7.3 عمليّات مع نتائج دوريّة

مجموعات، وعمليّات وصفات

اِعملوا **بأزواج**، وراجعوا، بإيجاز، المصطلحات والصّفات الّتي بحثناها في الدّروس السّابقة.

تقاسموا المصطلحات والصّفات، واشرحوها بكلماتكم.

أ. عملية **ثنائيّة**.

ب. مجموعة **مغلقة** للعمليّة الثّنائيّة.

ت. عمليّة ثنائيّة **تبادليّة**.

ث. حدّ **محايد** للعمليّة الثّنائيّة (نتطرّق إلى الحدّ المحايد في العمليّة التّبادليّة فقط).

ج. عمليّة ثنائيّة **تجميعيّة**.

1. a وَ b هما عددان صحيحان وَ $*$ هي عمليّة بينهما.
حاولوا أنْ تسجِّلوا الصّفات الموجودة في الإطار بمساعدة الحروف وبعض الكلمات.

2. أيّة صفات من بين الصّفات الّتي تظهر في الإطار تتحقّق مع الأعداد الصّحيحة والعمليّات الآتية:

أ. الطّرح.

ب. المعدّل الحسابيّ (للتّذكير: المعدّل الحسابيّ لعددين هو نِصف مجموعهما).

ت. القوة.

ث. الضّرب.

مقلوب العدد

تعريف:

b هو مقلوب العدد a في عملية الضّرب العاديّة إذا كان $a \cdot b = 1$.

مثال: $\frac{2}{5}$ هو مقلوب العدد $2\frac{1}{2}$، لأنّ $2\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1$.

بما أنّ عمليّة الضّرب تبادليّة، لذا فإنّ العدد $2\frac{1}{2}$ هو مقلوب العدد $\frac{2}{5}$.

اِنتبهوا: العدد 1 (نتيجة ضرب مقلوب الأعداد) هو عدد محايد في عمليّة الضّرب.

نسمّي بشكل عام، **b مقلوب العدد a** في العمليّة التّبادليّة $*$ الّتي يوجد لها حدّ محايد e

إذا كان $a * b = e$. بما أنّ العمليّة تبادليّة، لذا فإنّ a هو مقلوب العدد b أيضًا.

هذا يعني أنّ a وَ b هما عددان، وكل واحد منهما مقلوب العدد الآخر.

3. أ. أكملوا، في دفاتركم، التّعريف الآتي بالكلمات:
الأعداد الّتي تُعتبر مقلوب العدد الآخر في عمليّة معيّنة هي أعداد ...
ب. ما هو مقلوب العدد 5 في عمليّة الجمع العاديّة؟ هل يوجد له اسم آخر مقبول نسبة إلى الـ 5؟

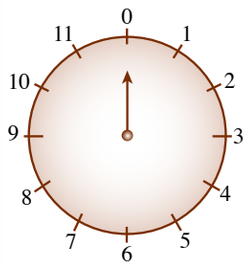
4. أ. هل يوجد لكلّ عدد في مجموعة الأعداد **الصّحيحة** مع عمليّة الضّرب العاديّة مقلوب العدد؟ اِشرحوا أو أعطوا مثالًا مضادًّا.
ب. جِدوا مجموعة أعداد مع عمليّة الضّرب العاديّة، بحيث يكون لكلّ عدد فيها مقلوب عدد ينتمي إلى المجموعة أيضًا (اِحذروا من الصّفر!).

نظر داؤود إلى السّاعة الموجودة في غرفته. خرج والده إلى العمل وقال: سأعود بعد 10 ساعات. حاول داؤود أنْ يعرف كم تكون السّاعة عندما يعود والده.

نحاول مساعدة داؤود في معرفة العمليّات الّتي يجب أنْ ينفِّذها على السّاعة، ونتعرّف على صفات هذه العمليّات.

جمع دوريّ

تعريف:



معطى 12 نقطة على دائرة، وقد أشرنا إليها بأعداد ظاهرة، ومعطى عقرب موجَّه إلى الـ 0.

نعرِّف العمليّة $a \oplus_{12} b$ بين كلّ زوج من الأعداد في المجموعة

{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} كالتّالي:

دوِّروا العقرب a محطات باتّجاه عقارب السّاعة، وبعد ذلك استمرّوا في تدويره b محطات إضافيّة في الاتّجاه نفسه.

نتيجة العمليّة هي رقم المحطّة الّتي وصلتم إليها.

أمثلة:

$6 \oplus_{12} 3 = 9$ $\quad 10 \oplus_{12} 4 = 2$ $\quad 7 \oplus_{12} 10 = 5$

5. اِحسبوا:

أ. $10 \oplus_{12} 3 =$ ت. $8 \oplus_{12} 5 =$ ج. $8 \oplus_{12} 11 =$

ب. $3 \oplus_{12} 9 =$ ث. $4 \oplus_{12} 3 =$ ح. $7 \oplus_{12} 7 =$

6. اِنسخوا في دفاتركم، وأكملوا:

أ. $10 \oplus_{12} \square = 3$ ب. $7 \oplus_{12} \square = 3$ ت. $\square \oplus_{12} 8 = 7$

7. اِبنوا تمرينين لكلّ نتيجة:

أ. $\square \oplus_{12} \square = 0$ ب. $\square \oplus_{12} \square = 1$ ت. $\square \oplus_{12} \square = 5$

نفحص صفات العمليّة $\oplus_{12}$ في المجموعة {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11}.

8. أشيروا "صحيح" / "غير صحيح"، واشرحوا.

أ. المجموعة المعطاة مغلقة للعمليّة $\oplus_{12}$.

ب. العمليّة $\oplus_{12}$ هي عمليّة تبادليّة.

ت. العمليّة $\oplus_{12}$ هي عمليّة تجميعيّة.

ث. الحدّ المحايد في العمليّة $\oplus_{12}$ هو 0.

ج. العددان 8 وَ 4 هما مقلوب العدد الواحد للآخر في العمليّة $\oplus_{12}$.

9. جدوا مقلوب العدد لكلّ عدد من الأعداد 0, 11, 3 في العمليّة $\oplus_{12}$.
هل يوجد عدد إضافيّ يساويه مقلوبه؟

الضّرب الدّوريّ

10. أ. اِقترحوا تعريفًا **للضّرب الدّوريّ** في المجموعة {0, 1, 2, 3, 4}. ارمزوا إلى هذه العمليّة كالتّالي: $a \odot_5 b$.

ب. حلّوا حسب تعريفكم.

$4 \odot_5 3 =$ $2 \odot_5 3 =$ $3 \odot_5 4 =$ $3 \odot_5 2 =$

ت. تطرّقوا إلى الصّفات الّتي وردت في بداية الفعّاليّة. اِفحصوا أيّة صفات تتحقّق مع العمليّة $\odot_5$ الّتي عرَّفتموها في المجموعة المعطاة.

تعريف:

نعرِّف العمليّة $a \odot_5 b =$ كعمليّة **ضرب دوريّ** في المجموعة {0, 1, 2, 3, 4} كالتّالي:

نضرب **a** وَ **b** ضربًا عاديًّا، ثم نطرح مضاعفات الـ 5 من حاصل الضّرب حتّى تصبح النّتيجة أصغر من 5.

هذه هي نتيجة العمليّة.

مثلاً: $3 \odot_5 3 = 4$ $\quad$ $4 \odot_5 4 = 1$

11. أ. اِنسخوا، في دفاتكم، وأكملوا جدول العمليّة $\odot_5$.

ب. اِشرحوا كيف نرى في الجدول:

- أنّ المجموعة مغلقة للعمليّة المعطاة.
- العدد المحايد في العمليّة المعطاة.
- أن العمليّة تبادليّة.
- أزواج الأعداد الّتي تشكِّل مقلوب العدد الواحد للآخر.

ت. هل يوجد لكلّ عدد في المجموعة مقلوب العدد؟ اِشرحوا.

ث. اِشرحوا لماذا لا نستطيع أنْ نرى في الجدول ما إذا كانت العمليّة تجميعيّة أَم لا؟

$\odot_5$	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3				4	
4					1

12. نعرِّف، بطريقة شبيه، العمليّة $a \odot_4 b$ في المجموعة {0, 1, 2, 3}.

برهنوا أنّه ليس للعدد 2 مقلوب العدد لهذه العمليّة في المجموعة المعطاة.

ظواهر دوريّة في حياتنا اليوميّة

يسكن يوسف وهيام الواحد مقابل الآخر. يربي كلّ واحد منهما كلبًا في بيته. يتنزّه يوسف مع كلبه كلّ 8 ساعات، أما هيام فتتنزّه مع كلبها كلّ 9 ساعات.

13. خرج يوسف وهيام في يوم الأحد مع كلبيهما للتنزّه عند السّاعة الـ 7:00.

أ. كلّ كم ساعة يلتقي يوسف وهيام خلال نزهتهما مع كلبيهما؟

ب. في أيّ يوم، وفي أيّة ساعة ستكون نزهة يوسف وهيام وكلبيهما القادمة؟

هل تعلمون؟

"صرصار الخشب" (Cycada) هو حشرة تُصدر صوتًا. يوجد حوالي 2500 نوع مختلف من "صرصار الخشب". يعيش نوعان من هذه الأنواع تحت سطح الأرض معظم الوقت، وفقط مرّة واحدة خلال كلّ فترة حياتهما يخرجان فوق سطح الأرض: يخرج النّوع الأول كلّ 17 سنة والآخر كلّ 13 سنة، لذا يظهر النّوعان، في مناطق معيّنة في العالَم (على سبيل المثال في الولايات المتحدة) فوق سطح الأرض، في مجموعات كبيرة جدًّا كلّ 17 (أو 13) سنة.

يُنْتِج هذان النّوعان ظاهرتين دوريّتين: الأولى كلّ 17 سنة، والثّانية كلّ 13 سنة.

كلّ كم سنة يظهر النّوعان على سطح الأرض في نفس الوقت؟