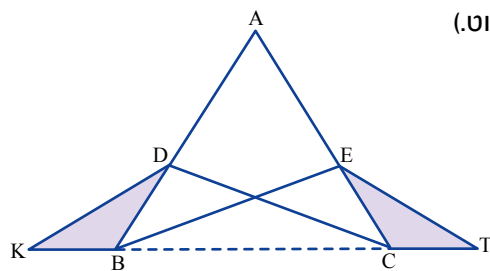
ב. הוכיחו: $\triangle EMC \cong \triangle DMB$

(היעזרו במסקנות מהחפיפה שהוכחתם בסעיף א.)



ג. שרטטו שני קטעים שווים באורכם: $CT = BK$ (ראו שרטוט).

הוכיחו: $\triangle ECT \cong \triangle DBK$



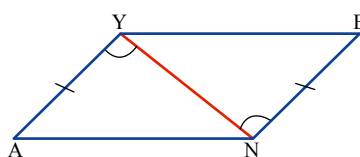
5. במרובע YENA מסומנים נתונים.

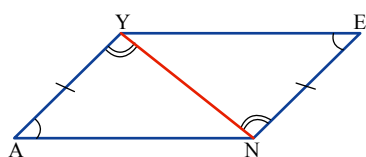
המשולשים חופפים.

א. רשמו את הנתונים ואת המסקנה בכתיב מתמטי.

ב. הוכיחו את החפיפה.

ג. נמקו מדוע $\angle A$ שווה בגודלה לזווית $\angle E$





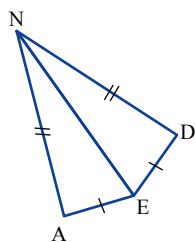
6. במרובע YENA מסומנים נתונים.

מסקנה המשולשים חופפים.

א. רשמו את הנתונים ואת המסקנה בכתוב מתמטי.

ב. הוכיחו את החפיפה.

ג. רשמו מסקנה לגבי זוגות של צלעות שוות באורכן במרובע YENA ונמקו.

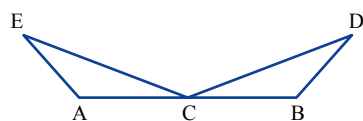


7. במרובע EDNA שני זוגות של צלעות שוות באורכן, כמסומן בשרטוט.

א. רשמו את הנתונים בכתוב מתמטי.

ב. הוכיחו: $\triangle NDE \cong \triangle NAE$

ג. הוכיחו: NE חוצה שתי זוויות נגדיות במרובע.



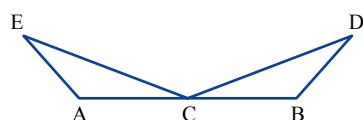
8. א. $EA = DB$ נתון.

$\angle A = \angle B$

העתיקו וסמנו את הנתונים בשרטוט.

האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית (דוגמה המראה שהנתונים אינם מספיקים).



ב. $EA = DB$ נתון.

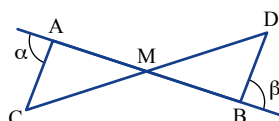
$\angle A = \angle B$

C אמצע AB

העתיקו וסמנו את הנתונים בשרטוט.

האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים?

אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



9. נתון M אמצע הקטע AB.

$\beta = \alpha$

הוכיחו:

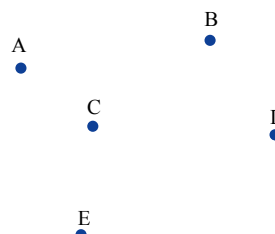
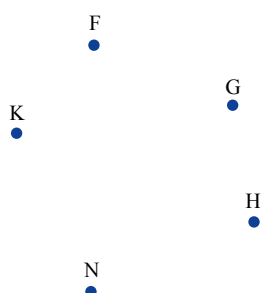
א. $\triangle AMC \cong \triangle BMD$

ב. $MC = MD$



10. א. כמה מחומשים שונים שקדקודיהם
בנקודות A, B, C, D, E אפשר לשרטט?

ב. כמה מחומשים שונים שקדקודיהם
בנקודות F, G, H, K, N אפשר לשרטט?
הסבירו.



11. לפניהם "הוכחה חזותית" המראה כי: $65 = 64$.

מצאו את הטעות.

שטח הריבוע שבשרטוט א משבצות $8 \times 8 = 64$

העתיקו את הריבוע על דף משבצות.

גזרו את ארבעת החלקים (I, II, III, IV) והניחו אותם כמשורטט בשרטוט ב.

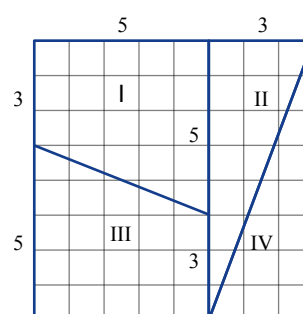
השטח המורכב מחלקים I ו-II: משבצות $32.5 = \frac{13 \cdot 5}{2}$

השטח המורכב מחלקים III ו-IV גם הוא 32.5 משבצות.

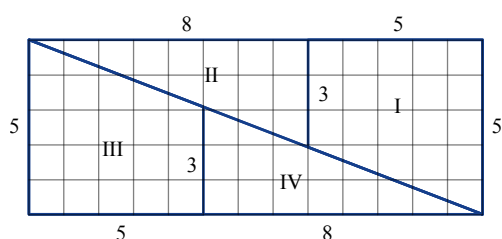
לכן שטח כל ארבעת החלקים יחד הוא 65 משבצות.

הייתכן?

שרטוט א



שרטוט ב



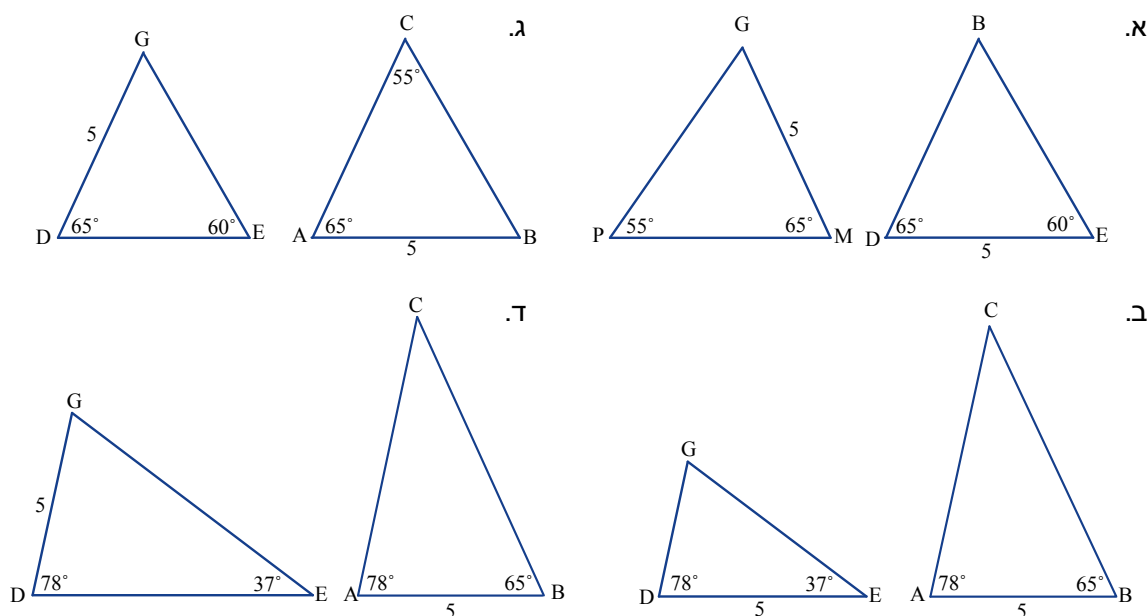
שיעור 4. לשם מה צריך הוכחות?

שערו: האם ייתכן שארבעה גדלים (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) במשולש אחד, יהיו שווים לארבעה גדלים (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) במשולש אחר, ולמרות זאת המשולשים לא יהיו חופפים?

נלמד את הצורך בהוכחות.

במשימות בשיעור ובאוסף המשימות השרטוטים הם להדגמה, ומידות האורך נתונות בס"מ.

1. חשבו את גודל הזווית השלישית בכל משולש וקבעו אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים. אם כן, רשמו על-סמך איזה משפט. אם לא, הסבירו.



2. כמה נתונים שווים יש בכל זוג משולשים במשימה 1? האם ייתכן שארבעה גדלים במשולש אחד (אורך צלע וגדלים של 3 זוויות), יהיו שווים לארבעה גדלים במשולש אחר (אורך צלע וגדלים של 3 זוויות), ולמרות זאת המשולשים לא יהיו חופפים? הסבירו.



הנימוקים בגאומטריה מבוססים על משפטים שנלמדו קודם. במשימה 1 הסתמכנו על משפט חפיפה ז.צ.ז. תוך כדי הקפדה על מיקום הזוויות המתאימות בשני המשולשים (הצלעות השוות באורכן צריכות להימצא בין הזוויות השוות בגודלן).



תזכורת

במשולשים דומים כל הזוויות שוות בגודלן, בהתאמה, וקיים יחס בין אורכי צלעות מתאימות.

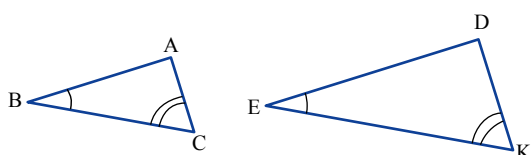
מסמנים דמיון באמצעות הסימן ~

אם בשני משולשים שני זוגות של זוויות שוות בגודלן, אז המשולשים דומים.

ענן

נניח: $\triangle ABC \sim \triangle DEK$ כי $\angle B = \angle E$

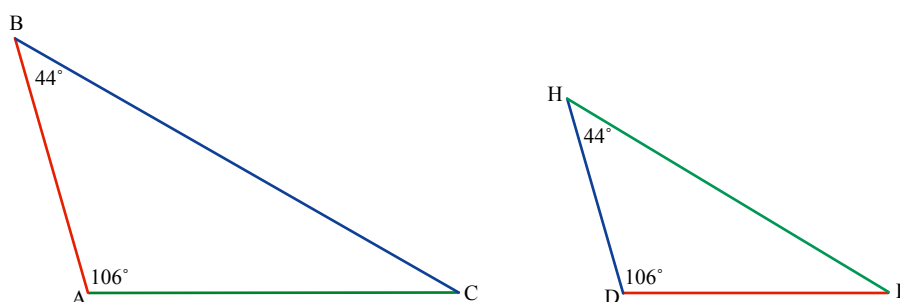
$\angle C = \angle K$



3. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו את הפעילות "חמישה גדלים שווים". בפעילות תחקרו את השאלה: האם ייתכן שחמישה גדלים (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) במשולש אחד יהיו שווים לחמישה גדלים במשולש אחר, והמשולשים לא יהיו חופפים? בצעו את הפעילות לפי ההוראות.



4. א. מדדו ומצאו בשני המשולשים זוגות של זוויות השוות בגודלן.



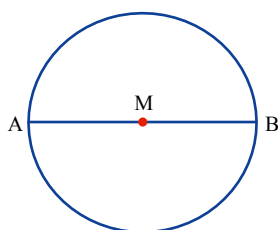
ב. מדדו את אורכי הצלעות הצבועות באדום ואת אורכי הצלעות הצבועות בירוק בשני המשולשים. מה מצאתם? כמה גדלים שווים (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) יש בשני המשולשים? האם המשולשים חופפים? האם המשולשים דומים? נמקו.

ג. האם ייתכן שחמישה גדלים במשולש אחד (אורכי צלעות וגדלים של זוויות), יהיו שווים לחמישה גדלים במשולש אחר (אורכי צלעות וגדלים של זוויות), ושהמשולשים לא יהיו חופפים? הסבירו.

5. האם ייתכן ששישה גדלים במשולש אחד, (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) יהיו שווים לשישה גדלים במשולש אחר (אורכי צלעות וגדלים של זוויות), ולמרות זאת המשולשים לא יהיו חופפים? הסבירו.



6. באתר "מתמטיקה משולבת", במדור "פעילויות באמצעות מחשב", תמצאו את הפעילות "זווית נשענת על קוטר". בפעילות תחקרו מה יכול להיות גודלה של זווית שקדקודה על המעגל ושוקיה עוברים דרך קצות הקוטר. בצעו את הפעילות על-פי ההוראות.



7. שרטטו מעגל שמרכזו M ושרטטו קוטר BA.

א. נסו לשרטט באמצעות מד-זווית זווית שגודלה 110° קדקודה על המעגל ושוקיה עוברות דרך A ו-B.

ב. נסו לשרטט באמצעות מד-זווית זווית חדה שקדקודה על המעגל ושוקיה עוברות דרך A ו-B.

ג. שער: מה יכול להיות גודלן של זוויות שקדקודן על המעגל ושוקיהן עוברות דרך A ו-B?

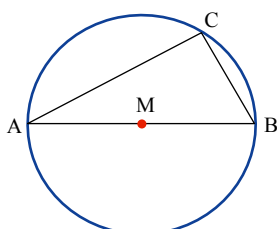
ד. סמנו נקודה P על המעגל, חברו את הנקודה P עם A ו-B, מדדו את הזווית.

ה. שרטטו זווית נוספת כזו ומדדו אותה.

ו. אם יש צורך, תקנו את השערתכם בסעיף ג.



תזכורת: במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות בגודלן.



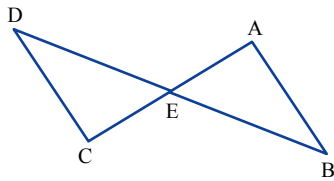
8. **יעל** אמרה: זווית שקדקודה על מעגל ושוקיה עוברות דרך קצות קוטר, היא תמיד זווית ישרה.

כדי להשתכנע ולהסביר **מדוע** הטענה של **יעל** תמיד נכונה, יש להוכיח אותה. העתיקו את השרטוט וחברו את CM. הוכיחו את השערתכם.



השערות אינטואיטיביות אינן בהכרח נכונות.

רק הוכחה מאפשרת **להצדיק ולהסביר** תוצאות העשויות להיראות מפתיעות.



9. א. $\angle B = \angle D$ נכון

$AB = CD$

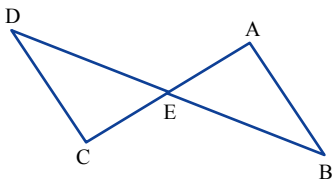
$\triangle ABE \cong \triangle CDE$ נכון

העתיקו את התרשים והשלימו משפט חפיפה מתאים.



ב. $AE = CE$ נכון

$CD = AB$



רשמו שלושה גדלים שווים בשני המשולשים.
האם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים? **הסבירו**.
אם כן, הוכיחו.
אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



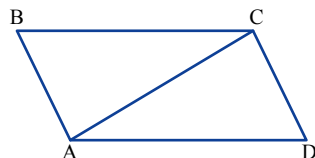
אוסף משימות



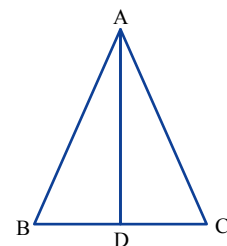
1. בכל סעיף הצורה מחולקת על-ידי קו פנימי לשני משולשים.
רשמו גדלים שווים (אורכי צלעות וגדלים של זוויות) בשני המשולשים.
קבעו אם אפשר להסיק שהמשולשים חופפים. נמקו.

ב. $AB = CD$ נכון

$\angle B = \angle D$

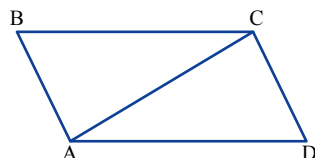


א. $AB = AC$ נכון

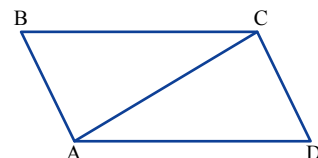


ד. $AB = CD$ נכון

$\angle BAC = \angle DCA$



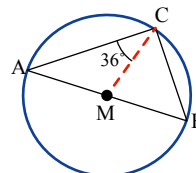
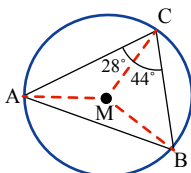
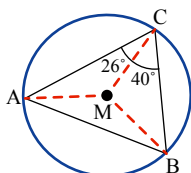
ג. $AB = CD$ נכון



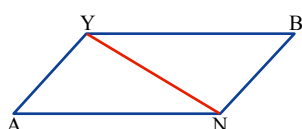


2. חשבו את הגדלים של זוויות המשולש ABC לפי הנתונים הרשומים בשרטוט.

- א. AB קוטר במעגל שמרכזו M. ב. M מרכז המעגל. ג. M מרכז המעגל.



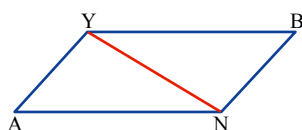
3. בכל סעיף העתיקו את השרטוט, סמנו בו 3 גדלים המוכיחים שהמשולשים חופפים ונמקו. העתיקו את התרשים והשלימו את משפט החפיפה שבו השתמשתם.



א. $BN = AY$ נניח

$\angle AYN = \angle BNY$

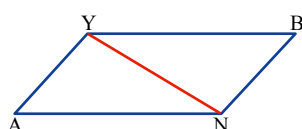
$\triangle AYN \cong \triangle BNY$ מסקנה



ב. $\angle B = \angle A$ נניח

$\angle AYN = \angle BNY$

$\triangle AYN \cong \triangle BNY$ מסקנה



ג. $AY = BN$ נניח

$YB = NA$

$\triangle AYN \cong \triangle BNY$ מסקנה

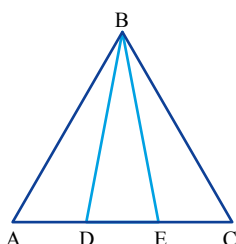


4. משולש ABC שווה-צלעות. נניח

$AD = DE = EC$

$\triangle BAD \cong \triangle BCE$ מסקנה

הוכיחו את החפיפה.

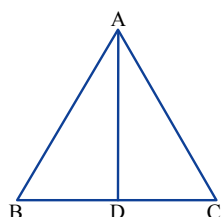




5. א. האם ייתכן שבמשולש יהיו שלושה גבהים מחוץ למשולש?
 אם כן, שרטטו משולש באמצעות סרגל ומד-זווית ושרטטו גם את הגבהים שלו. אם לא, הסבירו.
- ב. האם ייתכן שבמשולש יהיו שלושה גבהים בתוך המשולש.
 אם כן, שרטטו משולש באמצעות סרגל ומד-זווית ושרטטו גם את הגבהים שלו. אם לא, הסבירו.
- ג. האם ייתכן שבמשולש יהיו שני גבהים בתוך המשולש וגובה שלישי מחוץ למשולש.
 אם כן, שרטטו משולש באמצעות סרגל ומד-זווית ושרטטו גם את הגבהים שלו. אם לא, הסבירו.

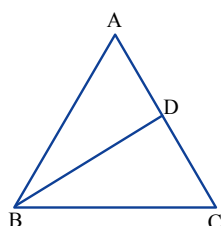


6. בכל סעיף בדקו אם המסקנה נובעת מהנתונים.
 אם כן, הוכיחו. אם לא, שרטטו דוגמה נגדית.



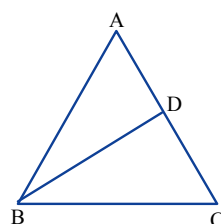
א. $AB = AC$ נכון

AD תיכון לצלע BC
 $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ מסקנה



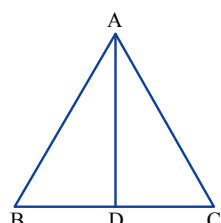
ב. $AB = AC$ נכון

BD תיכון לצלע AC
 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ מסקנה



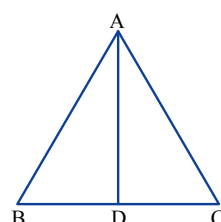
ג. $AB = AC$ נכון

BD חוצה את זווית B.
 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ מסקנה



ד. $AB = AC$ נכון

AD חוצה את זווית A.
 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ מסקנה

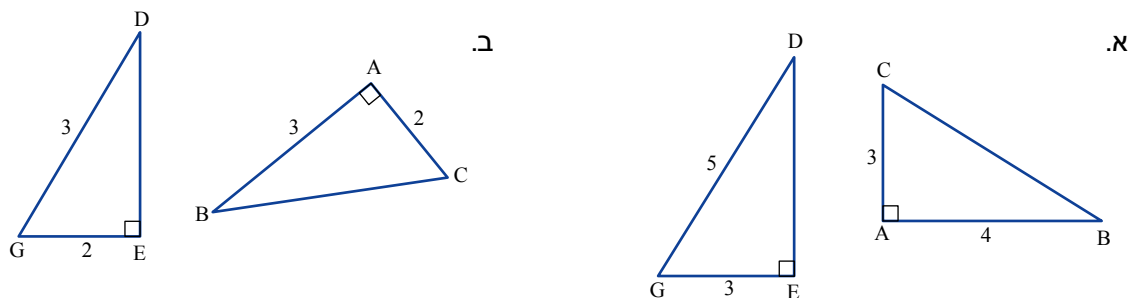


ה. $AD \perp BC$ נכון

AD חוצה את זווית A.
 $\triangle ADC \cong \triangle ADB$ מסקנה



7. בכל סעיף קבעו אם המשולשים חופפים ונמקו. (אם יש צורך, חשבו גודל נוסף).



8. נתונים שני משולשים דומים שאינם חופפים. אורכי שתיים מצלעות $\triangle ABC$ בס"מ רשומים בשרטוט.

- א. גם במשולש DEH יש צלעות שאורכן 4 ס"מ ו- 6 ס"מ.
איזו צלע היא באורך 6 ס"מ ואיזו צלע היא באורך 4 ס"מ? הסבירו.
ב. חשבו באמצעות דמיון משולשים את אורך הצלע השלישית בכל משולש.

