



יחידה 1: חוקי חזקות

שיעור 1. נזכרים בחזקות

הגדרת החזקה

לפניכם מספר סדרות של מספרים.

א. $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \dots$

ב. $(-2), (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, \dots$

ג. $\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \dots$

ד. $\left(-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, \left(-\frac{1}{2}\right)^5, \left(-\frac{1}{2}\right)^6, \dots$

בכל סדרה בדקו אם המספרים מסודרים בסדר עולה. הסבירו.

ניזכר בחזקות ונפתור תרגילים עם חזקות.

1. נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה. מצאו סדרות שיש להן תכונות דומות.



תזכורת

- חזקה היא כתיבה מקוצרת של מכפלה שבה מופיע אותו גורם מספר פעמים. כותבים חזקה בעזרת ביטוי אלגברי כך: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ גורמים}}$ (n מספר טבעי).
- a נקרא **בסיס החזקה**, n נקרא **מעריך החזקה**.
 $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ קוראים: חמש בחזקת שלוש או חמש בשלישית.
 5 הוא בסיס החזקה, 3 הוא מעריך החזקה.
- אפשר לכתוב כל מספר כחזקה בעלת מעריך 1 $a^1 = a$ לכל $a \neq 0$.
 $8^1 = 8$ קוראים: 8 הוא בסיס החזקה, 1 הוא מעריך החזקה.
- כל חזקה של 0 (במעריך טבעי) היא 0: $0^n = 0$, כי $0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0}_{n \text{ גורמים}} = 0$.
- אם בסיס החזקה **חיובי**, מתקבל מספר **חיובי**.
 $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 > 0$ קוראים: 5 הוא בסיס החזקה, 3 הוא מעריך החזקה.
- אם בסיס החזקה **שלילי** ומעריך החזקה **זוגי**, מתקבל מספר **חיובי**.
 $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) > 0$ קוראים: (-3) הוא בסיס החזקה, 4 הוא מעריך החזקה.
- אם בסיס החזקה **שלילי** ומעריך החזקה **אי-זוגי**, מתקבל מספר **שלילי**.
 $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) < 0$ קוראים: (-5) הוא בסיס החזקה, 3 הוא מעריך החזקה.

2. בכל סעיף קבעו מעריך מתאים, אם אפשר. אם אי-אפשר, הסבירו.

א. $2^{\square} = 2$ ב. $2^{\square} = 8$ ג. $(-2)^{\square} = 16$ ד. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\square} = \frac{1}{4}$ ה. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\square} = -\frac{1}{4}$

3. בכל סעיף קבעו מעריך מתאים.

א. $4^{\square} = 64$ ג. $(-2)^{\square} = -8$ ה. $7^{\square} = 49$ ז. $10^{\square} = 1,000,000$
 ב. $2^{\square} = 32$ ד. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = \frac{1}{8}$ ו. $(-3)^{\square} = 81$ ח. $0^{\square} = 0$

4. רשמו את המספרים הבאים בכתוב חזקות (אם אפשר רשמו אפשרויות שונות).

א. 16 ג. 121 ה. 729 ז. 100
 ב. 81 ד. 144 ו. 125 ח. 10,000



5. כששאלו את **אלכס** לגילו, הוא ענה: אפשר לרשום את גילי כחזקה עם בסיס חיובי, בארבע דרכים שונות. מה גילו של **אלכס**?

סדר פעולות חשבון עם חזקות

6. כתבו כמכפלה וקבעו אם התוצאה היא מספר חיובי או מספר שלילי.

א. $(-3)^4$ ג. $(-4)^5$ ה. $(-4)^3$ ז. $(-6)^4$
 ב. $(-3)^7$ ד. $(-5)^6$ ו. -4^3 ח. -6^4



7. לפניכם התרגילים: $2^3 \cdot 2^4$ $2^3 + 2^4$ $2^3 - 2^4$ $2^3 : 2^4$

יואל אמר: לשני תרגילים תוצאות שוות.

אסף אמר: התוצאה של אחד התרגילים היא שבר.

אורי אמר: התוצאה של אחד התרגילים היא שלילית.

מי מהם צודק? מי טועה? לאילו תרגילים התכוון כל אחד?

8. חשבו.

א. $3^3 + 2^2$ ב. $3^3 \cdot 2^2$ ג. $3^3 - 2^2$ ד. $3^3 : 2^2$ ה. $3 + 2^2$ ו. $(3 + 2)^3$



- משמעות הסימן (-) לפני חזקה הוא הנגדי לחזקה.
 $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ ומשמעותו: -3^4 הוא הנגדי ל- 3^4
 $-3^3 = -(3 \cdot 3 \cdot 3) = -27$ ומשמעותו: -3^3 הוא הנגדי ל- 3^3
- פעולת החזקה קודמת לארבע פעולות החשבון. סוגריים קודמים לכל הפעולות.
 מחשבים $3 + 2^4 = 3 + 16 = 19$ כך:
 ואילו $(3 + 2)^4 = 5^4 = 625$ מחשבים כך:

9. בכל סעיף קבעו אם התוצאה היא מספר חיובי או מספר שלילי. הסבירו.

א. $(-2)^4$ ב. -2^4 ג. $(-2)^3$ ד. -2^3 ה. $\frac{-2^4}{-2}$ ו. $\frac{(-2)^4}{-2}$



10. א. מצאו מספר מתאים כך ש: $\square^2 = 16$. כמה מספרים כאלה יש?
 ב. האם אפשר למצוא מספר מתאים כך ש: $\square^2 = -16$? הסבירו.
 ג. מצאו מספר מתאים כך ש: $\square^3 = 8$. כמה מספרים כאלה יש?
 ד. האם אפשר למצוא מספר מתאים כך ש: $\square^3 = -8$?

11. א. כתבו את המספר 1,000 כחזקה.
 ב. כתבו את המספר 1,000 כמנה של שתי חזקות, בשלוש אפשרויות שונות.



12. נתון: $-1 < m < 0$, $0 < t < 1$

בכל סעיף קבעו איזה מהביטויים הוא הקטן ביותר. הסבירו.

א. t^3 , t^2 , m^3 , m^2
 ב. $m \cdot t$, $m^2 \cdot t^2$, $m^3 \cdot t^3$





1. בכל סעיף נתונה סדרה של חזקות. מצאו את המספר השישי בסדרה.

א. $2, 4, 8, \dots$ ב. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ג. $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots$



2. בכל סעיף מצאו את בסיס החזקה.

א. $\square^3 = 8$ ב. $\square^3 = 125$ ג. $\square^3 = 1,000$ ד. $\square^3 = -1,000$



3. בכל סעיף מצאו את מעריך החזקה.

א. $2^{\square} = 64$ ב. $(-2)^{\square} = -32$ ג. $4^{\square} = 64$ ד. $(-4)^{\square} = -64$



4. בכל סעיף מצאו מספר טבעי קטן ככל האפשר.

א. $2^{\square} > 1,000$ ב. $3^{\square} > 1,000$ ג. $5^{\square} > 1,000$



5. א. כתבו את המספר 1,000,000 כחזקה.

ב. כתבו את המספר 1,000,000 כמכפלה של שתי חזקות, בשלוש אפשרויות שונות.



6. חשבו וסדרו את התרגילים על-פי התוצאות (מהתוצאה הקטנה ביותר אל התוצאה הגדולה ביותר).

א. $12 : 2^2$ ב. $12 - 2^2$ ג. $(12 - 2)^2$ ד. $(12 : 2)^2$ ה. $12 + 2^2$



7. חשבו וסדרו את התרגילים על-פי התוצאות (מהתוצאה הקטנה ביותר אל התוצאה הגדולה ביותר).

א. $3^2 - 2 \cdot 2^2$ ג. $3^2 - 2 : 2^2$ ה. $3^2 - 2 - 2^2$
 ב. $(3^2 - 2) \cdot 2^2$ ד. $(3^2 - 2) : 2^2$ ו. $(3^2 + 2) : 2^2$



8. חשבו וסדרו את התרגילים על-פי התוצאות (מהתוצאה הקטנה ביותר אל התוצאה הגדולה ביותר).

א. $10 - 5 - 3^2$ ג. $10 : 5 \cdot 3^2$ ה. $10 : 5 : 3^2$
 ב. $10 - 5 \cdot 3^2$ ד. $10 : \frac{1}{5} \cdot 3^2$ ו. $10 + 5 \cdot 3^2$



9. בכל סעיף הוסיפו סוגריים כך שתתקבל התוצאה הרשומה.

א. $1 + 2 \cdot 3^2 = 27$ ב. $1 + 2 \cdot 3^2 = 37$ ג. $1 + 2 \cdot 3^2 = 49$



10. בכל סעיף קבעו אם התוצאה היא מספר חיובי או מספר שלילי.

א. $(-1)^7$ ג. $(-1)^8$
 ב. -1^7 ד. -1^8



11. בכל סעיף קבעו אם התוצאה היא מספר חיובי או מספר שלילי.

א. $5^3 \cdot 2^4$ ב. $-5^3 \cdot (-2)^4$ ג. $5^3 \cdot (-2)^4$ ד. $(-5)^3 \cdot (-2)^4$



12. בכל סעיף קבעו $>$, $<$, או $=$.



א. $(-2)^3$ ב. $(-\frac{1}{2})^4$
 ג. $(-5)^2$ ד. $(-\frac{1}{4})^2$
 ה. $(\frac{1}{3})^2$ ו. $(-1)^{100}$



13. קבעו "נכון" או "לא נכון". הסבירו.

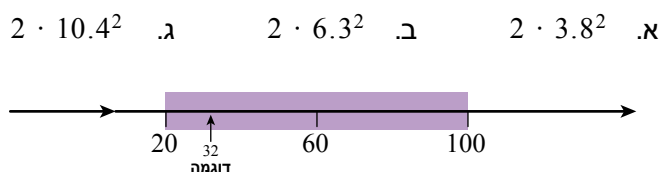
א. $(8 + 2)^2 = 8^2 + 2^2$ ג. $(8 - 2)^2 = 8^2 - 2^2$
 ב. $(8 \cdot 2)^2 = 8^2 \cdot 2^2$ ד. $(8 : 2)^2 = 8^2 : 2^2$



14. אָמדו את התוצאות וקבעו איזו מהתוצאות היא מספר הנמצא בתחום המודגש על ישר המספרים.

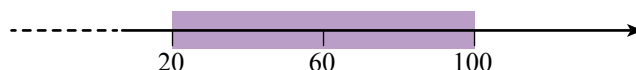
צוואה: $2 \cdot 4 \cdot 3^2 \approx 2 \cdot 4^2$

$2 \cdot 16 = 32$



15. א. אָמדו את התוצאות וקבעו איזו מהן היא מספר הנמצא בתחום המודגש על ישר המספרים.

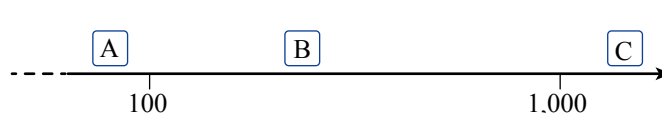
$3 \cdot 1^3$ $2 \cdot 4^3$ $\left(3 \frac{3}{4}\right)^3$ $\left(4 \frac{7}{9}\right)^3$



- ב. העתיקו את ציר המספרים וסמנו עליו את המספר שבחרתם בסעיף א.
 ג. מצאו בסיסי חזקה 3 , כך שהתוצאה שתתקבל תהיה בתחום המודגש של ישר המספרים.
 כמה מספרים כאלה יש? הסבירו.



16. A, B, C הם שלושה תחומים על ציר המספרים (A - כל המספרים הקטנים מ-100, B - כל המספרים הגדולים מ-1000, C - כל המספרים הגדולים מ-100 וקטנים מ-1000).
 אָמדו את התוצאות וקבעו מהו המיקום המתאים A, B או C.



$6 \cdot 3^4$
 $3 \cdot 2^5$
 $8 \cdot 7^2$



17. אילו תרגילים שווים ל-1000?

א. $10^2 + 10$ ב. $10^2 \cdot 10$ ג. $30^2 + 10^2$ ד. $(30 + 10)^2$ ה. 500^2



18. הייתכן? הסבירו או הדגימו.

- א. המספר והריבוע שלו שווים. ג. הריבוע של מספר שווה למחצית המספר.
 ב. המספר שווה למחצית הריבוע שלו. ד. קיים מספר a כך ש- $a^n < 1$ לכל n טבעי.



19. א. מהי ספרת היחידות במספר 5^{79} ? נמקו את תשובתכם.
 ב. מהי ספרת היחידות במספר 6^{102} ? נמקו את תשובתכם.
 הדרכה: מצאו את החזקות הראשונות של כל אחד מהמספרים וגלו את החזקות.



שיעור 2. כופלים ומחלקים

חוקי חזקות: כפל וחילוק חזקות בעלות בסיסים שווים

תלמידי כיתה ח פתרו את התרגיל: $2^3 \cdot 2^4$

שירה אמרה: התוצאה היא 2^7

$$2^3 \cdot 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{גורמים 3}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{גורמים 4}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{גורמים 7}} = 2^7 \quad \text{כי}$$

יעל אמרה: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$, כי הפעולה היא כפל, וכן $3 \cdot 4 = 12$

מי מהן צודקת? הסבירו.

נכפול ונחלק חזקות בעלות בסיסים שווים.

1. בכל סעיף בחרו תשובה מתאימה לתרגיל שבמסגרת.

- | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------------|----|-------|-------|-----------------|----|
| a^{15} | a^8 | $a^3 \cdot a^5$ | ג. | 2^5 | 2^6 | $2^3 \cdot 2^2$ | א. |
| a^{n+k} | a^{n-k} | $a^n \cdot a^k$ | ד. | 3^8 | 3^6 | $3^4 \cdot 3^2$ | ב. |
- (n ו- k טבעיים)

2. בכל סעיף כתבו את התוצאה בכתוב חזקות.

- | | | | | | | | |
|--------------------------|----|------------------------------|----|---|----|-----------------|----|
| $a^n \cdot a$ (n טבעי) | ז. | $5^{2x} \cdot 5^x$ (x טבעי) | ה. | $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ | ג. | $4^3 \cdot 4^2$ | א. |
| $a^n \cdot a^3$ (n טבעי) | ח. | $5^x \cdot 5^{x+1}$ (x טבעי) | ו. | $(-8)^2 \cdot (-8)^3$ | ד. | $5^4 \cdot 5^2$ | ב. |

3. מה פתרון התרגיל $\frac{5^6}{5^2}$?

$$\frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 \quad \text{כי}$$

יואב אמר: 5^4

תומר אמר: 5^3 כי הפעולה היא חילוק, וכי $6 : 2 = 3$

מי צודק? הסבירו.

4. בכל סעיף בחרו תשובה מתאימה לתרגיל שבמסגרת.

- | | | | | | | | |
|-----------|-----------|----------------------|----|-------|-------|-------------------|----|
| 4^5 | 4^2 | $\frac{4^{10}}{4^5}$ | ג. | 2^6 | 2^4 | $\frac{2^8}{2^2}$ | א. |
| a^{n+k} | a^{n-k} | $\frac{a^n}{a^k}$ | ד. | 5^3 | 5^2 | $\frac{5^6}{5^3}$ | ב. |
- (n ו- k טבעיים, $a \neq 0$, $n > k$)



- אם כופלים חזקות בעלות בסיסים שווים, מעריך החזקה של המכפלה שווה לסכום המעריכים.

בכתיב חזקות רושמים: $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, n ו- k טבעיים, $(a \neq 0)$.

$$a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8 \quad \text{זלזל:}$$

- אם מחלקים חזקות בעלות בסיסים שווים, מעריך החזקה של המנה שווה להפרש המעריכים.

בכתיב חזקות רושמים: $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$, $n > k$, $a \neq 0$, n ו- k מספרים טבעיים.

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a}} = a^{5-2} = a^3 \quad \text{זלזל:}$$

הערה: בשלב זה נעסוק רק במקרים שבהם $k > n$. בהמשך, נעסוק גם במקרים אחרים.

5. חשבו ורשמו את התוצאה בכתיב חזקות.

א. $\frac{2^5}{2^4}$ ב. $\frac{3^6}{3^4}$ ג. $\frac{4^5}{4}$ ד. $\frac{a^7}{a^3}$ ($a \neq 0$) ה. $\frac{a^{10}}{a}$ ($a \neq 0$)

6. פשטו ורשמו את התוצאה בכתיב חזקות.

$$a^3 \cdot a^4 \cdot a^6 \cdot a^2 = a^{15} \quad \text{זלזל/ות:} \quad (a \neq 0) \quad \frac{a^3 \cdot a^5 \cdot a}{a^2 \cdot a^4} = \frac{a^9}{a^6} = a^3$$

א. $a^2 \cdot a$ ב. $a \cdot a^4$ ג. $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$ ד. $\frac{a^4}{a}$ ($a \neq 0$) ה. $\frac{a^7}{a^4}$ ($a \neq 0$) ו. $\frac{a^4}{a^3}$ ($a \neq 0$) ז. $\frac{a^7 \cdot a^3}{a^4}$ ($a \neq 0$) ח. $\frac{a^{12}}{a^3 \cdot a^2}$ ($a \neq 0$)

7. בכל סעיף קבעו אם התוצאה גדולה מ-1, שווה ל-1 או קטנה מ-1. הסבירו.

א. $\frac{5^7 \cdot 7^2}{5^6}$ ב. $\frac{7^6 \cdot 5^3}{5^7 \cdot 7^2}$ ג. $\frac{5^6 \cdot 7^2}{5^9}$ ד. $\frac{5^3 \cdot 5^4 \cdot 7^2}{5^7 \cdot 7^2}$ ה. $\frac{7^4}{5^7 \cdot 7^2}$

8. פשטו וכתבו בכתיב חזקות.

$$2a^5 \cdot 4a^2 = 2 \cdot a^5 \cdot 4 \cdot a^2 = 8a^7 \quad \text{זלזל:}$$

א. $4a^4 \cdot 5a^5$ ב. $7a^6 \cdot 8a^3$ ג. $7a^9 \cdot 9a^7$ ד. $\frac{1}{2}a^7 \cdot 10a^7$

מעריך אפס



9. בכיתה מחשבים $\frac{3^6}{3^6}$

גל רשם: $\frac{3^6}{3^6} = 1$ דני רשם: $\frac{3^6}{3^6} = 3^{6-6} = 3^0$

הסבירו את השיקולים של גל ושל דני.



- מגדירים חזקה שבה המעריך 0 כך $a^0 = 1$ ($a \neq 0$).
הגדרה זו היא הרחבה של החוק $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ ($a \neq 0$) גם עבור $n = k$, ומאפשרת שמירה על החוק עבור $n \geq k$.
מהרחבת החוק נובע $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ ($a \neq 0$), מצד שני מתקיים $\frac{a^n}{a^n} = 1$ ($a \neq 0$).
לכן באופן כללי נגדיר: $a^0 = 1$ ($a \neq 0$)
- 0^0 אינו מוגדר כי הוא מתקבל מן החילוק $\frac{0^n}{0^n}$ וזהו ביטוי שהמכנה שלו 0.
הערה: ההגדרה $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) היא הרחבה של מושג החזקה.
במקרה זה ובמקרים נוספים בהמשך אי-אפשר לפרש את מושג החזקה ככפל חוזר.



10. א. פי כמה גדול 7^{42} מ- 7^{41} ? ב. 7^{12} מ- 7^8 ? ג. 7^{10} מ- 7 ?

ב. עבור $a > 1$ ו- n מספר טבעי, מצאו

פי כמה גדול a^{n+1} מ- a^n ? פי כמה גדול a^{n+2} מ- a^n ? פי כמה גדול a^{n+3} מ- a^n ?



אוסף משימות



1. בכל סעיף קבעו = או $\neq$.

א. 5^{35} $5^{20} \cdot 5^{15}$ ג. $5^{10} \cdot 5^7$ $5^7 \cdot 5^{10}$ ה. 5^2 $\frac{5^6}{5^3}$

ב. $25^{10} \cdot 5$ ד. 5^{70} $5^{10} \cdot 5^7$ ו. 5 $\frac{5^7}{5^6}$



2. קבעו = או $\neq$.

א. $3^{17} \cdot 3^{19}$ ☐ 3^{17+19} ג. $a^5 \cdot a^3$ ☐ a^{15} ה. $\frac{a^6}{a^3}$ ☐ a^2 ($a \neq 0$)
 ב. $3^{17} \cdot 3^{19}$ ☐ 3^{17+19} ד. $a^5 \cdot a^3$ ☐ a^8 ו. $\frac{a^8}{a^7}$ ☐ a ($a \neq 0$)



3. קבעו $>$, $<$ או $\neq$.

א. $\left(\frac{10}{2}\right)^3$ ☐ $\frac{10^3}{2}$ ג. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ה. $a^6 \cdot a^2$ ☐ a^{12} ($0 < a < 1$)
 ב. $\frac{1}{2^6}$ ☐ $\frac{1}{8^2}$ ד. $\left(\frac{2}{3}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ ו. $a^6 : a^2$ ☐ a^3 ($0 < a < 1$)



4. קבעו = או $\neq$.

א. 15^0 ☐ 0 ג. $(-3)^0$ ☐ 1 ה. 2^0 ☐ 3^0 ז. $(-2)^0$ ☐ 3^0
 ב. 15^0 ☐ 1 ד. $(-3)^0$ ☐ 0 ו. -2^0 ☐ 3^0 ח. $(-2)^0$ ☐ $(-3)^0$



5. העתיקו והשלימו מעריכים מתאימים.

א. $72 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ ג. $225 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$ ה. $2,025 = 3^{\square} \cdot 5^{\square}$
 ב. $432 = 2^{\square} \cdot 3^{\square}$ ד. $5,000 = 2^{\square} \cdot 5^{\square}$ ו. $2,700 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square}$



6. חשבו ורשמו את התוצאה בכתוב חזקות.

א. $5^2 \cdot 5^4$ ג. $6^3 \cdot 6^2 \cdot 6^7$ ה. $\frac{3^8}{3^2}$ ז. $\frac{5^7}{5}$
 ב. $7 \cdot 7^3$ ד. $3^5 \cdot 3^7 \cdot 3^2$ ו. $\frac{2^7}{2^4}$ ח. $\frac{8^3 \cdot 8^2}{8^4}$



7. בכל סעיף רשמו ביטוי זהה בכתוב חזקות.

א. $a^2 \cdot a^7$ ג. $b^3 \cdot b \cdot b^7$ ה. $\frac{a^2}{a}$ ז. $\frac{a^3 \cdot a^2}{a^4}$ ($a \neq 0$)
 ב. $a \cdot a^3 \cdot a^5$ ד. $\frac{a^6}{a^4}$ ($a \neq 0$) ו. $\frac{a^6}{a}$ ($a \neq 0$) ח. $\frac{a^{10}}{a^4 \cdot a^4}$ ($a \neq 0$)



8. רשמו את התוצאה בכתוב חזקות.

א. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 10^7$ ג. $\frac{5^2 \cdot a^3}{5 \cdot a} \quad (a \neq 0)$ ה. $\frac{3 \cdot 5 \cdot 5^6}{3 \cdot 5^2}$

ב. $c^3 \cdot d^2 \cdot d^5 \cdot c^6$ ד. $\frac{3^4 \cdot 8^7}{3^4 \cdot 8^5}$ ו. $\frac{a \cdot b^4 \cdot a^2 \cdot b}{a \cdot b^2} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$



9. בכל סעיף קבעו אם התוצאה גדולה מ-1, קטנה מ-1 או שווה ל-1.

א. $\frac{3^5}{3^4}$ ב. $\frac{3^4}{3^5}$ ג. $\frac{5^4}{5^2}$ ד. $\frac{4^7}{4^7}$ ה. $\frac{5^2}{5^4}$



10. בכל סעיף קבעו אם התוצאה גדולה מ-1, קטנה מ-1 או שווה ל-1. הסבירו.

א. 5^0 ג. $8^3 - 8^3$ ה. $\frac{4^4 \cdot 4^3}{4^5}$ ז. $\frac{5^0 \cdot 5^8}{5^2}$

ב. $\frac{6^3}{6^3}$ ד. $3^4 - 3^3$ ו. $\frac{7^0}{7}$ ח. $\frac{5^{10}}{5^2 \cdot 5^8 \cdot 5^0}$



11. בכל סעיף קבעו אם התוצאה גדולה מ-1, קטנה מ-1 או שווה ל-1. הסבירו.

א. $\frac{2^7 \cdot 3^2}{2^6}$ ג. $\frac{2^7 \cdot 3^2}{3^6 \cdot 2^3}$ ה. $\frac{3^4}{2^7 \cdot 3^5}$ ז. $\frac{5^0 \cdot 3^8}{3^2 \cdot 5^5}$

ב. $\frac{2^5 \cdot 3^2}{2^9}$ ד. $\frac{2^7 \cdot 3^2}{3^2 \cdot 2^7}$ ו. $\frac{3^6 \cdot 2^3}{2^7 \cdot 3^2}$ ח. $\frac{2^4 \cdot 5^{10}}{5^2 \cdot 5^8 \cdot 5^0 \cdot 4^2}$



12. א. פי כמה גדול 3^{12} מ- 3^{11} ? ג. פי כמה גדול 5^{24} מ- 5^{20} ?

ב. פי כמה גדול 4^{17} מ- 4^{16} ? ד. פי כמה גדול 8^{105} מ- 8^{100} ?



13. א. חשבו את 10 החזקות הראשונות של 2.

ב. קבעו, על סמך ממצאיכם, את ספרת היחידות של 2^{13} , של 2^{20} , של 2^{55} . הסבירו.



14. א. מצאו שלושה מספרים עוקבים שמכפלתם מסתיימת ב-3 אפסים.

ב. מהי השלשה הקטנה ביותר המקיימת את התנאי שבסעיף א? הסבירו.



שיעור 3. מתרגלים בחזקות

בשיעורים הקודמים ראינו כי חזקה היא כתיבה מקוצרת של מכפלות, למדנו כיצד כופלים ומחלקים חזקות, והגדרנו חזקה עם מעריך 0.

בכתיב חזקות	כמכפלות
a^n n מספר טבעי	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$ n גורמים
$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ n ו-k טבעיים	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k$ n גורמים k גורמים
$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$ $n \geq k, a \neq 0$ n ו-k טבעיים	$\frac{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k}$ n גורמים k גורמים
n מספר טבעי $a^0 = 1$ $a \neq 0$	$\frac{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n} = 1$ n גורמים n גורמים $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$

נפתור תרגילים עם חזקות ועם פעולות חשבון נוספות.

1. כתבו דוגמה מספרית לכל אחד מהחוקים המובאים במסגרת שבפתיחת השיעור.

2. בכל סעיף קבעו = או $\neq$.

א. -3^4 ב. -2^3 ג. -1^{10} ד. 2^6 $(-2)^6$

3. באילו תרגילים התוצאה היא 10^4 ? הסבירו.

א. $10^5 - 10$ ג. $10^3 \cdot 10$ ה. $10^3(2^3 + 2)$

ב. $10^5 : 10$ ד. $10 + 10^3$ ו. 10000

4. חשבו.

א. $3^2 - 2 \cdot 2^2$ ג. $10^2 + (7^2 - 1) : 2^3$ ה. $3^4 - 1 - 4^2 - 2^6$

ב. $(11^2 - 3 \cdot 7) : 5$ ד. $5^3 - 3 \cdot 2^2 : 2^2$ ו. $(3^3 - 2) : 5^2$

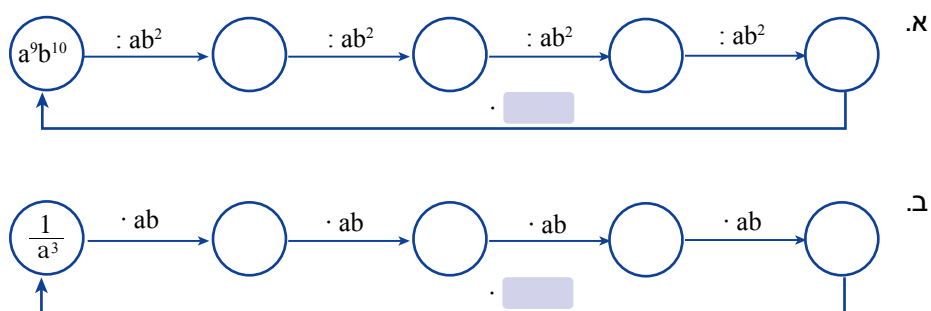
5. פשטו ורשמו בכתוב חזקות (x מספר טבעי).

א. $3^{2x} \cdot 3^x$ ב. $3^{2x} \cdot 3^{x+1}$ ג. $3^x \cdot 3$ ד. $\frac{3^{2x}}{3^x}$ ה. $\frac{3^{2x}}{3}$

6. קבעו "נכון" או "לא נכון" (x מספר טבעי).

א. $5^{2+x} = 5^2 \cdot 5^x$ ב. $5^{2+x} = 5^2 + 5^x$ ג. $5^x + 5^x = 5^{2x}$ ד. $5^x \cdot 5^x = 5^{2x}$

7. העתיקו והשלימו ביטויים מתאימים בעיגולים ובמלבן ($a \neq 0, b \neq 0$).



8. קבעו מה חסר ($b \neq 0, a \neq 0$).

א. $a \cdot \square = ab$ ג. $2a^2b \cdot \square = ab$ ה. $\frac{a^3b^5}{\square} = ab$

ב. $a^2 \cdot \square = ab$ ד. $\frac{2a^2b}{\square} = ab$ ו. $\frac{\square}{a^3b^5} = ab$

9. פרקו לגורמים ראשוניים ורשמו בכתוב חזקות.

$\frac{250}{144} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5^3}{2^3 \cdot 3^2}$ $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$ *צולא/ת:*

א. 200 ב. 375 ג. 648 ד. 1,800 ה. $64 \cdot 48$ ו. $\frac{640}{24}$

10. לפניכם סדרה עם חוקיות כפולית: 3, 6, 12, 24, ...

- מהי החוקיות של הסדרה?
- מהו האיבר החמישי בסדרה?
- הציגו את האיבר העשירי כמכפלה של חזקות של גורמים ראשוניים.
- נתבו ביטוי אלגברי המבטא את ערכו של האיבר הנמצא במקום ה-n (n מספר טבעי).

11. בכל סעיף מצאו את ספרת היחידות.

א. 3^{33} ב. $3^{33} + 3^{91}$



12. קבעו מה גדול יותר. הסבירו.

- א. 102^{24} או $102^{12} + 102^{12}$ ג. 3^{52} או $10 \cdot 3^{50}$
- ב. $5^{20} + 5^{20}$ או 5^{40} ד. 10^{30} או $97 \cdot 10^{28}$



אוסף משימות



1. בכל סעיף קבעו אם שני הביטויים זהים.

- א. $3 \cdot a^4$; $(3a)^4$ ב. $9x^2$; $(3x)^2$ ג. $\frac{a^2}{9}$; $(\frac{a}{3})^2$ ד. $\frac{b^2}{5}$; $(\frac{b}{5})^2$



2. בכל סעיף קבעו אילו ביטויים זהים לביטוי שבמסגרת ($x \neq 0$).

- | | | | | | |
|----------------------|----|-----------|-----------------|------------|----------------------|
| $x^3 \cdot x^4$ | א. | x^7 | $x^{3 \cdot 4}$ | x^{3+4} | $\frac{x^{14}}{x^2}$ |
| $\frac{x^{12}}{x^2}$ | ב. | 1^6 | x^6 | x^{12-2} | $x^{12} - x^2$ |
| x^0 | ג. | x^{7-7} | 0 | $x - x$ | 1 |
| $x^3 + x^3$ | ד. | x^6 | x^9 | $2x^3$ | $\frac{2x^5}{x^2}$ |



3. קבעו אם התוצאה היא $3b^6$, b^6 או $3b^6$ ($b \neq 0$).

- א. $\frac{12b^5}{4b^4}$ ד. $b \cdot b^2 \cdot b^3$ ז. $\frac{b^7}{b}$ י. $\frac{3b^{12}}{b^6}$
- ב. $b + b + b$ ה. $5b^6 - 2b^6$ ח. $3b^3 \cdot b^3$ יא. $\frac{3b^8}{3b^2}$
- ג. $6b - b - 2b$ ו. $b^2 \cdot b^2 \cdot b^2$ ט. $b \cdot b^5$ יב. $4b - b$



4. חשבו וצמצמו עד כמה שאפשר ($a \neq 0$, n מספר טבעי).

א. $\frac{a^7}{a}$ ב. $\frac{a}{a^7}$ ג. $\frac{a^7}{a^7}$ ד. $\frac{a^{n+1}}{a^n}$ ה. $\frac{a^{n+1}}{a}$



5. פשטו ורשמו בכתוב חזקות (n מספר טבעי).

א. $3^n \cdot 3^n$ ב. $3^n \cdot 3^{n+1}$ ג. $3^{n+1} \cdot 3^{2n}$ ד. $\frac{3^{n+5}}{3^n}$ ה. $\frac{3^{5n}}{3^n}$ ו. $\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}$



6. חשבו.

א. $3 + 2^3$ ב. $5 + 3^3$ ג. $48 : 4^2$ ד. $100 - 5^2$ ה. $4 \cdot 8^2$



7. חשבו.

א. $75 + 5^2$ ב. $4 \cdot 5^2$ ג. $4^2 - 6$ ד. $6^2 + 8^2$ ה. $12^2 - 2^3 - 6^2$



8. קבעו בלי לחשב "נכון" או "לא נכון".

א. $2^5 + 2^5 = 4^5$ ג. $6^3 - 7^3 > 0$ ה. $5^8 - 5^4 > 100$
 ב. $3^9 - 9^3 > 0$ ד. $3^{10} - 10^3 > 0$ ו. $2.7^3 + 1.2^3 < 20$



9. בכל סעיף קבעו מעריך מתאים.

א. $10 \cdot 2^{\square} + 20 = 100$ ג. $3 \cdot 2^{\square} - 16 = 80$
 ב. $2 \cdot 3^{\square} + 32 = 50$ ד. $5 \cdot 3^{\square} - 5 = 40$



10. בכל סעיף מצאו את ספרת היחידות.

א. 3^{48} ב. $3^{48} + 3^{57}$



11. העתיקו את לוח המשבצות. פתרו ורשמו כל תשובה במשבצת המתאימה.

א.	ב.	ג.
ד.	ה.	ו.
ז.	ח.	ט.

א. $3^3 - 21$ ד. 2^3 ז. $30 - 2^5$
 ב. $(1 - 3^2) : 2$ ה. $8^2 - 60$ ח. $3^4 - 69$
 ג. $1 + 3^2$ ו. $4^3 - 64$ ט. $10^2 : 50$

אם פתרתם נכון, קיבלתם ריבוע קסם שבו יש אותו הסכום בכל טור, בכל שורה ובכל אלכסון.



12. העתיקו והשלימו כך שתתקבל אותה מכפלה בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון.

a		b
	ab	
a^2b		



13. העתיקו והשלימו כך שהמכפלה בכל שורה, בכל טור ובכל אלכסון תהיה a^6b^6 .

a^4b		ab^4
	a^2b^2	



14. בכל סעיף קבעו אילו ערכים מתאימים ל- a כך שיתקיים התנאי הרשום.

א. $a^5 < a^6$ ב. $a^5 = a^6$ ג. $a^5 > a^6$ ד. $a^6 < a^7$

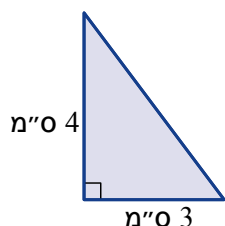


15. שני אמרה: $3^2 + 4^2 = 7^2$

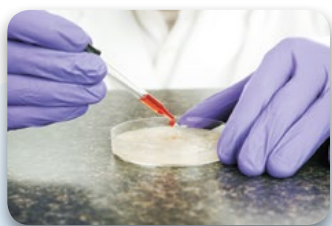
ליאור אמרה: $3^2 + 4^2 = 5^2$

מי צודקת?

הסבירו תשובתכם. היעזרו בשרטוט.



שיעור 4. חזקות ופונקציות



אֶמְבָּה (חילופית בעברית) היא יצור חד-תאי המתפצל ל-2 בכל משך זמן קבוע. מניחים בצלוחית אֶמְבָּה אחת, המתפצלת ל-2 בכל שעה. כלומר, אחרי שעה כבר יש שתי אֶמְבּות. כמה אֶמְבּות כאלה יהיו בצלחת: אחרי 2 שעות? אחרי 5 שעות? אחרי 10 שעות? כעבור כמה שעות יהיו בצלחת יותר מ-500 אֶמְבּות? הסבירו.

נתאר תהליכי גידול בייצוגים שונים.

במשימות 1 - 3 נתייחס לנתונים במשימת הפתיחה.

1. קבעו אילו סדרות מתארות את תהליך התפצלות האמבות במשך הזמן. הסבירו.

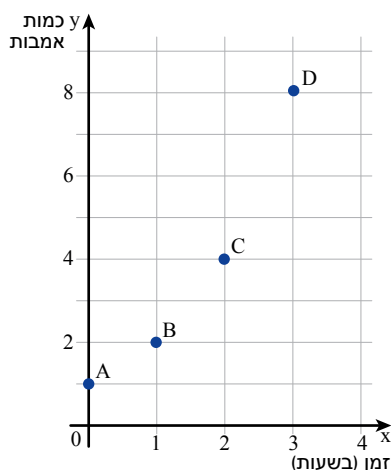
- א. סדרה א $1, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$
 ב. סדרה ב $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$
 ג. סדרה ג $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$
 ד. סדרה ד $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

2. א. העתיקו והשלימו את הטבלה.

x זמן (בשעות)	0	1	2	3	4	5
y כמות האמבות	1					

ב. בחרו ייצוג אלגברי לפונקציה המתאימה לזמן x בשעות ($x \geq 0$, x שלם) את כמות האמבות y שבצלוחית.

$$y = 2 + x \quad y = 2^x \quad y = 2x$$



ג. במערכת הצירים מסומנות ארבע נקודות המתאימות לטבלה.

מה משמעות שיעורי הנקודות A, B, C, D בסיפור התפצלות האמבות בצלוחית?

ד. קבעו "נכון" או "לא נכון".

- כעבור שעתיים יהיה מספר האמבות פי 2 ממספרן ההתחלתי.
- כעבור 3 שעות יהיה מספר האמבות פי 3 ממספרן ההתחלתי.
- כעבור 3 שעות יהיה מספר האמבות פי 8 ממספרן ההתחלתי.
- כעבור 5 שעות יהיה מספר האמבות פי 2^5 ממספרן ההתחלתי.

3. א. כעבור כמה שעות יהיו בצלחת יותר מ-1,000 אֶמְבּות? הסבירו.

ב. כעבור כמה שעות יהיו בצלחת יותר מ-2,000 אֶמְבּות? הסבירו.

ג. כעבור כמה שעות יהיו בצלחת יותר מ-4,000 אֶמְבּות? הסבירו.



פונקציה שהייצוג האלגברי שלה הוא $y = a^x$ ($a > 0, x \geq 0$, x שלם) נקראת **פונקציה מעריכית**.
זלמה: הפונקציה $y = 2^x$ ($x \geq 0$, x שלם) ממשימת הפתיחה היא פונקציה מעריכית.



4. א. העתיקו את הטבלה והשלימו.

x	0	1	2	3	4	5
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	1					

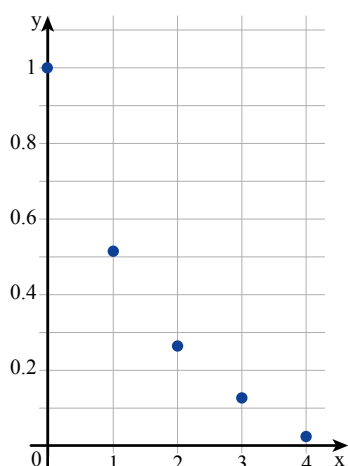
ב. השוו בין הערכים בטבלה זו לערכים בטבלה שבמשימה 2.

במה הם דומים? במה הם שונים?

ג. בשרטוט גרף הפונקציה $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ($x \geq 0$, x שלם).

האם הפונקציה עולה או יורדת? הסבירו.

האם לגרף הפונקציה יש נקודה משותפת עם ציר x ?
הסבירו.



5. במערכת הצירים מסומנות שלוש נקודות.

א. בחרו ייצוג אלגברי של פונקציה מעריכית

המתאימה לשיעורי הנקודות ($x \geq 0$, x שלם).

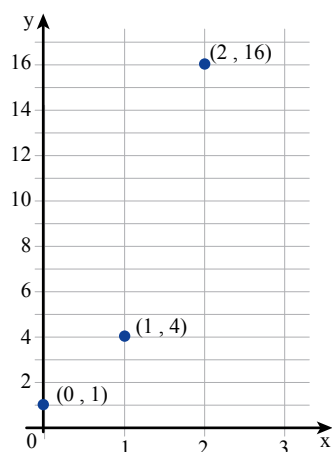
$$y = 8^x, \quad y = 4^x, \quad y = 2^x$$

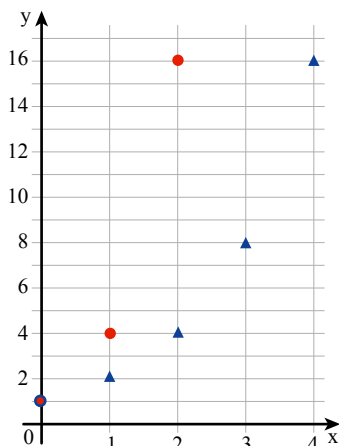
ב. האם לגרף הפונקציה יש נקודה משותפת

עם ציר x ? הסבירו.

ג. האם הפונקציה יכולה לקבל ערך שלילי? הסבירו.

ד. האם הפונקציה עולה או יורדת בכל התחום? הסבירו.





6. במערכת הצירים הגרפים של הפונקציות: $y = 2^x$, $y = 4^x$ ($x \geq 0$, x שלם).

א. התאימו גרף לפונקציה.

ב. היכן יהיה גרף הפונקציה $y = 3^x$? הסבירו.

ג. היכן יהיה גרף הפונקציה $y = 5^x$? הסבירו.

7. נתונות הפונקציות המעריכיות הבאות ($x \geq 0$, x שלם):

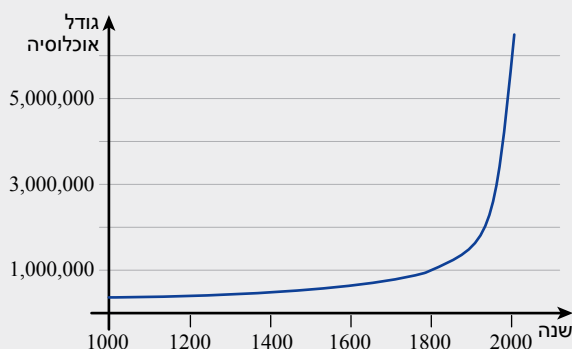
$$y = 2^x, \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y = 3^x, \quad y = 4^x, \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

אילו מהן פונקציות עולות? אילו מהן פונקציות יורדות?

הפונקציות שראינו בשיעור זה מתארות שינויים שבהם הכמות המשתנה בכל שלב היא פי אותו מספר מן הכמות שבשלב הקודם. למשל, עבור הפונקציה $f(x) = 2^x$ ($x \geq 0$, x שלם). בכל שלב, הכמות המשתנה גדולה פי 2 בהשוואה לכמות שהייתה בשלב הקודם.



פונקציה המתארת שינוי מסוג זה נקראת **פונקציה מעריכית** (אקספוננציאלית).



למשל, אוכלוסיית בני האדם בעולם גדלה מדי שנה בכ- 2%. לפי הנחה זו, בכל שנה אוכלוסיית העולם גדלה פי 1.02* בהשוואה לגודל האוכלוסייה בשנה הקודמת.

הגרף בשרטוט מתאר את גידול אוכלוסיית כדור הארץ החל משנת 1000. בהקשר זה נציין כי קצב הגידול הזה הוא באופן משמעותי בשנים האחרונות, ומומחים צופים האטות משמעותיות גם בהמשך.

שימו לב, הגרף משורטט כגרף רציף למרות שהוא גרף של נקודות (לפי תחום הפונקציה). השרטוט נעשה כך בשל צפיפות הנקודות ולשם הדגשת המגמה.

* משמעות ההגדלה של כמות k ב-2% היא $k + k \cdot \frac{2}{100} = k + 0.02k = 1.02k$



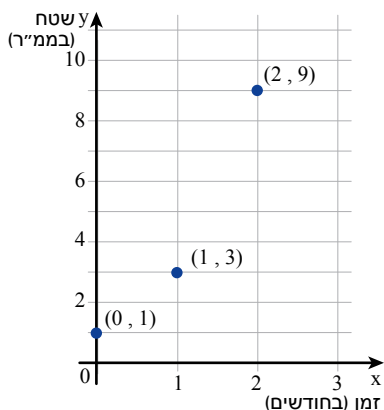
8. אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסוימת הוא 15%.

כיום יש במדינה זו 3,200,000 תושבים.

א. פי כמה גדלה האוכלוסייה בכל שנה?

ב. מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנה? לאחר שנתיים? לאחר 5 שנים?

ג. רשמו ייצוג אלגברי של פונקציה המתאימה למספר השנים (n) את מספר התושבים במדינה.



1. במערכת הצירים מתואר תהליך גידול פטריות במעבדה.

בכל חודש שטח הפטריות גדל פי 3 מהחודש הקודם.

א. העתיקו את הטבלה והשלימו.

x	0	1	2	3	4	5
y	1					

ב. רשמו ייצוג אלגברי של הפונקציה המתאימה לזמן x

בחודשים ($x \geq 0$, x שלם) את גודל שטח הפטריות y בממ"ר.

ג. האם הפונקציה עולה או יורדת בכל התחום?

ד. קבעו "נכון" או "לא נכון".

- כעבור חודש יהיה שטח הפטריות פי 3 מהשטח בהתחלה.
- כעבור חודשיים יהיה שטח הפטריות פי 6 מהשטח בהתחלה.
- כעבור 3 חודשים יהיה שטח הפטריות פי 27 מהשטח בהתחלה.
- כעבור 8 חודשים יהיה שטח הפטריות פי 3^8 מהשטח בהתחלה.



2. העתיקו והשלימו **תעודת זהות** לפונקציות.

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = 2^x$	ייצוג אלגברי של הפונקציה
		ייצוג גרפי (סקיצה)
$x \geq 0$, x שלם	$x \geq 0$, x שלם	תחום הפונקציה
		שיעורי נקודת חיתוך עם ציר y ($x = 0$)
		שיעורי נקודות חיתוך עם ציר x ($y = 0$)
		הפונקציה עולה, יורדת או קבועה
		התחום שבו הפונקציה חיובית ($y > 0$)



3. אחוז הריבוי הטבעי במדינה מסוימת הוא 10%.

כיום יש במדינה זו 5,000,000 תושבים.

א. פי כמה גדלה האוכלוסייה בכל שנה?

ב. מה מספר התושבים הצפוי לאחר שנה? לאחר שנתיים? לאחר 7 שנים?