



קפה בחלב

לירון מזגה לעצמה ספל מלא של קפה שחור. אחרי ששתתה $\frac{1}{6}$ מהקפה, החליטה

שהקפה מר מדי והוסיפה לספל חלב, עד שהספל היה מלא. עכשיו שתתה $\frac{1}{3}$

מהמשקה ושוב הוסיפה חלב עד מילוי הספל. הפעם שתתה מחצית מכמות המשקה ושוב הוסיפה חלב עד שהספל היה מלא. לבסוף שתתה את המשקה כולו.
- מה שתתה לירון יותר, קפה או חלב?

לירון שתתה קפה וחלב בכמויות שוות.

היא שתתה את כל הקפה שמזגה בהתחלה - ספל מלא, וגם ספל מלא חלב. כי

בפעם הראשונה הוסיפה $\frac{1}{6}$ ספל חלב, בפעם השנייה $\frac{1}{3}$ ספל חלב ובפעם

השלישית $\frac{1}{2}$ ספל חלב. בסך הכל הוסיפה $(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 1)$ ספל חלב.



תבלינים ומשקולות

מר חריף, סוחר תבלינים וחובב מסורת, נוהג לשקול את התבלינים שהוא מוכר במאזני כפות.

- מהו המספר הקטן ביותר של משקולות הדרוש למר חריף כדי לשקול כל משקל מ- 1 גרם ועד 100 גרם, בשקילה אחת?
- מה משקלה של כל אחת מהמשקולות?

יש להבחין בשני מקרים.

מקרה ראשון: על כף אחת של המאזניים מניחים את התבלינים שרוצים לשקול, ועל הכף השנייה את המשקולות. במקרה זה ידרשו 7 משקולות.

למשל: 1 גר', 2 גר', 4 גר', 8 גר', 16 גר', 32 גר', 64 גר'.

כל מספר מ-1 עד 100 ניתן לכתיבה כסכום של המספרים 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 כך שכל אחד מהם יופיע, לכל היותר, פעם אחת.

ניתן להגיע לפתרון על-ידי התנסות בבניית הסכומים, תוך כדי הקפדה על ניצול מקסימלי של המשקולות שכבר נבחרו, לפני הוספת משקולת חדשה.

נתחיל במשקולות של 1 גרם ו-2 גרם, בלעדיהן לא נוכל לשקול משקלים אלה. אבל, על-ידי צירוף של שתיהן נוכל לשקול גם 3 גרם $1 + 2 = 3$.

כדי לשקול 4 גרם נצטרך משקולת חדשה שמשקלה 4 גרם.

עכשיו נוכל לקבל על-ידי צירופים שונים את כל המשקלים עד 7 גרם.

$1 + 2 + 4 = 7$ נוסף גם משקולת של 8 גרם. עכשיו נוכל לשקול את כל המשקלים עד 15 גרם.

15 הוא המספר הגדול ביותר שנוכל לקבל כי $1 + 2 + 4 + 8 = 15$.

נשים לב לחוקיות המצטיירת בתהליך של בניית המספרים:

אם המספר האחרון שצרפנו לאוסף הוא n , נוכל לקבל את כל הסכומים עד

$2n - 1$. לכן, המספר הבא שנצטרך להוסיף לאוסף הוא $2n$.

מכאן שהמשקולות הדרושות כדי לשקול את כל המשקלים עד 100 גרם הן 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 כלומר 7 משקולות.

למעשה, בעזרת משקולות אלה ניתן לשקול עד 127 גרם.

אפשר גם להראות, כי הצגת כל משקל כסכום המשקולות, דומה למעשה לכתיבת מספר בבסיס בינארי.

בבסיס זה קיימות רק הספרות 0 ו-1 (השקולות לשימוש או אי-שימוש במשקולת)

הסדרה היסודית שלו היא הסדרה של חזקות 2 (השקולות למשקולות במקרה שלנו).

מן המספר שהתקבל אפשר לקרוא את סדרת המשקולות הדרושה.

במקום שרשום 0 - אין משקולת.

במקום שרשום 1 - יש משקולת.

$$26 = 11010_{\text{בינארי}}$$

סדרה

יסודית 16 8 4 2 1

$$26 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1$$

לכן ניתן לשקול 26 גרם באמצעות המשקולות 16, 8, ו-2.

חשוב לציין שסדרת המשקולות שהוצעה כאן איננה האפשרות היחידה.

מספר המשקולות המינימלי הוא אכן 7, אבל סדרת המשקולות איננה יחידה.

למשל, כל אחת מהסדרות הבאות יכולה אף היא להתאים.

1, 2, 3, 7, 14, 28, 56

1, 2, 4, 7, 15, 30, 60

1, 2, 3, 6, 13, 26, 52

מקרה שני: על כף אחת של המאזניים מניחים את התבלין שרוצים לשקול, ומאזנים את הכפות על-ידי הנחת משקולות בשתי הכפות. במקרה כזה יספיקו 5 משקולות. למשל: 1, 3, 9, 27, 81. גילוי המשקולות הדרושות יכול להיעשות בשלבים שתוארו בפתרון הקודם, אלא שכאן אפשרית גם פעולת חיסור בין המשקולות.