

7.4 ما هي الزمرة؟

أمامكم جدول العملية \oplus_7 وهي عملية جمع مع نتائج دورية في الدورة الـ 7 على مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتى 6.

\oplus_7	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

نبحث صفات المجموعة والعملية بمساعدة الجدول.

1. أ. اشرحوا كيف، نميز في الجدول، الصفات الآتية للعملية \oplus_7

والمجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ؟

● انغلاق.

● وجود عدد محايد.

● تبادلية.

● وجود مقلوب العدد لكل عدد في المجموعة.

ب. العملية \oplus_7 هي عملية تجميعية. أعطوا أمثلة بمساعدة مثالين.

تعرفنا، في الفعاليات السابقة، على عمليات ثنائية مختلفة، وتعلمنا عن صفاتها المختلفة: انغلاق، تجميعية، حد محايد، حدود مقلوب العدد. نتعلم، في هذه الفعالية، عن مبنى رياضي اسمه زمرة تبادلية يربط بين هذه الصفات.

تعريف:

مجموعة أعداد، أو عناصر رياضية أخرى مع عملية ثنائية معرّفة على جميع حدود المجموعة نسّمِي "زُمرة تبادلية"، إذا تحقّقت الشّروط الآتية:

أ. المجموعة مغلقة للعملية.

ب. العملية تجميعية.

ت. يوجد في المجموعة حدّ محايد في العملية.

ث. لكلّ حدّ في المجموعة حدّ مقلوب العدد في العملية.

ج. العملية هي تبادلية.

ملاحظة: يوجد زُمرات غير تبادلية، وهي لا تحقّق الشرط الخامس. سنبحث في الفعاليّات زُمرات تبادلية فقط.

مثال:

مجموعة كلّ الأعداد الصحيحة (الموجبة والسّالبة وال 0) مع عملية الجمع العاديّ هي زُمرة. يجب التأكّد من أنّ جميع الشّروط تتحقّق كي نبيّن ذلك:

- انغلاق: لكلّ عددين صحيحين a و b ، مجموعهما $a + b$ هو عدد صحيح؛ لذا فهو موجود في المجموعة.
- تجميعية: تتحقّق لكلّ ثلاثة أعداد صحيحة a, b, c ما يلي: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- الحدّ المحايد: العدد 0 موجود في مجموعة الأعداد الصحيحة، ولكلّ عدد صحيح a يتحقّق: $a + 0 = 0 + a = a$.
- حدّ مقلوب العدد: لكلّ عدد صحيح a يوجد عدد صحيح $(-a)$ ، حيث إنّ $a + (-a) = 0$. هذا يعني أنّه لكلّ a يوجد عدد إذا جمعناه مع a فسنحصل على العدد المحايد.
- تبادلية: يتحقّق لكلّ عددين صحيحين a, b ما يلي: $a + b = b + a$.

2. هل مجموعة الأعداد الصحيحة من 0 حتّى 6 مع العملية \oplus_7 التي عرّفناها في بداية الفعاليّة هي زُمرة تبادلية؟ علّلوا.

3. جدوا، في كلّ بند، مثلاً لمجموعة أعداد مع عملية ثنائية تحقّق الشرط المعطى:

أ. المجموعة ليست مغلقة للعملية.

ب. العملية ليست تجميعية.

ت. لا يوجد حدّ محايد للعملية في المجموعة.

ث. يوجد في المجموعة حدّ محايد للعملية، لكن هناك محدودية في المجموعة، وهذا يعني أنّه لا يوجد حدّ مقلوب العدد في المجموعة.

4. أمامكم عدة مجموعات وعمليات. حدّدوا الصفات التي تتحقّق فيها والصفات التي لا تتحقّق فيها. علّلوا إجابتكم. جدوا، بناءً على ذلك، المجموعات والعمليات التي تعتبر زمراً تبادلية.

المجموعة مع العملية	الصفة	الانغلاق	التجميعية	حدّ محايد	حدّ مقلوب العدد	تبادلية	زُمرة تبادلية
الأعداد الطّبيعية مع الجمع							
الأعداد الصحيحة مع الضرب							
الأعداد الطّبيعية مع المعدّل الحسابي							
الأعداد $\frac{m}{n}$ (n, m أعداد صحيحة تختلف عن الـ 0) مع الضرب							
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3, 4) مع جمع دوريّ \oplus_5			✓				
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3, 4) مع ضرب دوريّ \odot_5			✓				
مجموعة الأعداد (1, 2, 3, 4) مع ضرب دوريّ \odot_5			✓				
مجموعة الأعداد (0, 1, 2, 3) مع جمع دوريّ \oplus_4			✓				
مجموعة الأعداد (1, 2, 3) مع ضرب دوريّ \odot_4			✓				

تمييز وبناء جدول عملية زمرة تبادلية

5. أمامكم جدول عملية ضرب 6 دوري على مجموعة الأعداد

\odot_6	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	0	2	4
3	3	0	3	0	3
4	4	2	0	4	2
5	5	4	3	2	1

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

أ. آية شروط من بين الشروط المطلوبة لتحقيق زمرة تبادلية تتحقق في المجموعة مع العملية الثنائية \odot_6 ؟

ب. أعطوا مثلاً مضاداً لكل شرط لا يتحقق.

ت. هل المجموعة مع العملية المعطاة هي زمرة تبادلية؟ عللوا.

6. افحصوا، في كل بند، هل تشكل المجموعة مع العملية المعطاة زمرة تبادلية؟

اشرحوا إجاباتكم.

ب. المجموعة $\{a, b, c\}$

العملية \blacklozenge

\blacklozenge	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	c	a

أ. المجموعة $\{a, b\}$

العملية \blacklozenge

\blacklozenge	a	b
a	a	b
b	b	b