

מו, מה וכמה?

חקלאי הגיע ליריד גדול כדי למכור עדר כבשים ופרות.
בתחילה הצליח למכור רק 15 כבשים, ואז היה מספר הפרות גדול פי שניים ממספר הכבשים, שנתרו.
לאחר מכן הצליח למכור 45 פרות, ואז היה מספר הכבשים שנתרו, גדול פי חמישה ממספר הפרות שנתרו.

– כמה פרות וכמה כבשים היו בעדר בתחילה?

בעדר היו 40 כבשים ו- 50 פרות.

אם נבחר ב- x כמשתנה המייצג את מספר הכבשים בהתחלה, נצטרך משתנה נוסף למספר הפרות. לכן עדיף לבחור במשתנה x עבור מספר הכבשים בשלב השני (לאחר מכירת הכבשים). בעזרתו נוכל לבנות תבנית שתייצג את מספר הפרות, כי ידוע שבשלב השני, מספר הפרות היה גדול פי שניים ממספר הכבשים. נבנה תבניות לשלבים השונים.

פרות	כבשים	
$2x$	$x + 15$	בהתחלה
$2x$	x	בשלב השני
$2x - 45$	x	בשלב האחרון

בעזרת התבניות המתאימות לשלב האחרון, ניתן לבנות את המשוואה הבאה:

$$5(2x - 45) = x$$

$$10x - 225 = x$$

$$9x = 225$$

$$x = 25$$

אפשרות אחרת, נסמן ב- x את מספר הפרות שנותרו בסוף וב- $5x$ את מספר הכבשים שנותרו בסוף.

בעזרת תבניות אלה נוכל לבנות תבניות מתאימות לשלבים הקודמים.

פרות	כבשים	
x	$5x$	בסוף
$x + 45$	$5x$	לפני מכירת הפרות

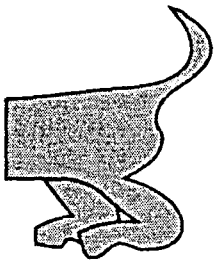
ידוע כי לפני מכירת הפרות היה מספרן גדול פי שניים ממספר הכבשים. לכן נרשום המשוואה הבאה:

$$x + 45 = 10x$$

$$9x = 45$$

$$x = 5$$

לכן, מספר הפרות בעדר היה $5 + 45 = 50$ ומספר הכבשים $5 \cdot 5 = 25$.



מה יהיה הסוף?

מהן שתי הספרות האחרונות במספר 7^{999} ?
- הסבירו כיצד מצאתם.

שתי הספרות האחרונות של 7^{999} , הן 43. נבדוק את החזקות של 7 החל מ- 7^1 , בסדר עולה,

$$7^1 = 7$$

$$7^2 = 49$$

$$7^3 = 343$$

$$7^4 = 2401$$

$$7^5 = 16807$$

$$7^6 = 117649$$

$$7^7 = 823443$$

$$7^8 = 5764801$$

נראה כי קיימת מחזוריות קבועה לגבי שתי הספרות האחרונות של החזקות.
הן מופיעות באותו סדר לאורך כל ארבע חזקות: 01, 43, 49, 07.

לכן, כדי לדעת מהן שתי הספרות האחרונות של חזקה מסוימת, יש לחלק את מעריך החזקה ב-4. שארית החלוקה ב-4, מצביעה על מקומה של החזקה במחזור.

שארית החלוקה של 9999 ב-4 היא 3. לכן, שתי הספרות האחרונות של 7^{9999} הן 43.

מעניין לשים לב שיכולנו לשאול שאלה דומה לגבי חזקות של כל מספר אחר. זאת מכיוון שבחזקות של כל מספר קיימת מחזוריות לגבי שתי הספרות האחרונות. תלמידים יוכלו להתנסות בגילוי המחזוריות של חזקות שונות על ידי יצירתן בקלות ובמהירות בעזרת הגיליון האלקטרוני Excel.

מעניין עוד יותר להסביר מדוע אנחנו יכולים להיות בטוחים כי קיימת מחזוריות לגבי שתי הספרות האחרונות.

ההסבר מפתיע בפשטותו. מכיוון שלכל מספר יש אינסוף חזקות ולעומת זאת יש רק 99 מספרים דו-ספרתיים (אם נכלול בתוכם גם את 01, 02, 03, ..., 09), הרי ברור כי שתי הספרות האחרונות חייבות לחזור על עצמן לאורך סדרת החזקות.

הספרות האלה תחזורנה גם בסדר קבוע, כי כל מספר בסדרה נוצר ממכפלה של המספר הקודם, במספר קבוע (בבסיס החזקה).

אותו דבר ניתן לומר גם על כל מספר סופי של ספרות אחרונות. זאת מכיוון שמספר המספרים בעלי k ספרות הוא סופי (למשל, יש בדיוק 900 מספרים תלת ספרתיים ו-9000 מספרים ארבע ספרתיים וכו') ואילו מספר החזקות הוא אינסופי.