7.2 عمليّات إضافيّة

وجدت **ليلى** ورقة عليها تمارين حسابيّة غريبة:

$3 \bowtie 6 = 6$ $\quad$ $7 \bowtie -3 = 1$

$8 \bowtie 3 = 8$ $\quad$ $-4 \bowtie 1 = -6$

$2 \bowtie 5 = 4$ $\quad$ $0 \bowtie 13 = 10$

جِدوا العمليّة: $a \bowtie b =$ _____

1. حلّوا التّمارين الآتية:

أ. $0 \bowtie -1 =$ $\quad$ ت. $-3 \bowtie -2 =$ $\quad$ ج. $\frac{1}{2} \bowtie -\frac{1}{6} =$

ب. $2 \bowtie 2 =$ $\quad$ ث. $\frac{1}{2} \bowtie 2\frac{1}{4} =$ $\quad$ ح. $-5.2 \bowtie 8 =$

2. حلّوا المعادلات الآتية:

أ. $0 \bowtie x = 8$ $\quad$ ت. $-3 \bowtie x = 3$ $\quad$ ج. $7 \bowtie x = 7$

ب. $x \bowtie 2 = 6$ $\quad$ ث. $3 \bowtie x = 4$ $\quad$ ح. $2x \bowtie 8 = 6$

تعرَّفنا في الفعّاليّة السّابقة على عمليّات ثنائيّة جديدة وعلى صفاتها. وتعرّفنا أيضًا على صفتين للعمليّات الثّنائيّة: **التّبادل والحدّ المحايد.**

للتذكير:

العمليّة الثّنائيّة بين أعداد هي عمليّة بين عددين تعطينا عددًا وحيدًا كنتيجة.

العمليّة التّبادليّة هي عمليّة ثنائيّة لا يؤثّر ترتيب الأعداد فيها على النّتيجة.

الحدّ المحايد في العمليّة الثّنائيّة هو عدد إذا نفّذنا بينه وبين كلّ عدد آخر عمليّة فإنّنا نحصل على العدد الآخر.

جميع العمليّات الّتي تعرّفنا عليها هي عمليّات ثنائيّة. نتطرّق في هذه المرحلة إلى الحدود المحايدة في عمليّات تبادليّة فقط.

3. هل العمليّة $\bowtie$ هي عمليّة ثنائيّة؟ علِّلوا.

هل العمليّة $\bowtie$ هي عمليّة تبادليّة؟ علِّلوا.

هل يوجد للعمليّة $\bowtie$ حدّ محايد؟ إذا كانت الإجابة بنعم فما هو؟ وإذا كانت الإجابة بلا فعلِّلوا.

صفات إضافيّة

اِنغلاق

تخبّط خالد في السّؤال الآتي: هل عمليّتا الجمع والطّرح العاديّتان هما تبادليّتان لمجموعة الأعداد الطبيعيّة؟

فحص المثال الآتي: $4 = 3 - 7$ $\quad\quad$ $4 - = 7 - 3$

انتبه خالد إلى أنّ إحدى نتيجتَي التّمرين ليست عددًا طبيعيًّا.

تعريف:

نسمّي مجموعة أعداد "**بالمغلقة**" لعمليّة ثنائيّة إذا كانت نتيجة العمليّة - بين كلّ عددين في المجموعة - تنتمي إلى نفس المجموعة.

مثال: مجموعة الأعداد الطبيعيّة هي مجموعة مغلقة لعمليّة الجمع العاديّة؛ لأنّ مجموع كلّ عددين طبيعيّين هو عدد طبيعيّ دائمًا، وهذا يعني أنّه ينتمي إلى المجموعة.

لكن مجموعة الأعداد الطبيعيّة **غير** مغلقة لعمليّة الطّرح العاديّة؛ لأنّ نتيجة طرح عددين طبيعيّين **ليست** عددًا طبيعيًّا **دائمًا**.

مثلًا: نتيجة طرح التّمرين $7 - 3$ ليست عددًا طبيعيًّا.

4. اِفحصوا، في كلّ بند، هل مجموعة الأعداد الطبيعيّة (دون العدد صفر) مغلقة للعمليّة المعطاة.
إذا كانت الإجابة بنعم فاشرحوا السّبب. وإذا كانت الإجابة بلا فأعطوا مثالًا مضادًّا.

أ. الضّرب.

ب. القسمة.

ت. القوّة.

ث. المعدّل الحسابي (للتّذكير: معنى العمليّة "معدّل حسابيّ لعددين" هو نِصف مجموعهما).

5. أ. هل مجموعة الأعداد الطبيعيّة هي مجموعة مغلقة للعمليّة $\bowtie$ الّتي تعرّفنا عليها في بداية الفعّاليّة؟
إذا كانت الإجابة بنعم فاشرحوا السّبب، وإذا كانت الإجابة بلا فأعطوا مثالًا مضادًّا.

ب. جِدوا مجموعة مغلقة للعمليّة $\bowtie$.

التّجميع

طُلب من **رامي** و**ورانية** أنْ يحلا تمرينيْ جمع وتمرينيْ طرح:

أ. $(112 + 28) + 52 =$ ت. $(117 - 17) - 7 =$

ب. $112 + (28 + 52) =$ ث. $117 - (17 - 7) =$

اِدّعى **راني** أنّه يكفي حلّ تمرين جمع واحد وتمرين طرح واحد.
اِدّعت **رانية** أنّه يكفي حلّ تمرين جمع واحد، لكن يجب حلّ تمرينيْ طرح.
من منهما صادق؟ اِشرحوا.

تعريف

العمليّة الثّنائيّة هي **عمليّة تجميعيّة** إذا حقّقت قانون التّجميع، وهذا يعني أنّ ترتيب تنفيذ نفس العمليّة مرتين في سلسلة العملية نفسها لا يغيِّر النّتيجة.

هذا يعني أنّ العمليّة $*$ هي تجميعيّة لمجموعة أعداد، إذا تحقّقت المساواة الآتية، **لكل** ثلاثة أعداد a,b,c في مجموعة الأعداد المناسبة للعمليّة: $(a * b) * c = a * (b * c)$

مثال: عمليّة الجمع العاديّة هي تجميعيّة في مجموعة الأعداد الطبيعيّة؛ لأنّه **لكل**

ثلاثة أعداد طبيعيّة: $(a + b) + c = a + (b + c)$

أما عمليّة الطّرح العاديّة فهي ليست تجميعيّة في مجموعة الأعداد الطبيعيّة.

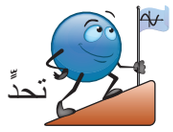
مثلًا: $(10 - 5) - 3 = 2$ لكن $10 - (5 - 3) = 8$

6. هل العمليّة $\bowtie$ الّتي تعرفنا عليها في بداية الفعّاليّة هي تجميعيّة في مجموعة الأعداد الصّحيحة؟ علِّلوا إجابتكم.

7. معطاة ثلاث عمليّات ثنائيّة، وقد تعرّفنا عليها في الفعّاليّة السّابقة.

$a \bigstar b = a^2 + b$ $\quad a \spadesuit b = \frac{a+b}{2}$ $\quad a \blacktriangle b = 2 \cdot a + b$

تطرّقوا إلى كلّ فعّاليّة، وحدِّدوا ما إذا كانت تجميعيّة أم لا. إذا كانت الإجابة بنعم فاشرحوا، وإذا كانت الإجابة بلا فأعطوا مثالًا مضادًّا (هذا يعني أنّه إذا غيَّرنا فيه ترتيب تنفيذ العمليّة في السّلسلة فسنحصل على نتائج مختلفة).



8. نتطرّق إلى مجموعة الأعداد **الصّحيحة** على محور الأعداد.

نعرِّف العمليّة M بين عددين صحيحين a وَ b بالطّريقة الآتية:

a M b يساوي **البُعد** بين a وَ b على محور الأعداد. اِنتبهوا! البُعد هو عدد موجب دائمًا.

أ. هل العمليّة M هي عمليّة ثنائيّة؟ اِشرحوا.

ب. هل مجموعة الأعداد الصّحيحة مغلقة للعمليّة M؟

ت. هل العمليّة M تبادليّة؟ علِّلوا.

ث. هل العمليّة M تجميعية؟

ج. اِشرحوا لماذا لا يوجد حدّ محايد للعمليّة M؟

ح. جِدوا مجموعة أعداد مغلقة للعمليّة M بحيث يكون هناك حدّ محايد لهذه العمليّة.