

7.4 מהי חבורה?

לפניכם לוח הפעולה $\oplus_7$: חיבור עם תוצאות מחזוריות במחזור 7, על קבוצת המספרים השלמים מ-0 עד 6.

$\oplus_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

נחקור את תכונות הקבוצה והפעולה בעזרת הלוח.

1. א. הסבירו כיצד מזהים בלוח את התכונות הבאות של הפעולה $\oplus_7$ והקבוצה (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

● סגירות

● קיום מספר ניטרלי

● חילופיות

● קיום מספר הופכי לכל מספר שבקבוצה.

ב. הפעולה $\oplus_7$ היא פעולה קיבוצית. הדגימו בעזרת שתי דוגמאות.

בפעילויות הקודמות הכרנו פעולות בינאריות שונות ולמדנו על תכונות שונות שלהן: סגירות, קיבוציות, איבר ניטרלי ואיברים הופכיים. בפעילות זו נלמד על מבנה מתמטי בשם **חבורה חילופית**, שקושר בין התכונות האלה.

הגדרה:

קבוצה של מספרים או של עצמים מתמטיים אחרים עם פעולה בינארית המוגדרת על כל איברי הקבוצה, נקראת חבורה חילופית, אם מתקיימים התנאים הבאים:

- א. הקבוצה סגורה לגבי הפעולה.
- ב. הפעולה היא קיבוצית.
- ג. בקבוצה קיים איבר ניטרלי עבור הפעולה.
- ד. לכל איבר בקבוצה יש איבר הופכי עבור הפעולה.
- ה. הפעולה היא חילופית.

הערה: יש גם חבורות שאינן חילופיות, והן אינן מקיימות את התנאי החמישי. בפעילויות שלנו נעסוק רק בחבורות חילופיות.

2/3 מה:

קבוצת כל המספרים השלמים (חיוביים ושליילים ו-0) עם פעולת החיבור הרגיל היא חבורה. כדי להראות זאת, נצטרך לוודא שכל התנאים מתקיימים:

- **סגירות:** לכל שני מספרים שלמים a ו- b , הסכום $a + b$ הוא מספר שלם, ולכן נמצא בקבוצה.
- **קיבוציות:** לכל שלושה מספרים שלמים a, b, c , מתקיים: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- **איבר ניטרלי:** 0 נמצא בקבוצת השלמים ולכל מספר שלם a מתקיים: $a + 0 = 0 + a = a$.
- **איבר הופכי:** לכל מספר שלם a קיים מספר שלם $(-a)$, כך ש- $a + (-a) = 0$. כלומר, לכל a קיים מספר שסכומו עם a הוא המספר הניטרלי.
- **חילופיות:** לכל שני מספרים שלמים a, b מתקיים: $a + b = b + a$.

2. האם קבוצת המספרים השלמים מ-0 עד 6 עם הפעולה $\oplus_7$ שהוגדרה בתחילת הפעילות היא חבורה חילופית? נמקו.

3. לכל סעיף, מצאו דוגמה לקבוצה עם פעולה בינארית המקיימת את התנאי.

- א. הקבוצה אינה סגורה לגבי הפעולה.
- ב. הפעולה אינה קיבוצית.
- ג. בקבוצה אין איבר ניטרלי עבור הפעולה.
- ד. בקבוצה יש איבר ניטרלי עבור הפעולה, אך יש איברים בקבוצה שאין להם איבר הופכי בקבוצה.

4. לפניכם מספר קבוצות ופעולות.
 קבעו אילו מן התכונות מתקיימות בהן ואילו לא. נמקו תשובותיכם.
 זהו על-סמך כך אילו קבוצות ופעולות הן חבורות חילופיות.

התכונה / הקבוצה עם הפעולה	סגירות	קיבוציות	איבר ניטרלי	איבר הופכי	חילופיות	חבורה חילופית?
המספרים הטבעיים עם חיבור						
המספרים השלמים עם כפל						
המספרים הטבעיים עם הממוצע החשבוני						
המספרים $\mathbb{m}_n$ (n, m מספרים שלמים, שונים מ-0) עם כפל						
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3, 4) עם חיבור מחזורי $\oplus_5$		✓				
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3, 4) עם כפל מחזורי $\odot_5$		✓				
קבוצת המספרים (1, 2, 3, 4) עם כפל מחזורי $\odot_5$		✓				
קבוצת המספרים (0, 1, 2, 3) עם חיבור מחזורי $\oplus_4$		✓				
קבוצת המספרים (1, 2, 3) עם כפל מחזורי $\odot_4$		✓				

זיהוי ובניית לוח פעולה של חבורה חילופית

$\odot_6$	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

5. לפניכם לוח של הפעולה כפל 6 מחזורי על קבוצת המספרים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

א. אילו מן התנאים הדרושים לקיום חבורה חילופית מתקיימים בקבוצה עם הפעולה הבינארית $\odot_6$?

ב. לכל תנאי שאינו מתקיים תנו דוגמה נגדית.

ג. האם הקבוצה עם הפעולה הנתונה היא חבורה חילופית? נמקו.

6. בכל סעיף, בדקו האם הקבוצה עם הפעולה הנתונה מהווה חבורה חילופית. הסבירו את תשובתכם.

ב. הקבוצה $\{a, b, c\}$
הפעולה $\blacklozenge$

$\blacklozenge$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

א. הקבוצה $\{a, b\}$
הפעולה $\blacklozenge$

$\blacklozenge$	a	b
a	a	b
b	b	b