

7.4 ما هي الزُّمرة؟

أمامكم جدول العملية \oplus_7 وهي عملية جمع مع نتائج دورية في الدورة الـ 7 على مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتى 6.

\oplus_7	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

نبحث صفات المجموعة والعملية بمساعدة الجدول.

1. أ. اشرحوا كيف، تميّز في الجدول، الصّفات الآتية للعملية \oplus_7 والمجموعة $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ؟

- انغلاق.
- وجود عدد محايد.
- تبادلية.
- وجود مقلوب العدد لكل عدد في المجموعة.

ب. العملية \oplus_7 هي عملية تجمعيّة. أعطوا أمثلة بمساعدة مثالين.

تعرّفنا، في الفعاليّات السّابقة، على عمليّات ثنائية مختلفة، وتعلّمنا عن صفاتها المختلفة: انغلاق، تجمعيّة، حدّ محايد، حدود مقلوب العدد. نتعلّم، في هذه الفعاليّة، عن مبني رياضيّ اسمه زُمرة تبادلية يربط بين هذه الصّفات.

تعريف:

مجموعة أعداد، أو عناصر رياضية أخرى مع عملية ثنائية معرفة على جميع حدود المجموعة نسمى "زمرة تبادلية"، إذا تحقق الشروط الآتية:

أ. المجموعة مغلقة للعملية.

ب. العملية تجميعية.

ت. يوجد في المجموعة حدٌ محايد في العملية.

ث. لكل حدٍ في المجموعة حدٌ مقلوب العدد في العملية.

ج. العملية هي تبادلية.

ملاحظة: يوجد زمرات غير تبادلية، وهي لا تتحقق الشرط الخامس. سنبحث في الفعاليات زمرات تبادلية فقط.

مثال:

مجموعة كل الأعداد الصحيحة (الموجبة والسلبية والـ 0) مع عملية الجمع العادي هي زمرة.

يجب التأكد من أن جميع الشروط تتحقق كي نبني ذلك:

انغلاق: لكل عددين صحيحين a و b ، مجموعهما $a + b$ هو عدد صحيح؛ لذا فهو موجود في المجموعة.

تجميعية: تتحقق لكل ثلاثة أعداد صحيحة a, b, c ما يلي: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

الحد المحايد: العدد 0 موجود في مجموعة الأعداد الصحيحة، وكل عدد صحيح a يتتحقق: $a + 0 = 0 + a = a$.

حدٌ مقلوب العدد: لكل عدد صحيح a يوجد عدد صحيح $(-a)$ ، حيث إن $a + (-a) = 0$.
هذا يعني أنه لكل a يوجد عدد إذا جمعناه مع a فسنحصل على العدد المحايد.

تبادلية: يتتحقق لكل عددين صحيحين a, b ما يلي: $a + b = b + a$.

2. هل مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتى 6 مع العملية \oplus_7 التي عرفناها في بداية الفعالية هي زمرة تبادلية؟
علّوا.

3. جدوا، في كل بند، مثالاً لمجموعة أعداد مع عملية ثنائية تتحقق الشرط المعطى:

أ. المجموعة ليست مغلقة للعملية.

ب. العملية ليست تجميعية.

ت. لا يوجد حدٌ محايد للعملية في المجموعة.

ث. يوجد في المجموعة حدٌ محايد للعملية، لكن هناك محدودية في المجموعة، وهذا يعني أنه لا يوجد حدٌ مقلوب العدد في المجموعة.

4. أمامكم عدة مجموعات وعمليّات.

حدّدوا الصفات التي تتحقّق فيها والصفات التي لا تتحقّق فيها. علّوا إجابتكم.
جدوا، بناءً على ذلك، المجموعات والعمليّات التي تعتبر زُمراً تبادلية.

الصفة المجموعة مع العملية	الانغلاق	التجمعيّة	حدّ محايد	حدّ مقلوب العدد	تبادلية	زُمرة تبادلية
الأعداد الطّبيعيّة مع الجمع						
الأعداد الصّحيحة مع الضّرب						
الأعداد الطّبيعيّة مع المعدّل الحسابيّ						
الأعداد $\frac{m}{n}$ أعداد صحيحة تختلف عن 0 مع الضّرب						
مجموعة الأعداد $(0, 1, 2, 3, 4)$ مع جمع دوريّ \oplus_5	✓					
مجموعة الأعداد $(0, 1, 2, 3, 4)$ مع ضرب دوريّ \odot_5	✓					
مجموعة الأعداد $(1, 2, 3, 4)$ مع ضرب دوريّ \odot_5	✓					
مجموعة الأعداد $(0, 1, 2, 3)$ مع جمع دوريّ \oplus_4	✓					
مجموعة الأعداد $(1, 2, 3)$ مع ضرب دوريّ \odot_4	✓					

تمييز وبناء جدول عملية زُمرة تبادلية

\odot_6	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

5. أمامكم جدول عملية ضرب 6 دوري على مجموعة الأعداد

. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

أ. أية شروط من بين الشروط المطلوبة لتحقيق زُمرة تبادلية تتحقق في المجموعة مع العملية الثانية \odot_6 ؟

ب. أعطوا مثلاً مضاداً لكل شرط لا يتحقق.

ت. هل المجموعة مع العملية المعطاة هي زُمرة تبادلية؟ علّوا.

6. افحصوا، في كل بند، هل تشكل المجموعة مع العملية المعطاة زُمرة تبادلية؟

اشرحوا إجابتكم.

ب. المجموعة $\{a, b, c\}$

♦ العملية

♦	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

أ. المجموعة $\{a, b\}$

❖ العملية

❖	a	b
a	a	b
b	b	b